Trabalho 3 - SMA0169 - EDP - 21.06.2024

Resolva as seguintes questões e entregue a resolução de ao menos duas delas até segunda-feira 24/06 às 8:10.

1. Seja $B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$. Resolva o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1^+ \\ u(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x,y) = y^3 & x^2 + y^2 = 1, y > 0 \end{cases}$$

   Dica: Use o princípio da reflexão de Schwarz e a identidade

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta).$$

   Uma forma alternativa de resolver explora o fato de que o dado de fronteira no semicírculo é um polinômio de terceiro grau. Agora, o Exercício 9 da Lista 10 caracteriza os polinômios harmônicos homogêneos de terceiro grau.

2. Seja u uma função harmônica em num conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e contínua em $\overline{\Omega}$. Seja (x_0, y_0) um ponto de Ω onde $u(x_0, y_0) = 2$. Seja E_1 o conjunto dado por

$$E_1 = \{(x,y) \in \Omega : u(x,y) \geq 1\}.$$

   Mostre que a fronteira ∂E_1 não pode ser uma curva fechada contida em Ω.

   Dica: use o princípio do máximo.

3. Sejam $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

   Seja $u \in C^2(B_1) \cap C^0(\overline{B_1})$ uma função satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u = \sin(u) & \text{em } B_1 \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

   e $|u(x,y)| < \pi$ para todo $(x,y) \in B_1$. Mostre que $u \equiv 0$.

4. (Problema de Neumann e o princípio da reflexão de Schwarz).

   (a) Sejam $B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ e $u \in C^2(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ uma função harmônica em B_1^+ tal que $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$. Demonstre que a função

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

   obtida de u pela reflexão par em relação ao eixo x, é harmônica em B_1.

(b) Seja u a solução do problama misto no semicírculo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } B_1 \\ u(x,y) = x^2 & \text{sobre } \partial B_1,\ y > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcule $u(0,0)$.

5. (Versão do teorema de Liouville). Seja u harmônica em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x)|^2 dx < +\infty.$$

Mostre que u é constante.

Dica: Exercício 8 da Lista 10.