Física para Engenharia II

4320196 (FEP2196)

Turma 2011211 – Sala C2-13

3as – 15h00 / 5as – 9h20.

Prof. Antonio Domingues dos Santos

Depto. Física Materiais e Mecânica – IF – USP

Ed. Mário Schemberg, sala 205

adsantos@if.usp.br

Página do curso (Stoa -> Cursos -> IF -> Poli -> 4320196)

http://moodle.stoa.usp.br/course/view.php?id=722

Módulo 2 – Oscilações

- Oscilador harmônico.
- Oscilações amortecidas e forçadas.

Bibliografia:

- Módulo 2 (Oscilações):
  - H. Moisés Nussenzveig, *Curso de Física Básica*, **vol. 2,** Capítulo 3 (Oscilador Harmônico) e Capítulo 4 (Oscilações Amortecidas e Forçadas).

O Oscilador Harmônico Amortecido

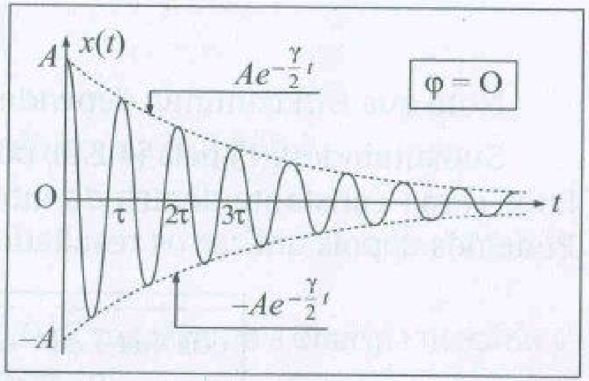


Figura 4.1 — Oscilações amortecidas

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$Q = 2\pi\left(\frac{energ.armaz}{energ.dissip.}\right) = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(ae^{\beta t} + be^{-\beta t})$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma\dot{x}$$

Equação diferencial de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m}$$

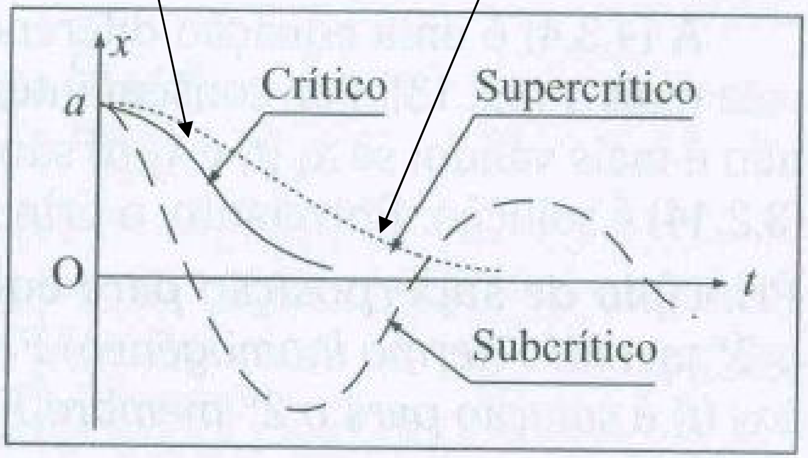


Figura 4.5 — Comparação de amortecimentos

O Oscilador Harmônico Forçado

Solução estacionária

Sistema submetido a uma força oscilante

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Equação diferencial inomogênea de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Solução = solução homogênea + uma solução específica da inomogênea

$$z_h(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

O Oscilador Harmônico Forçado

Solução estacionária

Sistema submetido a uma força oscilante

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Equação diferencial inomogênea de 2ª ordem para x(t)

(envolve a derivada segunda)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

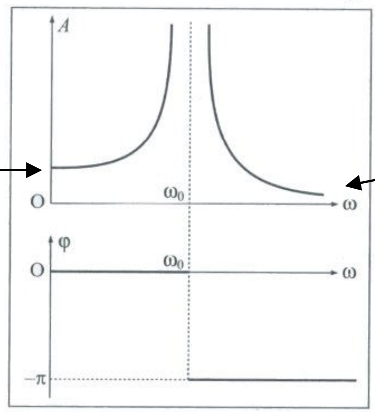
Solução específica da inomogênea

$$z(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

$$Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m\left|\omega_0^2 - \omega^2\right|} \\ \varphi = 0 (p/\omega < \omega_0) \\ \varphi = -\pi (p/\omega > \omega_0) \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{F_0}{m\omega_0^2}$$



$$\left| -\frac{F_0}{m\omega^2} \right|$$

O Oscilador Harmônico Forçado

Condições iniciais

x(0)=0 e v(0)=0

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Solução específica da inomogênea

$$\begin{cases} x(0) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + B\cos(\varphi) = 0 \\ \dot{x}(0) = -\omega_0 B \sin(\varphi) = 0 \end{cases}$$

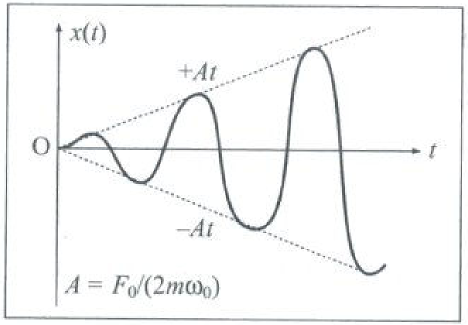
$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ B = -\dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t) + \\ + B\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)}\left[\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega_0 - \omega}\right]$$

$$x(t) = -\frac{F_0}{m(\omega_0 + \omega)}\left[-t\sin(\omega_0 t)\right]$$

Para $\omega = \omega_0$ $\quad x(t) = \dfrac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$



O Oscilador Harmônico Amortecido Forçado

Solução estacionária

Sistema submetido a uma força oscilante

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

$$(\omega_0^2 + i\gamma\omega - \omega^2) z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} = Ae^{i\varphi}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Equação diferencial inomogênea de 2ª ordem para x(t)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

$$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Solução estacionária !!!

O Oscilador Harmônico Amortecido Forçado - Ressonância

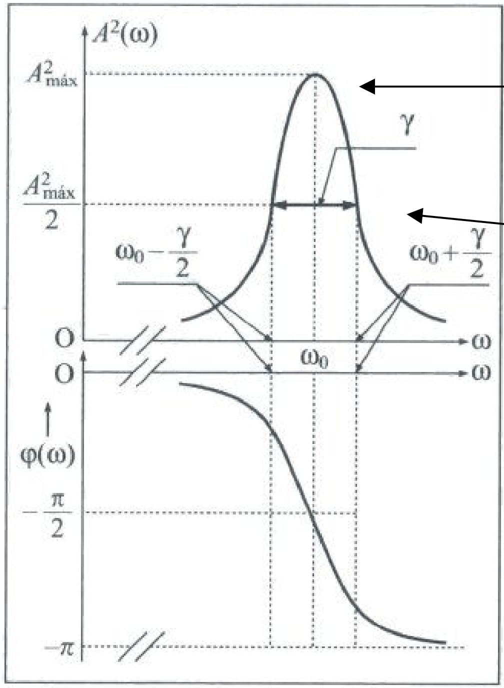
Para amortecimento fraco

$$\gamma << \omega_0$$

e para $\quad |\omega - \omega_0| << \omega_0$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$



$$A_{\max} = \frac{F_0}{m\omega_0\gamma}$$

$$\Delta\omega = \gamma$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{4\omega_0^2(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2\omega_0^2}}$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{\gamma\omega_0}{2\omega_0(\omega_0 - \omega)}\right)$$

$$\frac{A_{\max}}{A(0)} = \frac{\omega_0}{\gamma} = Q$$

O Oscilador Harmônico Amortecido Forçado - Ressonância

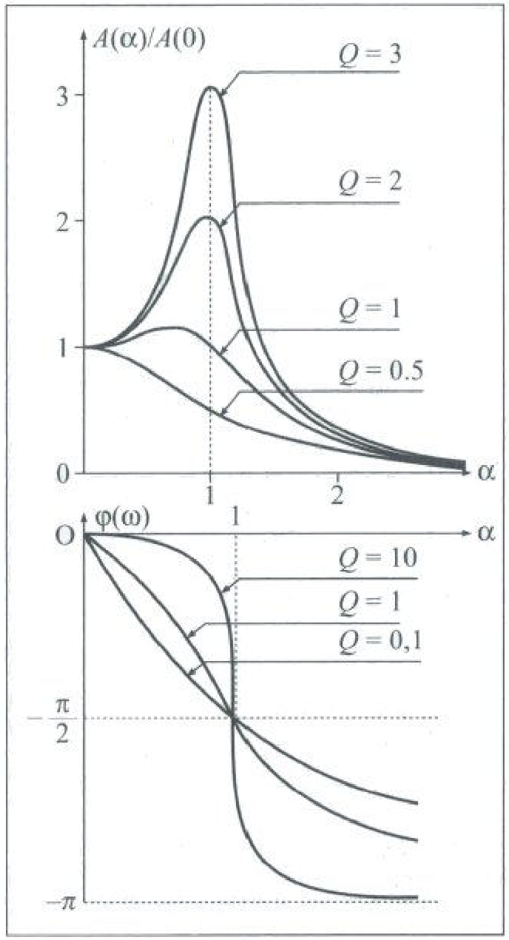
Para amortecimento forte

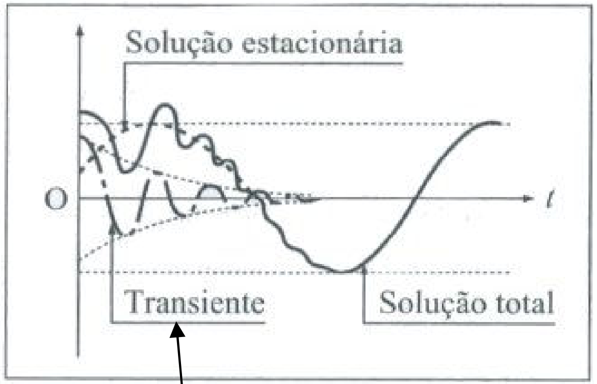
Q é baixo.

Usando $\alpha = \omega / \omega_0$

$$\frac{A(\alpha)}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(1_0 - \omega\alpha^2)^2 + \alpha^2 / Q^2}}$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{\alpha / Q}{1-\alpha^2)}\right)$$





$$x_0(t) = Be^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

O Oscilador Harmônico Amortecido Forçado - Balanço de Energia

Energia Mecânica de um sistema é dada por

$$E = T(t) + U(t) =$$
$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} kx^2(t)$$

A sua taxa de variação é

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) =$$
$$= \dot{x}(-m\gamma\dot{x} + F(t)) =$$
$$-m\gamma\dot{x}^2 + P(t))$$

Onde P é potência fornecida pela força externa e o primeiro termo é a potência dissipada.

No regime estacionário:

$$x(t) = A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$
$$P(t) = -\omega F_0 A \cos[\omega t]\sin[\omega t + \varphi]$$

com: $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$k = m\omega_0^2$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) =$$
$$= m(\omega_0^2 - \omega^2)x\dot{x} =$$
$$= m(\omega^2 - \omega_0^2)A^2 x\cos[\omega t + \varphi]\sin[\omega t + \varphi]$$

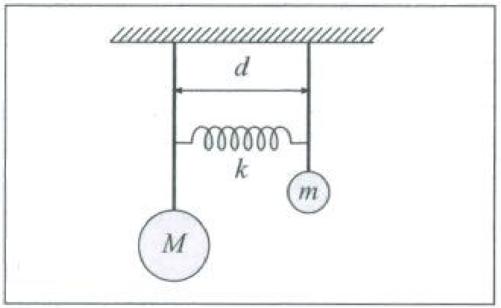
$\overline{\frac{dE}{dt}} = 0$ e $\overline{P} = m\gamma\overline{\dot{x}^2}$

$$\overline{P} = m\gamma\overline{\dot{x}^2} = m\gamma\frac{1}{2}\omega^2 A^2 = \frac{\gamma F_0^2\omega^2}{2m\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right)}$$

Potência média fornecida pela força externa é igual a potência média dissipada.

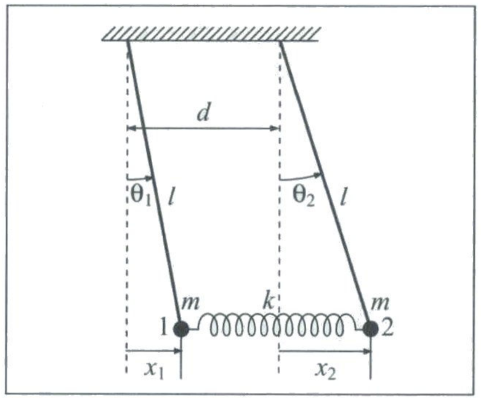
$$\overline{P(\omega_0)} = \overline{P_{\max}} = Q\frac{F_0^2}{2m\omega_0}$$

Oscilações Acopladas
Pêndulos acoplados



Para pêndulos idênticos, temos:

$$\omega_0 = g / l$$



Para ângulos pequenos, podemos considerar a componente tangencial do peso, como horizontal.

$$mg \sin\theta \approx mgx / l = m\omega_0^2 x$$

Para cada pêndulo temos:

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Usando: $K = k / m$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = K(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -K(x_2 - x_1)$$

Somando e subtraindo temos:

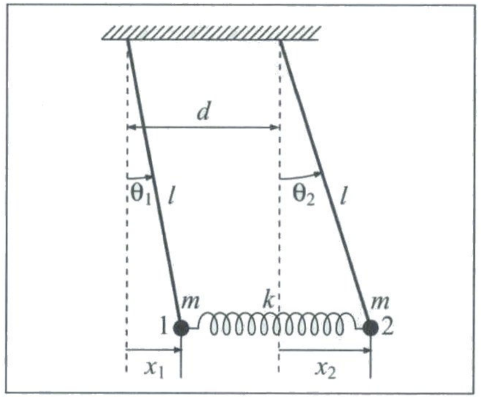
$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = 0$$

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 - x_2) = 2K(x_2 - x_1)$$

Oscilações Acopladas
Pêndulos acoplados

Para pêndulos idênticos, temos:

$$\omega_0 = g / l$$



$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) = 0$$

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_0^2 (x_1 - x_2) = 2K(x_2 - x_1)$$

Vamos usar:
$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ q_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Temos duas equações desacopladas:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \end{cases}$$

com: $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$

As soluções são:

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

E, para as variáveis x:

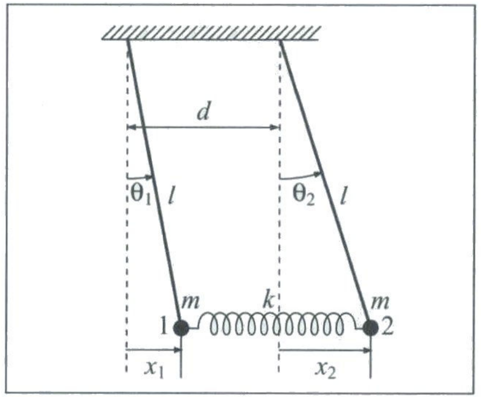
$$\begin{cases} x_1 = (q_1 + q_2) \\ x_2 = (q_1 - q_2) \end{cases}$$

Não são oscilações harmônicas:

Oscilações Acopladas
Pêndulos acoplados

Para pêndulos idênticos, temos:

$$\omega_0 = g/l$$



$$\begin{cases} x_1 = (q_1 + q_2) \\ x_2 = (q_1 - q_2) \end{cases}$$

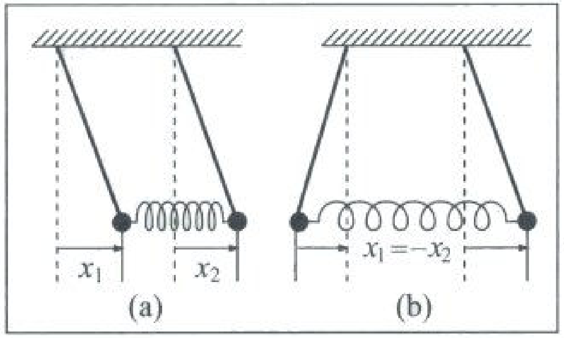
$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Se $A_1 = 0$:

$$x_1(t) = q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) = x_2(t)$$

$$x_1(t) = q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = -x_2(t)$$

Se $A_2 = 0$:



Modos simétricos e anti-simétricos:

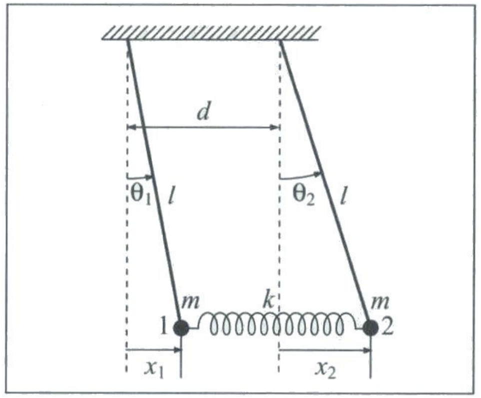
$$\begin{cases} x_{1_0} = x_{2_0} \\ \dot{x}_{1_0} = \dot{x}_{2_0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1_0} = -x_{2_0} \\ \dot{x}_{1_0} = -\dot{x}_{2_0} \end{cases}$$

Oscilações Acopladas
Pêndulos acoplados

considerando: $\begin{cases} x_{1_0} = a \\ x_{2_0} = 0 \\ \dot{x}_{1_0} = \dot{x}_{2_0} = 0 \end{cases}$

Para pêndulos idênticos, temos:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}$$



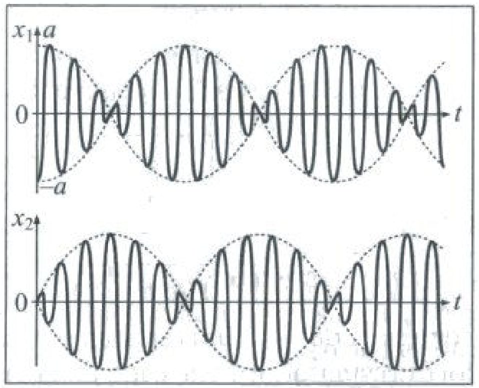
$$\begin{cases} x_1 = (q_1 + q_2) \\ x_2 = (q_1 - q_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{a}{2}[\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) = \dfrac{a}{2}[\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

Que pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\cos(\dfrac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\overline{\omega}t) \\ x_2(t) = a\sin(\dfrac{\Delta\omega}{2}t)\sin(\overline{\omega}t) \end{cases}$$



Batimentos