PRG0039 Fundamentos da Matemática Elementar

Aula 7 - Logaritmo e Exponencial

Anarosa Brandão Fernando Kurokawa

July 3, 2024

Exponencial

Equação exponencial

- Uma equação exponencial é uma equação na qual a incógnita está no expoente.

  Exemplos:

  $2^x = 1024,$

  $3^{2x} + 3^x - 1 = 2$

Resolução de Equação exponencial

- Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, valem as igualdades:

$$a^x = a^y \iff x = y$$

Exercícios resolvidos

1. Calcular $81^x = 243$

$$81^x = 243 \iff (3^4)^x = 3^5 \iff 4x = 5 \quad \therefore \quad x = \frac{5}{4}$$

2. Calcular $10^x = \sqrt[4]{\frac{1}{1000}}$

$$10^x = \sqrt[4]{\frac{1}{1000}} \iff 10^x = 1000^{-\frac{1}{4}} = (10^2)^{-\frac{1}{4}} = 10^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad x = -\frac{1}{2}$$

Logaritmos

História

- John Napier definiu **logaritmos** para simplificar cálculos envolvendo produtos ou divisões de números racionais na forma de números decimais.
- A intenção era mapear multiplicações para somas e divisões para subtrações.

John Napier - fonte: wikipedia

História

- Em 1916, observando as propriedades envolvendo potências de mesma base:

$$a^n.a^m = a^{n+m}, \quad e \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},$$

  Napier definiu **logaritmo** de a na base b como o **expoente** x tal que $b^x = a$.

- Assim,

$$\log_b a = x \iff b^x = a$$

Elementos de um logaritmo

- Na sentença matemática $\log_b a = x$:
  - a é o logaritmando,
  - b é a base do logaritmo,
  - x é o logaritmo de a na base b.

- Exemplo: $\log_2 16$
  - 16 é o logaritmando,
  - 2 é a base do logaritmo,

Exemplos de cálculos de logaritmos

(a) $\log_2 16$ é o expoente x tal que $2^x = 16$

Assim, $2^x = 16 \iff 2^x = 2^4 \iff x = 4 \quad \therefore \quad \log_2 16 = 4$

(b) $\log_5 \frac{1}{25}$ é o expoente x tal que $5^x = \frac{1}{25}$

Assim, $5^x = \frac{1}{25} \iff 5^x = 5^{-2} \iff x = -2 \quad \therefore \quad \log_5 \frac{1}{25} = -2$

(c) $\log_3 1$ é o expoente x tal que $3^x = 1$

Assim, $3^x = 1 \iff 3^x = 3^0 \iff x = 0 \quad \therefore \quad \log_3 1 = 0$

(d) $\log_7 \sqrt[3]{49}$ é o expoente x tal que $7^x = \sqrt[3]{49}$

Assim, $7^x = \sqrt[3]{49} \iff 7^x = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}} \iff x = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad \log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$

Exercícios resolvidos

1. Calcular $\log_{81} 243$ $\log_{81} 243$ é o expoente x tal que $81^x = 243$

Assim, $81^x = 243 \iff (3^4)^x = 3^5 \iff 4x = 5 \quad \therefore \quad x = \frac{5}{4}$

2. Calcular $\log_{10} \sqrt[4]{\frac{1}{1000}}$

$\log_{10} \sqrt[4]{\frac{1}{1000}}$ é o expoente x tal que $10^x = \sqrt[4]{\frac{1}{1000}}$

Assim, $10^x = \sqrt[4]{\frac{1}{1000}} \iff 10^x = 1000^{-\frac{1}{4}} = (10^2)^{-\frac{1}{4}} = 10^{-\frac{1}{2}} \quad \therefore \quad x = -\frac{1}{2}$

Logaritmo decimal

- É o **logaritmo de base** 10. O logaritmo de a na base 10 é indicado simplesmente por $\log a$.

  - $\log \frac{1}{100} = x \iff 10^x = 10^{-2} \iff x = -2$
  - $\log 100000 = x \iff 10^x = 10^5 \iff x = 5$
  - $\log 0,000001 = x \iff 10^x = 10^{-6} \iff x = -6$

Propriedades dos logaritmos

Propriedades dos logaritmos

- Sejam a e b estritamente positivos (> 0) e $b \neq 1$. Valem as propriedades:

1. $\log_b b = 1$
2. $\log_b 1 = 0$, para todo $b > 0$ e $b \neq 1$
3. $\log_b a^y = y \log_b a$, para todo $y \in IR$
4. $\log_b b^x = x$
5. $b^{\log_b a} = a$

3. Sabendo-se que $\log_b a = 3$, calcular $\log_b a^5$:

Pela propriedade 3, $\log_b a^5 = 5.\log_b a$. Mas $\log_b a = 3$ e, portanto, $\log_b a^5 = 5.3 = 15$

4. Calcule o valor da expressão: $E = 3^{\log_3 5 + \log_6 6 - \log_8 1}$:

Pela propriedade 5, $3^{\log_3 5 = 5}$, pela propriedade 1 $\log_6 6 = 1$ e, pela propriedade 2, $\log_8 1 = 0$. Assim, $E = 5 + 1 - 0 = 6$

Outras propriedades

- Sejam a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$. Valem as propriedades:

6. $\log_b ac = \log_b a + log_b c$

7. $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - log_b c$

8. $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b} \quad \forall k, \quad k \in IR_+^*, \quad k \neq 1$

Material baseado nos livros:

Paiva, Manoel. Matemática, vol. único, 1^a ed., Moderna, 2005 - Cap. 11.

Obrigado

Perguntas?