PRG0039 Fundamentos da Matemática Elementar

Aula 6 - Números Complexos

Anarosa Brandão   Fernando Kurokawa

June 26, 2024

Números Complexos

Definição:

Representa-se por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, cuja forma algébrica é dada por:

$$z = x + yi, \text{ onde } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1$$

(i = unidade imaginária)

Isto é:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \ / \ x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\} \rightarrow \text{forma algébrica}$$

1) Sendo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, define-se:

$x = Re(z)$: parte real de z $\rightarrow$ $Re(3 + 2i) = 3$

$y = Im(z)$: parte imaginária de z $\rightarrow$ $Im(3 + 2i) = 2$

2) $z = x + yi \in \mathbb{C}$

$y = 0 \rightarrow z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$

$x = 0 \rightarrow z = 0 + yi = yi$ (imaginário puro)

3) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x = x + 0i \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{C}$

4) Igualdade de complexos

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

5) Potências da unidade imaginária

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i^4.i^2 = 1.i = i$

$i^6 = i^4.i^2 = 1.(-1) = -1$

$i^7 = i^4.i^3 = 1.(-i) = -i$

$i^8 = i^4.i^4 = 1.1 = 1$

$i^9 = i^5.i^4 = i.1 = i$

$3 \rightarrow$ resto da divisão de 243 por 4

$\rightarrow i^{243} = i^{4.60+3} = i^{4.60}.i^3 = (i^4)^{60}.i^3 = 1^{60}.i^3 = 1.i^3 = i^3 = -i$

Define-se:

Adição: $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Multiplicação: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$(a + bi) \cdot (c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

⇨ $$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Determine x e y $\in \mathbb{R}$ para que tenha:

(a) $(x + yi) \cdot (2 + 3i) = 1 + 8i$

$$(x + yi) \cdot (2 + 3i) = 1 + 8i$$
$$2x + 3xi + 2yi + 3yi^2 = 1 + 8i$$
$$2x - 3y + (3x + 2y)i = 1 + 8i \underset{\text{igualdade}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ (3x+2y) = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} 4x - 6y = 2 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases}$$
$$13x = 26$$

$$\therefore\ x = 2 \text{ e } y = 1$$

Definição:

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$

Define-se o conjugado de z, o qual denota-se por $\bar{z}$, como sendo $\bar{z} = x - yi$, isto é:

$$z = x + yi \Leftrightarrow \bar{z} = x - yi$$

Exemplos:

$$\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$$

$$\overline{1 - 4i} = 1 + 4i$$

$$\overline{3i} = 0 - 3i = -3i$$

Propriedades:

(1) $\overline{\overline{z}} = z$

(2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \ \forall\ z \in \mathbb{C}$

(3) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z), \ \forall\ z \in \mathbb{C}$

Propriedades:

(4) $z = \overline{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

(5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \ \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(6) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\ , \ \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi).(c-di)}{(c+di).(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)}{c^2-(di)^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\,i$$

Exemplo:

$$\frac{2+3i}{1+4i}$$

NORMA DE UM COMPLEXO

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Define-se a norma de z, a qual denota-se por N(z), como sendo um número real positivo dado por:

$$N(z) = \bar{z}.z = (x + yi).(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

Isto é:

$$N(z) = \bar{z}.z = x^2 + y^2$$

Exemplo:

$z = 3 + 5i \rightarrow N(z)?$

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$.

Define-se a módulo de z, o qual denota-se por $| z |$, como sendo o número real positivo dado por:

$$|z| = \sqrt{N(z)}$$

Obs: $z = x + yi$

$$|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Exemplo:

$z = 3 - 4i$

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM COMPLEXO

Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$