Física para Engenharia II

4320196 (FEP2196)
Turma 2011211 – Sala C2-13
3as – 15h00 / 5as – 9h20.

Prof. Antonio Domingues dos Santos
Depto. Física Materiais e Mecânica – IF – USP
Ed. Mário Schemberg, sala 205
adsantos@if.usp.br

Página do curso (Stoa -> Cursos -> IF -> Poli -> 4320196)
http://moodle.stoa.usp.br/course/view.php?id=722

Módulo 2 – Oscilações

- Oscilador harmônico.
- Oscilações amortecidas e forçadas.

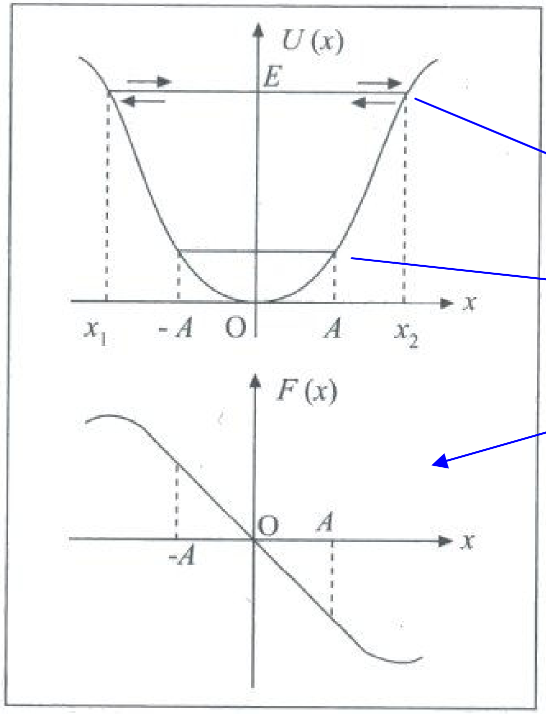
Bibliografia:

- Módulo 2 (Oscilações):
  - H. Moisés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, **vol. 2,** Capítulo 3 (Oscilador Harmônico) e Capítulo 4 (Oscilações Amortecidas e Forçadas).

O Oscilador Harmônico

Exemplos de sistemas mecânicos: pêndulos, diapasões, cordas em instrumentos musicais, colunas de ar em instrumentos de sopro, ...

Em sistemas elétricos: corrente alternada, filtros, sistemas de transmissão (rádio/video), ...



Em sistemas mecânicos, em poços de potencial, temos trajetórias oscilantes

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

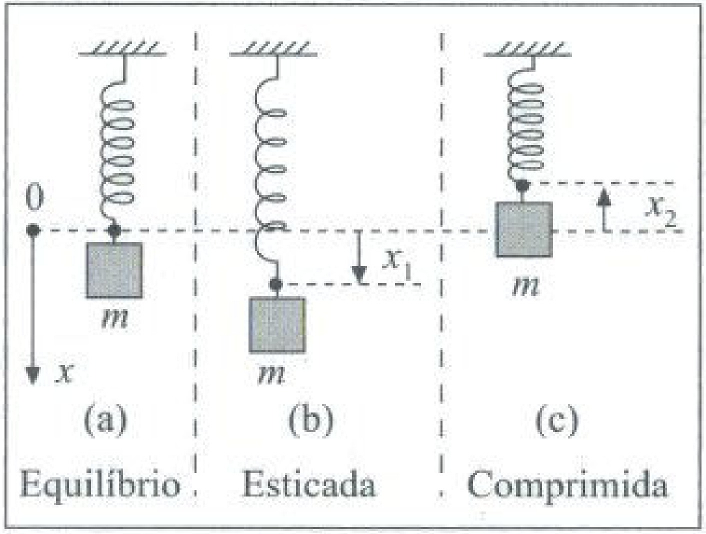
Para pequenas oscilações em torno do equilíbrio, a força é aproximadamente linear

$$\boxed{F(x) = -kx} \rightarrow \boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

A energia potencial é parabólica

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



Na condição de equilíbrio o peso do corpo m é compensado pela elongação da mola

($mg=kx_0$)

Considerando x como a elongação da mola em relação à condição de equilíbrio, temos a equação do movimento:

$$m\ddot{x} = F(x) = -kx$$

Dividindo a equação por m e definindo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Temos:

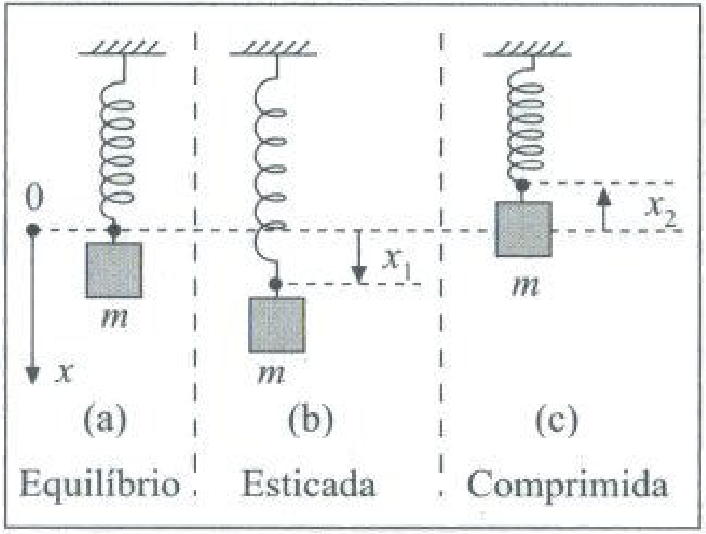
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Sistemas que têm esta equação como a equação do movimento, são chamados de Osciladores Harmônicos.

Qualquer sistema oscilante, para pequenas amplitudes de movimento pode ser considerado como um oscilador harmônico.

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Equações diferenciais podem ser resolvidas por métodos numéricos (computador).

Tomando-se Δt suficientemente pequeno,

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{dx}{dt}(t+\Delta t) - \frac{dx}{dt}(t)\right]$$

$$\frac{dx}{dt}(t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]$$

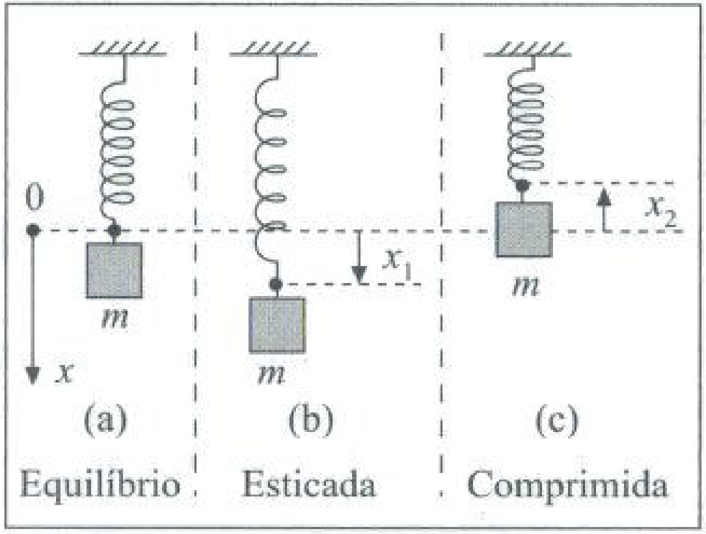
Para t=0 $\longrightarrow$ $$\frac{dx}{dt}(0) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[x(0+\Delta t) - x(0)\right]$$

$$v(0) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[x(\Delta t) - x(0)\right]$$

$$x(\Delta t) \approx x(0) + v(0)\Delta t$$

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Equações diferenciais podem ser resolvidas por métodos numéricos (computador).

Tomando-se Δt suficientemente pequeno,

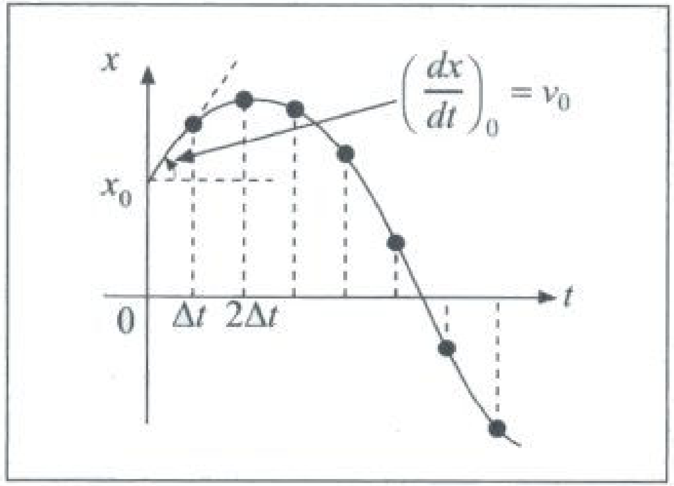
$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{dx}{dt}(t+\Delta t) - \frac{dx}{dt}(t)\right]$$

Para t=0 → $$\frac{d^2x}{dt^2}(0) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{dx}{dt}(0+\Delta t) - \frac{dx}{dt}(0)\right]$$

$$a(0) = -\omega^2 x(0) \approx \frac{1}{\Delta t}\left[v(\Delta t) - v(0)\right]$$

$$\begin{cases} v(\Delta t) \approx v(0) - \omega^2 x(0)\Delta t \\ x(\Delta t) \approx x(0) + v(0)\Delta t \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



O Oscilador Harmônico

Linearidade e Princípio da Superposição

Qualquer equação diferencial linear, tem as seguintes propriedades:

$$A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = 0$$

A, B, C são constantes que não dependem de x

i) Se $X_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, $x_1(t)+x_2(t)$ também é solução.

ii) Se X(t) é solução, ax(t) (a=constante) também é solução.

A combinação das duas regras fornece que:

$X(t)=Ax_1(t)+bx_2(t)$, com a e b constantes, também é solução (Combinação Linear).

Princípio da Superposição

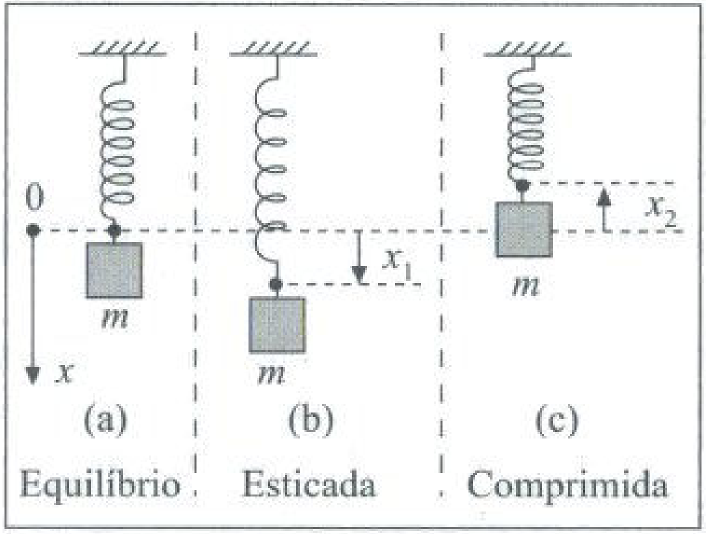
$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

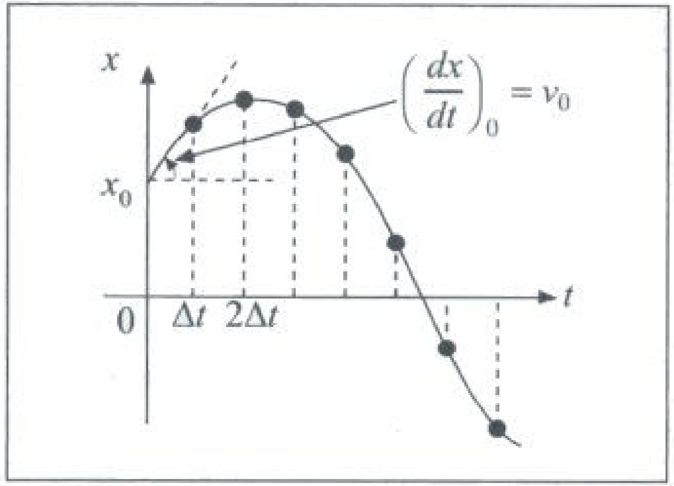
Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola





Parece uma solução do tipo senoidal

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Vamos supor que senos e cossenos sejam solução da equação diferencial do sistema massa.

$$x(t) = a\cos(\omega t) + bsen(\omega t)$$

ou

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

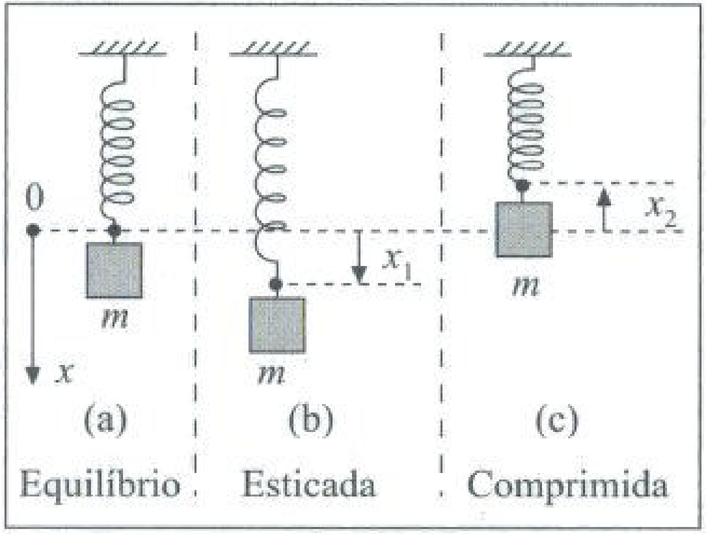
Com a, b, A e φ constantes

$$\begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = Asen(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b sen(\omega t) \qquad \begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = A sen(\varphi) \end{cases}$$

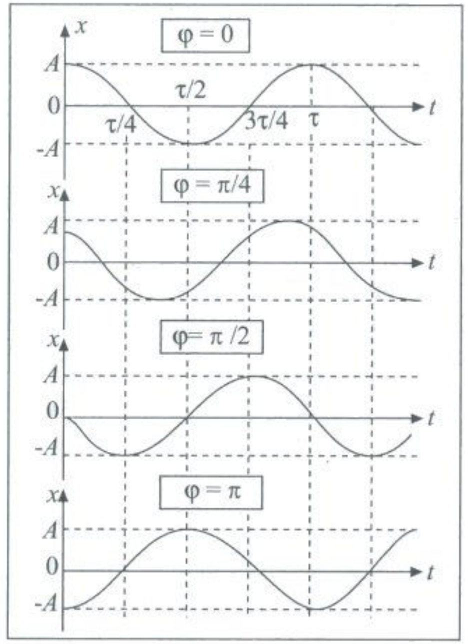
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$ frequência angular (rad/s)

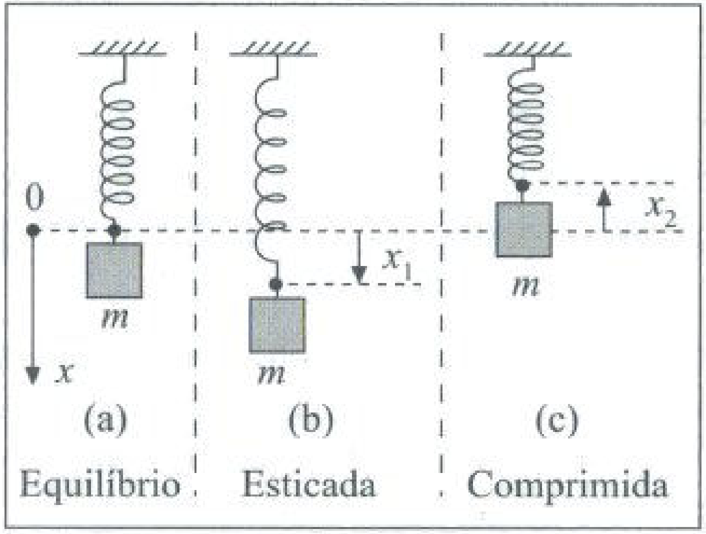
$$\omega t + \varphi = \theta$$ Fase do movimento (rad)

φ Fase inicial (rad)



O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b sen(\omega t) \qquad \begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = A sen(\varphi) \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Condições iniciais

$$x(0) = x_0 \longrightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(0) = v_0 \qquad x(0) = A\cos(\varphi) = x_0$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

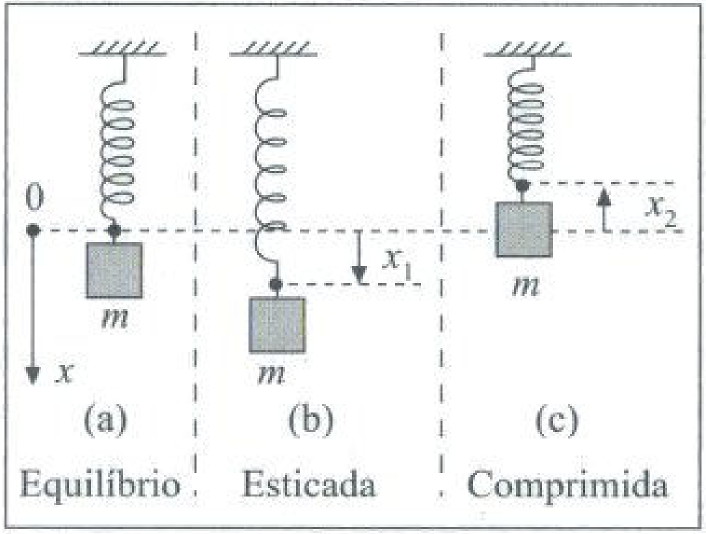
$$v(0) = -\omega A\cos(\varphi) = v_0$$

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = x_0 \\ -\omega A\sin(\varphi) = v_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x_0}{A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ x(t) = x_0\cos(\omega t) + \dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) \end{cases}$$

O Oscilador Harmônico

Sistema massa-mola



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Energia do oscilador harmônico

Energia Cinética

$$T(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Energia Potencial

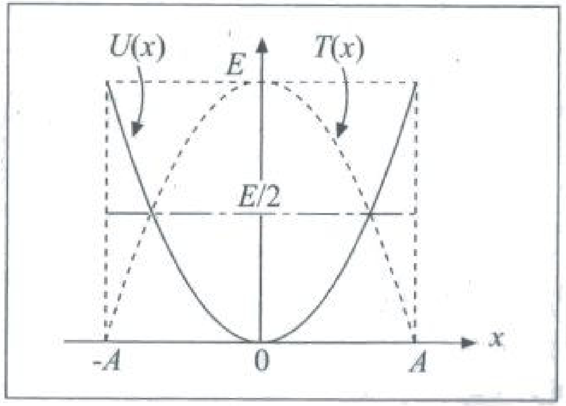
$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Energia Total

$$E = T(t) + U(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = const$$

$$T = E - U = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

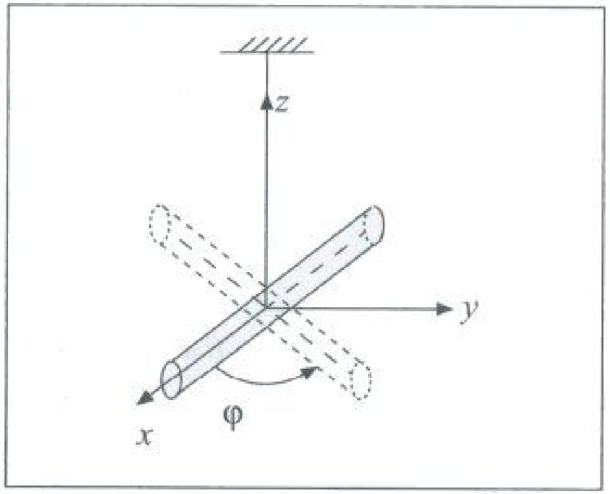
$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Pêndulo de Torção



O torque no fio será $\tau = -k\varphi$

Onde k é o coeficiente elástico de torção

Considerando-se I como o momento de inércia, temos:

$$\tau = I\alpha = I\ddot{\varphi}$$

Portanto: $I\ddot{\varphi} = -k\varphi$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{k}{I}\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

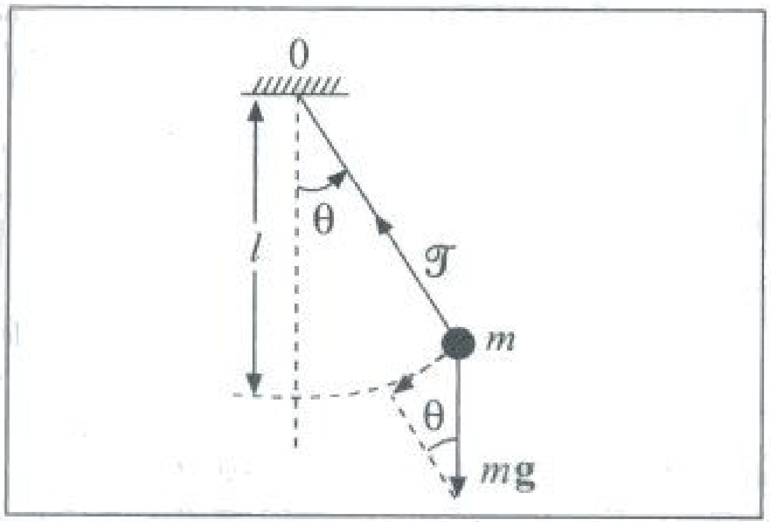
Solução:

$$\varphi(t) = A\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\varphi(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Pêndulo Simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Decompondo as forças em componentes angular e radial, temos:

$$ma_{cp} = mr\omega^2 = ml(\dot{\theta})^2 = \Im - mg\cos\theta$$

$$ma_\theta = mr\alpha = ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

A segunda equação descreve o movimento:

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

Para θ<<1 => sin θ= θ

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

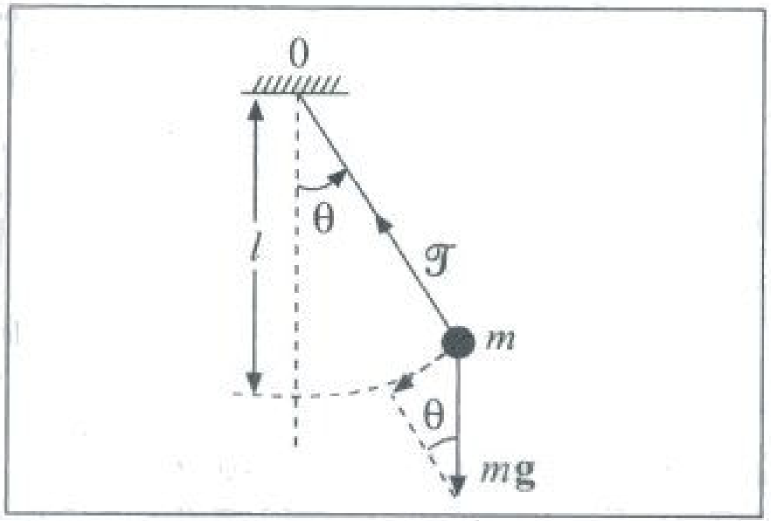
Solução:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\theta(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Pêndulo Simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Vamos reconsiderar o problema, sem a aproximação para pequenso ângulos.

Energia Cinética $T = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2$

Energia Potencial $U = -W_{0\to\theta} = mg\int_0^\theta \sin\theta \cdot l d\theta$

$$U = mgl(1-\cos\theta)$$

Energia Total $E = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 + mgl(1-\cos\theta)$

Em especial, nos pontos de retorno da oscilação, temos:

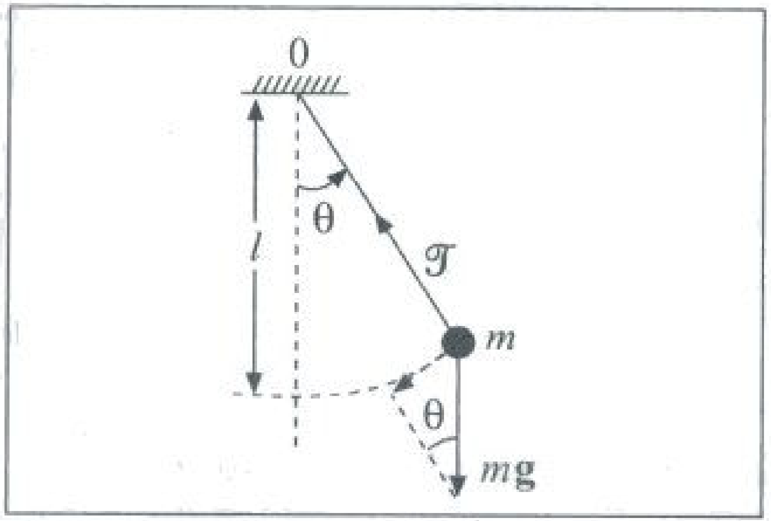
$$E = mgl(1-\cos\theta_0)$$

$$0 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta})^2 + mgl(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Pêndulo Simples



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Energia Cinética

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

Integrando no semi-ciclo positivo, temos:

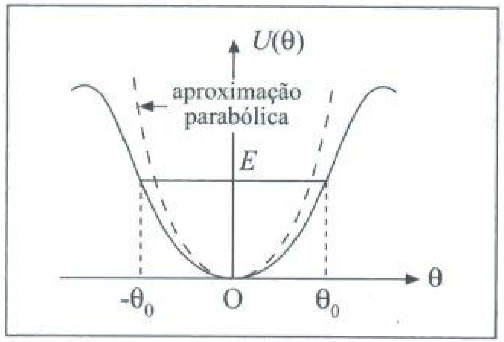
$$\int_{t_0}^{t_0+T/2} dt = \frac{T}{2} = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

A integral da direita é uma integral elíptica, sem solução analítica.

Mas, em segunda aproximação, pode-se obter:

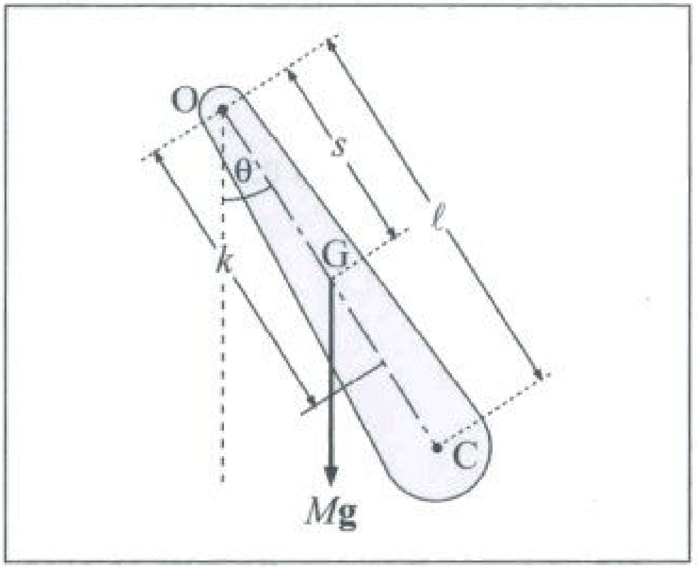
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2\right)$$

Nesta condição, o período depende da amplitude do movimento !!!



O Oscilador Harmônico - exemplos

Pêndulo Físico



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

O torque no pendulo será

$$\tau = -Mgs\sin\theta$$

Considerando-se I como o momento de inércia, temos:

$$\tau = I\alpha = I\ddot{\theta} = -Mgs\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgs}{I}\sin\theta$$

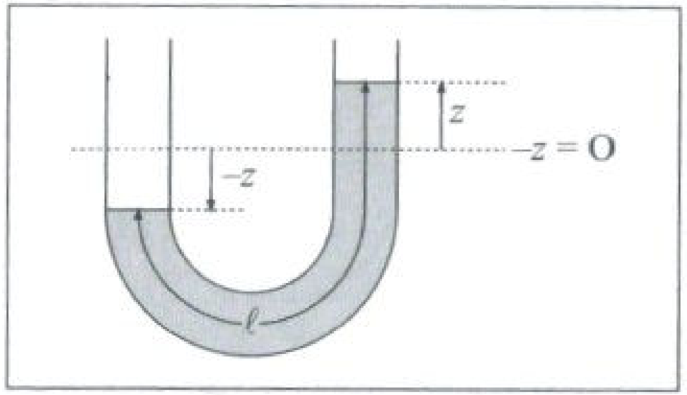
Igual ao pendulo simples, mas com :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = \frac{I}{Ms}$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Líquido num tubo em U



Vamos olhar para o problema, a partir das energias:

Energia Potencial $U(z) = mgz = \rho Az \cdot gz = \rho Agz^2$

Energia Cinética $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\rho Al\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$

Comparando-se com as expressões para um sistema massa-mola,

$$U(z) = \frac{1}{2}kz^2 \longrightarrow \left.\begin{array}{l} k = 2\rho Ag \\ M = \rho Al \end{array}\right\}$$

Massa total de líquido (M=ρAl)

Posição de equilíbrio z=0 => U=0

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ temos: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\rho Ag}{\rho Al}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$

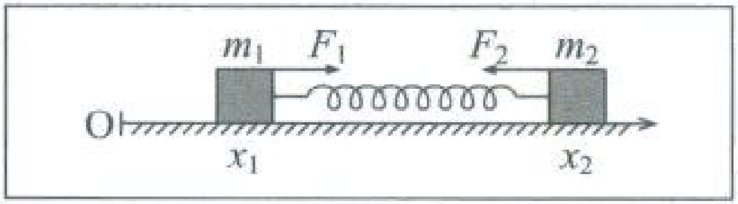
Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

Portanto, o líquido oscila com uma frequência definida por metade do comprimento da coluna de líquido.

O Oscilador Harmônico - exemplos

Duas partículas acopladas



Seja l o comprimento de equilíbrio da mola.

A deformação da mola será $x=(x_2-x_1)-l$

As forças restauradoras são $F_1= kx=-F_2$

$M=m_1+m_2$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

As equações do movimento são:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = kx \\ m_2\ddot{x}_2 = -kx \end{cases}$$

Para o centro de massa, temos:

$$\begin{cases} X_{cm} = (m_1x_1 + m_2x_2)/M \\ \dot{X}_{cm} = V_{cm} = const. \\ \ddot{X}_{cm} = 0 \end{cases}$$

Para o movimento interno, temos:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = kx \\ m_2\ddot{x}_2 = -kx \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2m_1\ddot{x}_1 = m_2kx \\ m_1m_2\ddot{x}_2 = -m_1kx \end{cases}$$

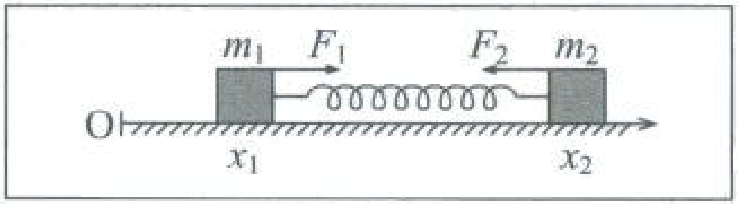
$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \qquad m_1m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(m_1 + m_2)kx$$

$$\mu\ddot{x} = -kx \quad \text{com} \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Portanto, as massas oscilam em relação ao centro de massa, com frequência $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Duas partículas acopladas



Seja l o comprimento de equilíbrio da mola.

A deformação da mola será $x=(x_2-x_1)-l$

As forças restauradoras são $F_1= kx=-F_2$

$M=m_1+m_2$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

A energia total do sistema é: $E = E_{cm} + E_{\text{int}}$

Para o centro de massa, temos: $E_{cm} = T_{cm} = \frac{1}{2}MV^2$

Para o movimento interno, temos: $E_{\text{int}} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\left(T_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2\right) = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2\right)$$

$$com \rightarrow v'_{1(2)} = -(+)\frac{m_{2(1)}}{M}\dot{x}$$

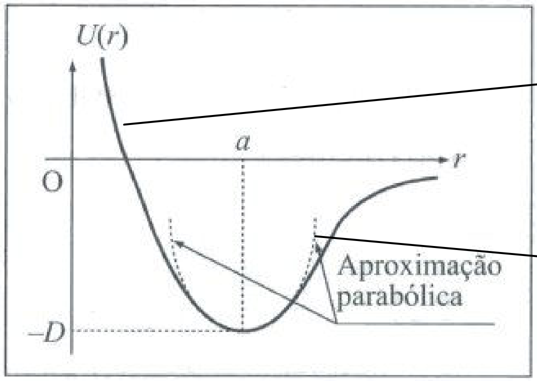
$$\mu\ddot{x} = -kx \quad \text{com} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Portanto, as massas oscilam em relação ao centro de massa, com frequência

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

O Oscilador Harmônico - exemplos

Molécula Diatômica



A energia potencial de interação é dada por:

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

Molécula constituída por dois átomos com a distância de equilíbrio (a) e energia de ligação (D)

Para pequenos movimentos em torno do equilíbrio (x=r-a), podemos fazer a aproximação:

$$U(r) \approx -D + \frac{1}{2}k(r-a)^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=a}$$

$$k = \frac{12D}{a^2}\left[13\left(\frac{a}{r}\right)^{14} - 7\left(\frac{a}{r}\right)^{8}\right]_{r=a}$$

$$k = \frac{72D}{a^2}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$\mu\ddot{x} = -kx$$ com $$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Portanto, a molécula oscila em relação ao centro de massa, com frequência

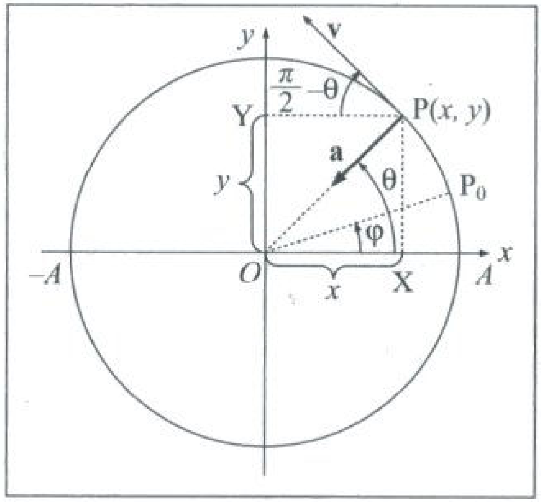
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Para uma molécula de CO, a~1,1x10^{-10}m e a energia de dissociação é D=10eV. m(C)= 2x10^{-26}kg e m(O)=2,7x10^{-26}kg.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \sim 1,4x10^{14}\,Hz \Longrightarrow \lambda = \frac{c}{f} \sim 2\,\mu m \rightarrow infravermelho$$

MHS e MCU

MCU



No MCU, o círculo é descrito pelo ângulo de fase θ

$$\theta = \omega t + \varphi$$

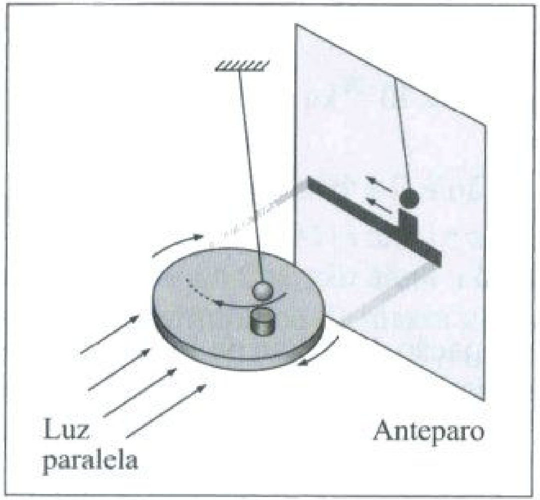
O MHS pode ser visto como a projeção numa dada direção, do MCU.

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \varphi)$$

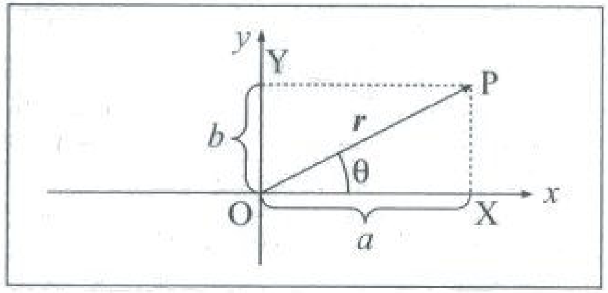
$$v_x = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \dot{x}$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x = \ddot{x}$$

MCU => MHS



Números Complexos



$$\overline{OP} = a\hat{x} + b\hat{y}$$

Substituindo

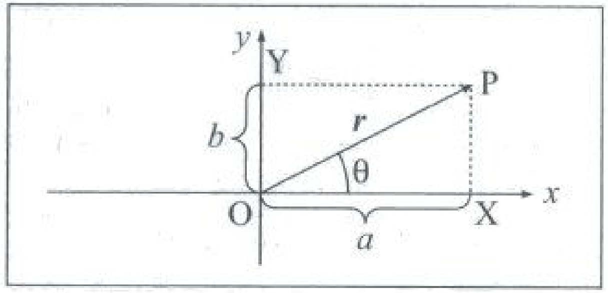
$\hat{x} \to 1$ e

$$\hat{y} \to i \Rightarrow (i = \sqrt{-1})$$

O ponto P será $\Rightarrow$ $z = a + ib$ z é complexo

MHS e MCU

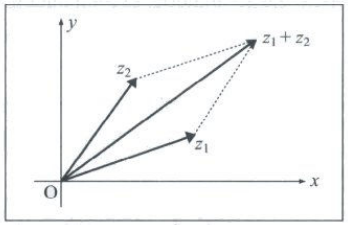
Números Complexos



$$z = a + ib \quad \begin{cases} a = Re\{z\} \\ b = Im\{z\} \end{cases}$$

Soma de complexos

$$z = z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id)$$
$$z = (a + c) + i(b + d)$$

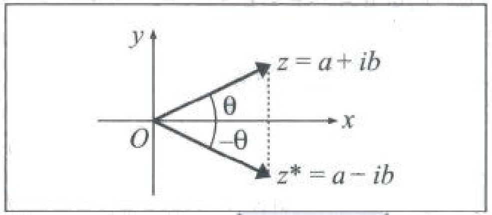


Produto de complexos

$$z = z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$$
$$z = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Complexo conjugado

$$z^* = (a - ib)$$



Módulo de um complexo

$$|z|^2 = zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Quociente de complexos

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + ib)}{(c + id)}$$

$$z = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)}$$

$$z = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + i\frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

MHS e MCU

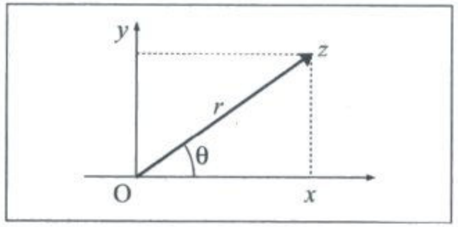
A fórmula de Euler (1748)

$$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$$

$$\begin{cases} Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*) \\ Im\{z\} = \frac{1}{2i}(z - z^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Re\{e^{ix}\} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = cos(x) \\ Im\{e^{ix}\} = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = sin(x) \end{cases}$$

Coordenadas polares



$$\begin{matrix} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \end{matrix}$$

$$z = x + iy = r(cos\theta + isin\theta) = re^{i\theta}$$

Identidade de Euler: $e^{i\pi} = -1$!!!

MHS e MCU

Aplicação ao MHS

$$\ddot{z} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

$$z(t) = e^{pt}$$

Com p complexo

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = p\frac{dz}{dt} = p^2 z$$

$$\therefore p^2 = -\omega^2$$

$$\therefore p = \pm\sqrt{-1}\omega = \pm i\omega$$

$$z(t) = Ce^{i\omega t}$$

Sendo C, uma constante complexa

Escrevendo C na forma polar, temos $C = Ae^{i\varphi}$

e

$$z(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

Tomando-se a parte real de z, temos a solução real da equação diferencial

$$x = Re\{z(t)\} = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dz}{dt} = i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)} \longleftarrow e^{i\pi/2} = i$$

$$\dot{x} = Re\{\frac{dz}{dt}\} = -\omega Asin(\omega t + \varphi)$$

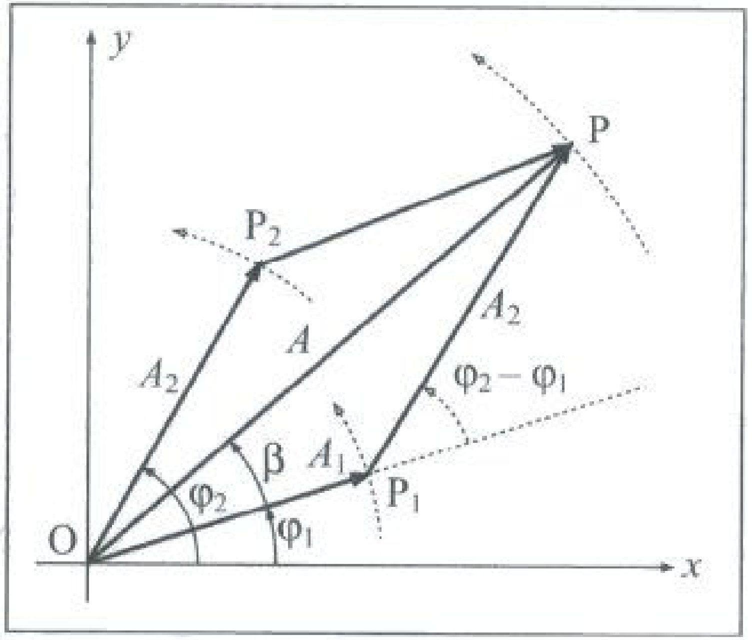
Superposição de MHS

Mesma frequência e direção

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$$



Aplicando-se a lei dos cossenos e dos senos, temos:

$$\begin{cases} A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \dfrac{A_2}{\sin\beta} = \dfrac{A}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{cases}$$

Assim, o resultado fica:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)$$

Alternativamente, poderíamos escrever:

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) =$$

$$= A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} =$$

$$= e^{i(\omega t + \varphi_1)}[A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}]$$

com $Ae^{i\beta} = A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}$

Superposição de MHS

Frequências diferentes

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$$

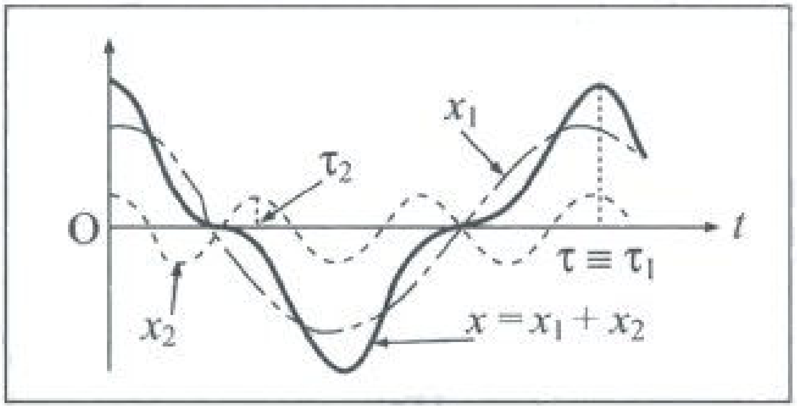
$$com \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

Como regra geral, o movimento dado por x(t) não será periódico.

Exceto, se houver um período τ, em que x_1 e x_2 voltem simultaneamente ao valor inicial.

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 \tau &= 2 n_1 \pi \\ \omega_2 \tau &= 2 n_2 \pi \end{aligned}\right\} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

$$n_1 \tau_1 = n_2 \tau_2 = \tau$$



Superposição de MHS

Frequências diferentes

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = ?$$

$$com \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$\rightarrow A_1 = A_2 = A$$

$$\rightarrow \omega_1 \simeq \omega_2$$

Supondo que é possível se escrever:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= a + b \\ \omega_2 &= a - b \end{aligned}\right\}$$

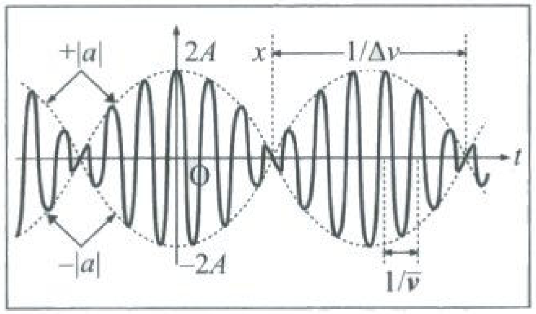
$$a = (\omega_1 + \omega_2)/2 = \bar{\omega}$$

$$b = (\omega_1 - \omega_2)/2 = (\Delta\omega)/2$$

$$x(t) = A\left\{\cos(\bar{\omega}t + \frac{\Delta\omega}{2}t) + \cos(\bar{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}t)\right\}$$

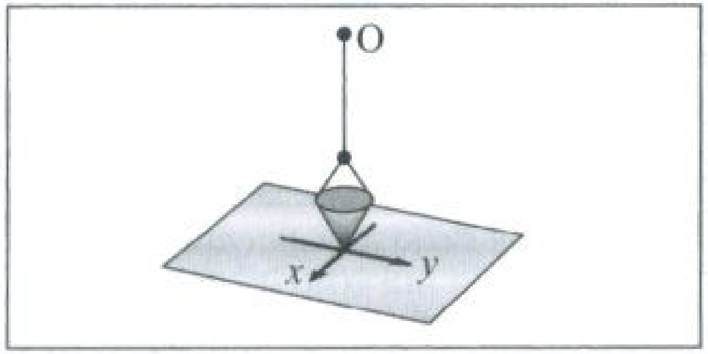
$$x(t) = 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\bar{\omega}t)$$

=> Batimento !



Superposição de MHS

Mesma frequência e direções perpendiculares



Potencial Central: a Força é proporcional à distância ao centro de equilíbrio.

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$$

com $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Podemos considerar o movimento independe de cada coordenada:

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x} = -\omega^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \varphi_2)\end{array}$$

Adotando-se: $\left\{\begin{array}{l}\varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \varphi)\end{array}\right.$$

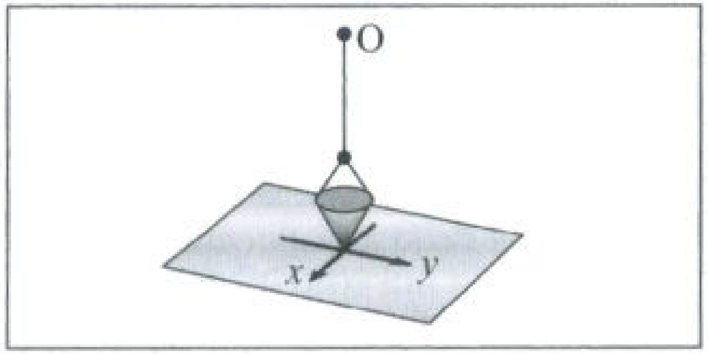
$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi =$$

$$= \frac{x}{A}\cos\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\varphi$$

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

Superposição de MHS

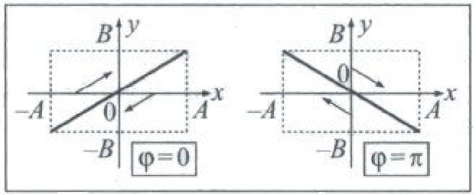
Mesma frequência e direções perpendiculares



Potencial Central: a Força é proporcional à distância ao centro de equilíbrio.

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}\cos\varphi=\sin^2\varphi$$

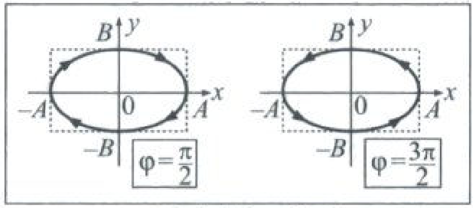
Para casos particulares de defasagem entre as componentes, temos:



Trajetórias lineares

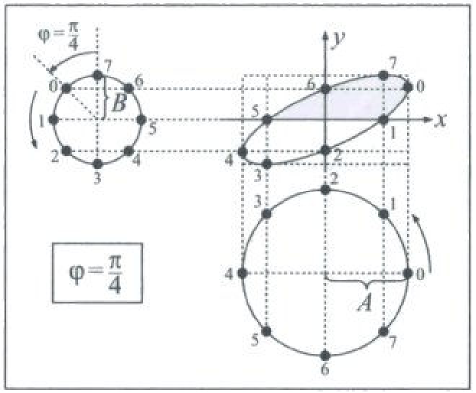
$\varphi=0$ $\quad y=(B/A)x$

$\varphi=\pi$ $\quad y=-(B/A)x$



Trajetórias elípticas

$$\left.\begin{array}{l}\varphi=\dfrac{\pi}{2}\\[2ex]\varphi=\dfrac{3\pi}{2}\end{array}\right\}\quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$$



$$\varphi=\frac{\pi}{4}$$

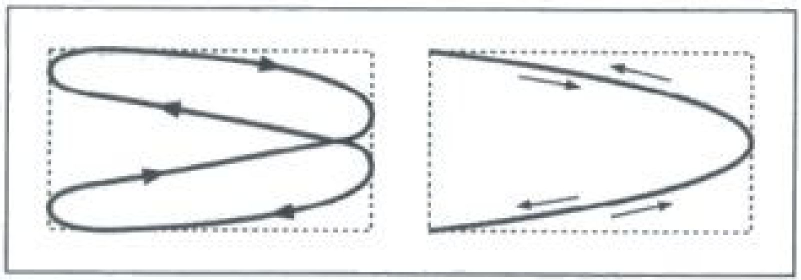
Superposição de MHS

Frequências diferentes e direções perpendiculares

Para :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Figuras fechadas



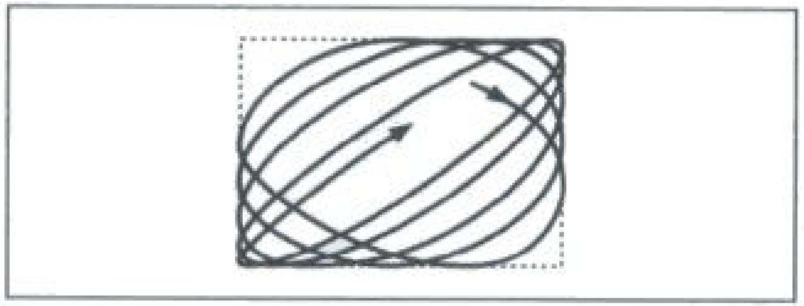
Curvas de Lissajous

Figuras de Lissajous

$$\omega_1 = 2\omega_2$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{n_1}{n_2}$$

Figuras abertas



Períodos incomensuráveis