

**SMA0300 Geometria Analítica**  
**Sétima Lista de Exercícios – Posição relativa e ortogonalidade**

Nos exercícios abaixo, considere fixado um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, C)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Isto é, um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$  é representado por uma terna  $P = (x, y, z)$ , significando que  $P = O + (x, y, z)_C$ , onde "+" denota a soma de ponto com vetor e  $C$  é a base canônica de  $V^3$  (base ortonormal positivamente orientada). As equações de retas e planos são dadas em relação a este sistema.

**Exercício 1.** Dois pontos efetuam movimentos descritos pelas equações  $r: X = (0, 0, 0)_\Sigma + \lambda(1, 2, 4)_C$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $s: X = (1, 0, -2)_\Sigma + \lambda(1, 1, 1)_C$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . As trajetórias são concorrentes? Haverá colisão?

**Exercício 2.** Escreva as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $A = (2, 0, -3)$  e:

(a) é paralela à reta que passa pelos pontos  $B = (1, 0, 4)$  e  $C = (2, 1, 3)$ .

(b) é paralela a  $s: \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$ .

(c) é paralela à reta  $s: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 3.** O plano  $\pi_1$  contém  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ , o plano  $\pi_2$  contém  $Q = (-1, -1, 0)$  e é paralelo a  $\vec{u} = (0, 1, -1)$  e  $\vec{v} = (1, 0, 1)$ , e o plano  $\pi_3$  tem equação  $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

(a) Obtenha uma equação geral para cada um dos três planos.

(b) Mostre que a interseção dos três planos se reduz a um único ponto. Qual é este ponto?

**Exercício 4.** Dadas as retas  $r, s$  e  $t$  cujas equações são dadas por:

$$r : \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \quad s : x = \frac{y}{m} = z \quad e \quad t : -x + z = y = -z - 1,$$

encontrar os valores de  $m \in \mathbb{R}$  de modo que:

- (a) as retas  $r$  e  $s$  sejam paralelas e não coincidentes;
- (b) as retas  $r, s$  e  $t$  sejam paralelas a um mesmo plano;
- (c) as retas  $r$  e  $t$  sejam concorrentes;
- (d) as retas  $r$  e  $s$  sejam reversas.

**Exercício 5.** Obtenha uma equação vetorial da reta  $s$  que contém o ponto  $P = (1, 1, 0)$ , é paralela ou está contida no plano dado por  $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$  e é concorrente à reta dada por  $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercício 6.** Encontre a projeção tomada paralelamente à reta dada por  $r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , do ponto  $P = (1, 4, 0)$  sobre o plano dado por  $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$ .

**Exercício 7.** Obtenha uma equação para o lugar geométrico (ou seja, para o conjunto) dos pontos médios dos segmentos que têm extremidades nos planos dados por  $\pi_1 : 2x - 3y + 3z - 4 = 0$  e  $\pi_2 : x - y - z + 2 = 0$ .

**Exercício 8.** O plano  $\pi$  contém a reta  $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e é transversal aos eixos coordenados  $Oy$  e  $Oz$ , interceptando-os, respectivamente, nos pontos  $A$  e  $B$ . Obtenha a equação geral de  $\pi$ , sabendo que  $O, A$  e  $B$  são vértices de um triângulo isósceles.

**Exercício 9.** Determine a projeção ortogonal do ponto  $P = (4, 0, 1)$  sobre o plano  $\pi: 3x - 4y + 2 = 0$ .

**Exercício 10.** Determine a projeção ortogonal da reta  $r: x + 1 = y + 2 = 3z - 3$  sobre o plano  $\pi: x - y + 2z = 0$ .

**Exercício 11.** Determine equações paramétricas da reta  $t$  simétrica da reta  $r$  determinada pelos pontos  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (0, -1, -1)$  em relação ao plano  $\pi: x + y - z = 3$ .

**Exercício 12.** Dados os planos  $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$ ,  $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$  e  $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$ , encontre uma equação geral do plano que contém  $\pi_1 \cap \pi_2$  e é perpendicular ao plano  $\pi_3$ .

**Exercício 13.** Obtenha uma equação vetorial da reta  $t$  perpendicular com as retas

$$r: X = (1, 2, 3)_{\Sigma} + \lambda(2, -1, 0)_{\mathcal{C}}, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ e } s: X = (0, 1, -3)_{\Sigma} + \lambda(1, -1, -2)_{\mathcal{C}}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Exercício 14.** Encontre uma equação vetorial da reta  $t$  que está contida no plano  $\pi: x - y + z = 0$  e é concorrente com as retas  $r: \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x = y \end{cases}$  e  $s: \begin{cases} z = x + 2 \\ y = 0. \end{cases}$