UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos
Resposta em Frequência de Sistemas Dinâmicos

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar e discutir o conceito de resposta em frequência de sistemas dinâmicos, com especial ênfase nos sistemas de primeira e segunda ordem.

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

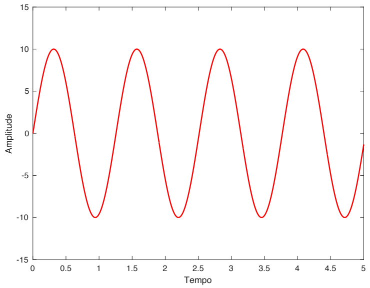
Considerações Preliminares

A resposta em frequência de um sistema dinâmico linear é uma grandeza de fundamental importância no estudo das propriedades do sistema. Para iniciarmos o estudo consideramos o cenário abaixo

$$\underset{q_i(t)}{\text{Entrada}} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{SISTEMA}\\ \text{H(s), h(t)}\end{matrix}} \longrightarrow \underset{q_o(t)}{\text{Saída}}$$

onde, para o presente estudo consideramos um tipo particular de entrada, a chamada entrada senoidal ou harmônica, ***considerando nulas as condições inicias do sistema***

$$q_i(t) = q_{ih}\text{sen}\omega t \quad \Rightarrow$$



onde q_{ih} é a amplitude da entrada e ω é a frequência da entrada senoidal

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Observação: a entrada harmônica pode ser escrita de, pelo menos duas outras formas a saber

$$q_i(t) = q_{ih}\cos\omega t$$

$$q_i(t) = q_{ih}e^{i\omega t}$$

sendo esta última denominada entrada harmônica exponencial complexa. Como o sistema é linear, *a saída obrigatoriamente apresentará a mesma variação temporal da entrada*, e mais importante, *na mesma frequência*. Logo podemos expressar a saída de forma geral como

$$q_o(t) = q_{oh}\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

onde q_{oh} representa a ***amplitude*** da saída e ϕ um ***ângulo de fase***. Passaremos agora a estudar estas grandezas individualmente para os sistemas de primeira e segunda ordem.

Resposta de um sistema de primeira ordem à entrada senoidal

Neste caso, lembremos a forma geral de um sistema de primeira ordem:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_i$$

Para uma entrada senoidal podemos escrever

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sen}(\omega t)\right\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ih} \mathrm{sen}(\omega t)$$

Usando a T.L. considerando nulas as condições iniciais temos para a solução de regime permanente na variável de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}\right\} = \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$$

$$Q_o(s) = \mathbb{K} q_{ih} \frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(\tau s+1\right)}$$

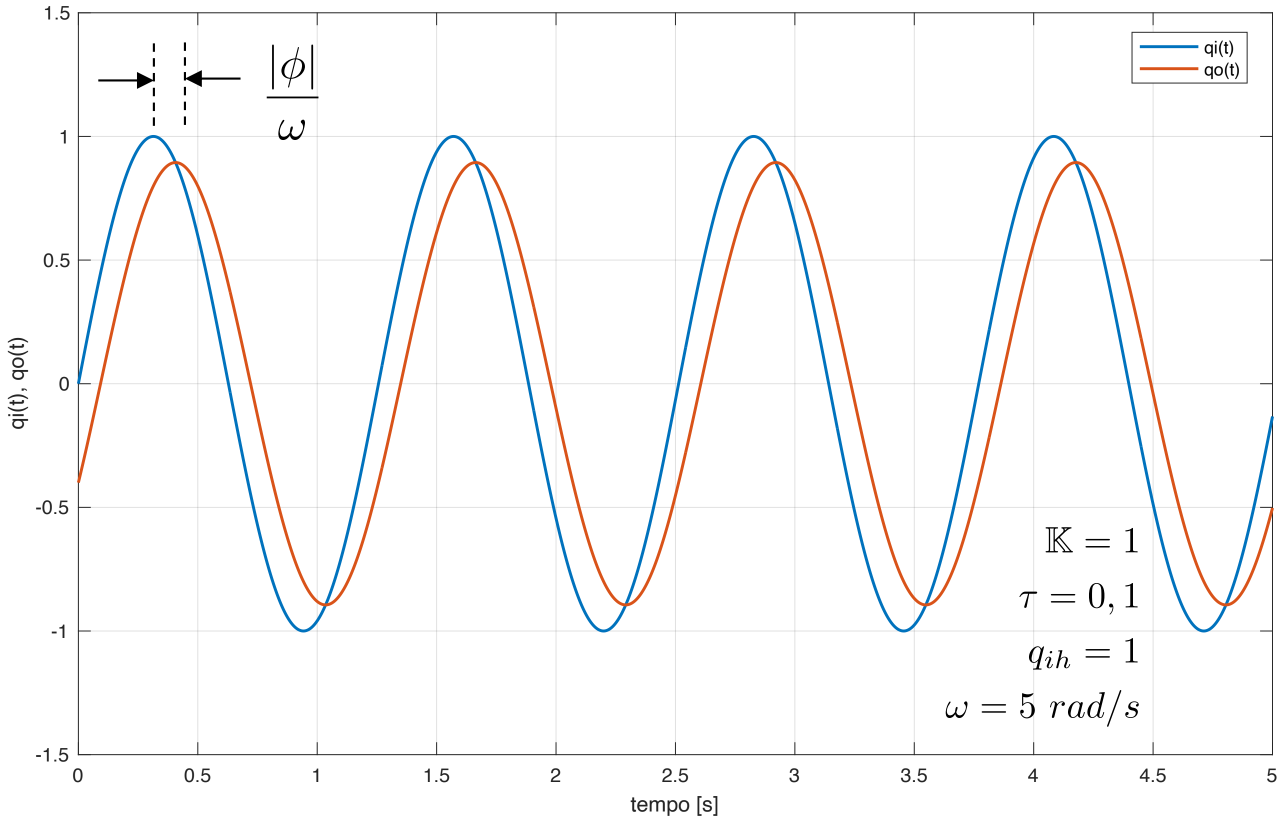
e a solução no domínio do tempo é obtida através da transformada inversa de Laplace

Cont. ...

E, então, a resposta de regime permanente, comumente denominada de resposta senoidal ou harmônica é dada por

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K} q_{ih}}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \mathrm{sen}\left(\omega t + \phi\right) \qquad \phi = -\tan^{-1}(\tau \omega)$$

Exemplo:



Cont. ...

Vamos fazer uma análise mais detalhada da resposta do sistema. Para isto, vamos apresentar o conceito de Função Transferência Senoidal (F.T.S.) a partir da F.T. padrão do sistema

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\tau s + 1}$$

Para obtermos a F.T.S. fazemos s = iω onde $i = (-1)^{1/2}$ e ω a frequência da entrada senoidal. Então

$$H(i\omega) = \frac{Q_o(i\omega)}{Q_i(i\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{\tau(i\omega) + 1}$$

Ou de forma simplificada

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Q_o(\omega)}{Q_i(\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{i(\tau\omega) + 1}}$$

Esta expressão representa a F.T. do sistema escrita para uma entrada harmônica senoidal sendo então denominada de ***Função Transferência Senoidal.*** Importante: H(ω) é um número complexo

Cont. ...

Logo, como H(ω) é complexo e dependente de ω temos

$$H(\omega) = \frac{Q_o(\omega)}{Q_i(\omega)} = \frac{\mathbb{K}}{i(\tau\omega)+1} \quad \begin{cases} |H(\omega)| = \dfrac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2+1}} \\ \\ \phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega) \end{cases}$$

RELAÇÃO DE AMPLITUDES

ÂNGULO DE FASE

⇩

FUNÇÕES DE ω

e, se compararmos as expressões acima com as anteriores

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}q_{ih}}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}}\text{sen}\,(\omega t+\phi)$$

$$\phi = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Logo

$$\boxed{q_o(t) = |H(\omega)|q_{ih}\text{sen}(\omega t+\phi)}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

De maneira ainda mais ampla, vamos resolver novamente a EDO do sistema agora adotando outra forma para a entrada harmônica

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_{ih} e^{i\omega t}$$

Como o sistema é linear, ao invés de usarmos Laplace, assumimos a solução como

$$q_o(t) = q_{oh} e^{i\omega t}$$

que, quando substituída na primeira fornece o seguinte valor para a amplitude q_{oh}

$$q_{oh} = \frac{\mathbb{K} q_{ih}}{i\tau\omega + 1}$$

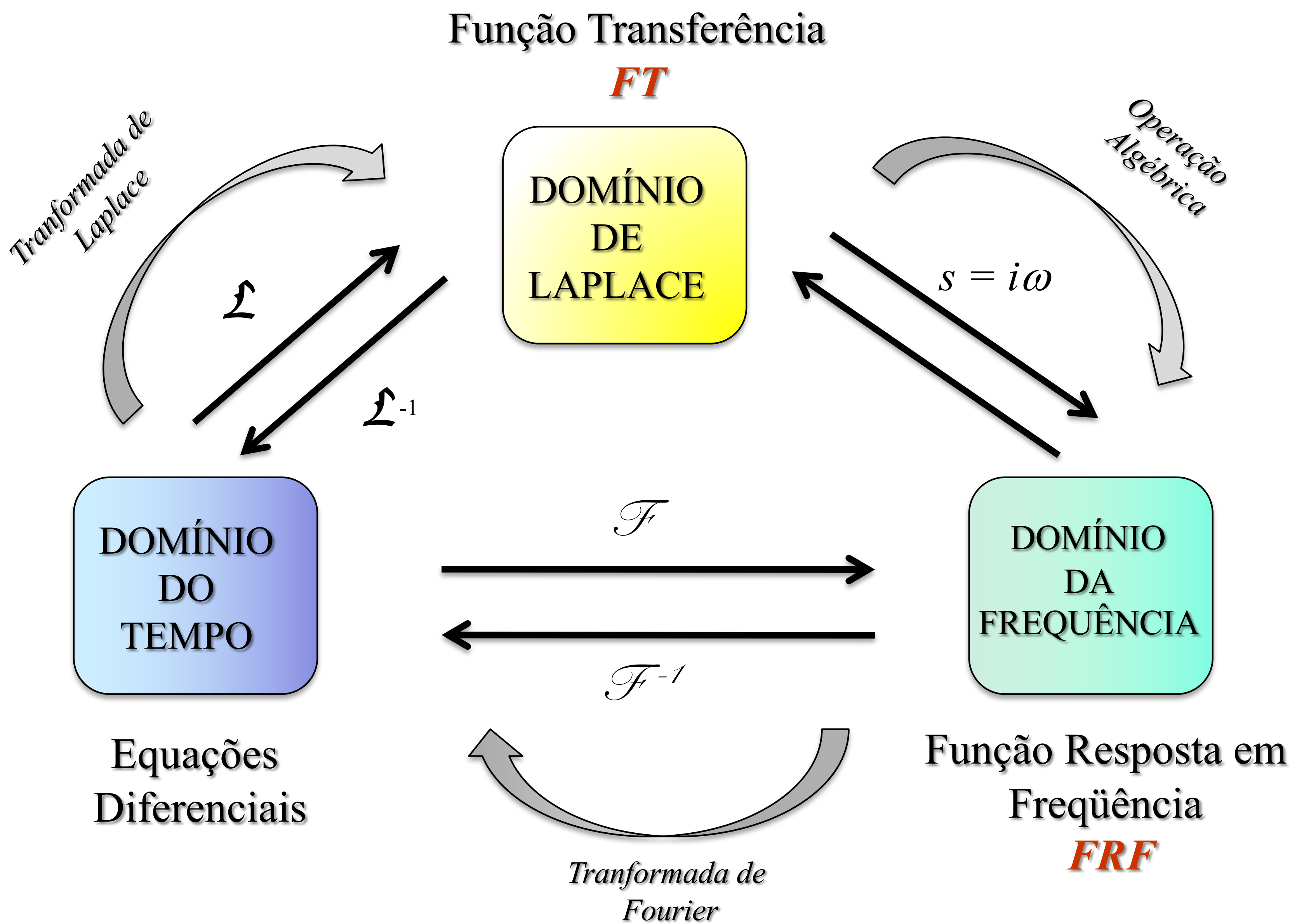
e, desta última chegamos à relação de amplitudes que é a própria F.T.S.

$$\boxed{H(\omega) = \frac{q_{oh}}{q_{ih}} = \frac{\mathbb{K}}{i\tau\omega + 1}}$$

$$|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Interação entre Domínios



Cont. ...

Portanto para a determinação de H(ω) para um dado sistema dinâmico, temos pelo menos três maneiras:

1. Resolver a EDO do sistema para $q_i(t) = q_{ih}$ sen(ωt) e dela extrair |H(ω)| e ϕ(ω)
2. Resolver a EDO do sistema para $q_i(t) = q_{ih}e^{i\omega t}$ e dela extrair H(ω)
3. A partir da F.T. do sistema para $q_i(t)$ e $q_o(t)$ fazer s = iω e em seguida obter H(ω) e |H(ω)| e ϕ(ω)

Sumarizando: A função de resposta em frequência de um sistema dinâmico é dada pela relação de amplitudes |H(ω)| e pelo ângulo de fase ϕ(ω) da F.T.S. correspondente.

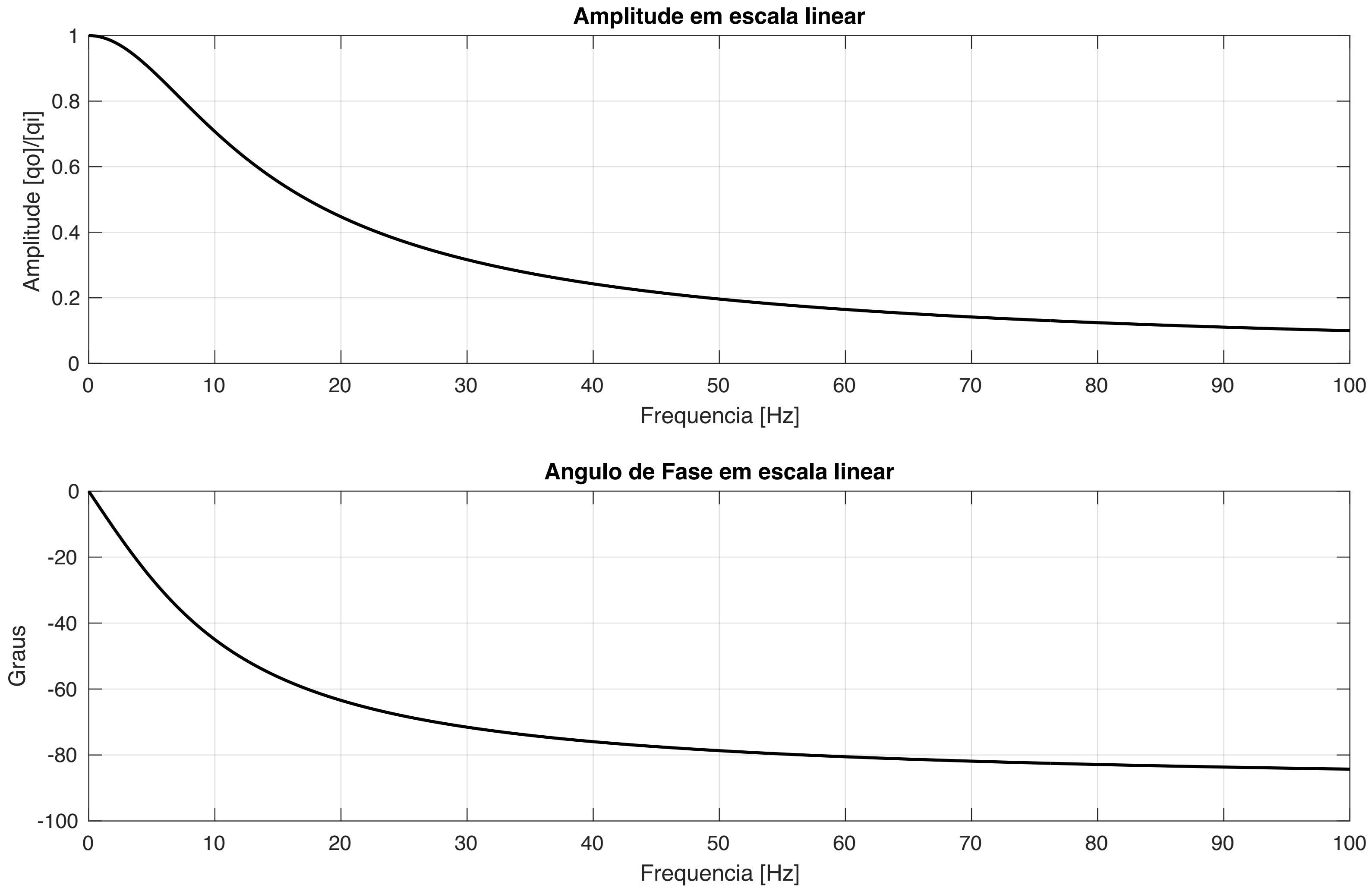
VAMOS INSPECIONAR AGORA |H(ω)| E ϕ(ω) GRÁFICAMENTE, EM FUNÇÃO DE ω VARIÁVEL

$$|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\tau^2\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

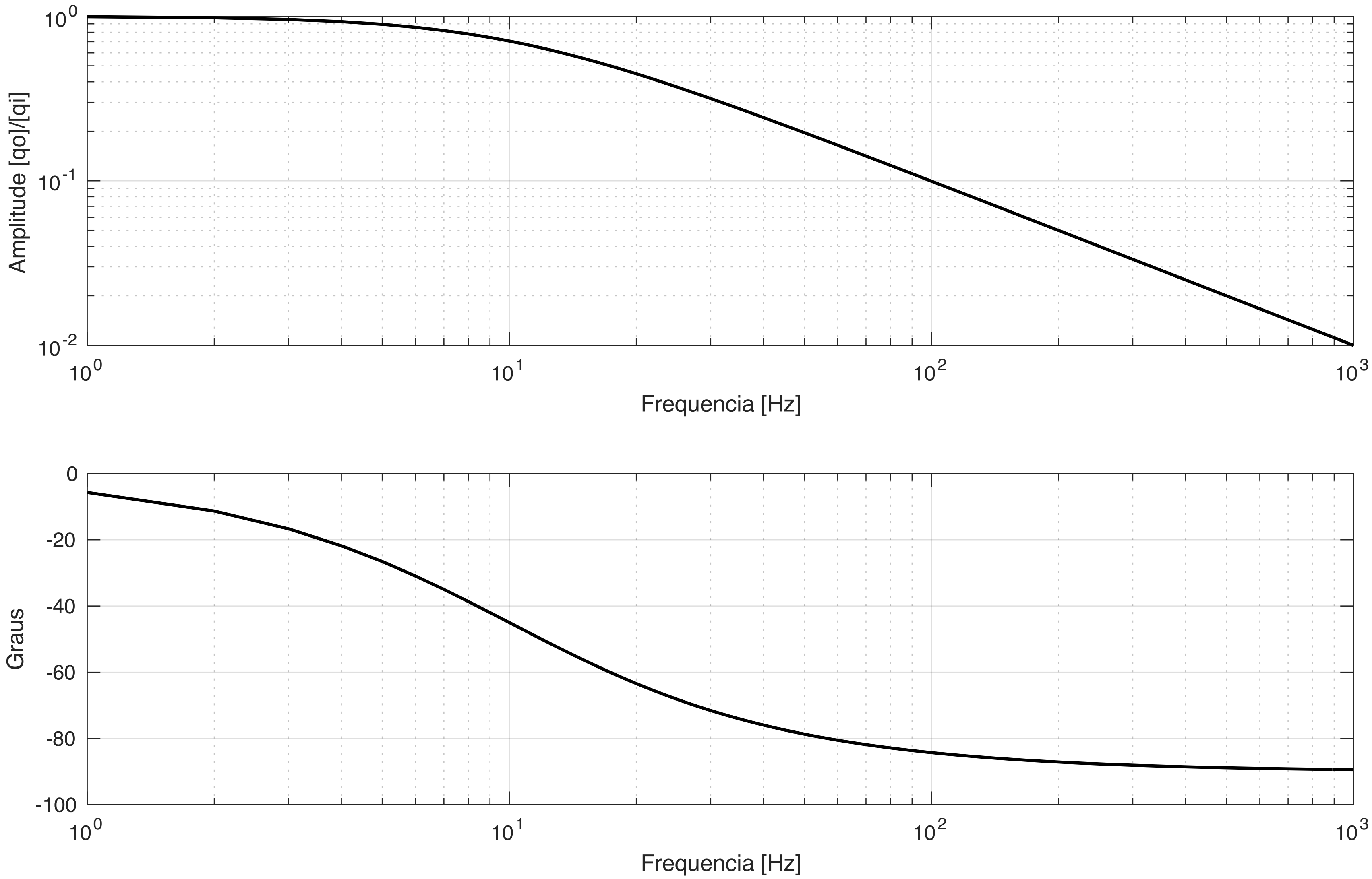
Gráficos da Resposta em Frequência Sistema de Primeira Odem

DIAGRAMA DE BODE



Gráficos da Resposta em Frequência Sistema de Primeira Odem

DIAGRAMA DE BODE



Conceitos Adicionais

Em dinâmica de sistemas é muito comum o uso das escalas logarítmicas bem como da unidade decibel (dB) para a relação de amplitudes. Por definição

$$\text{Valor Decibel de } N = dB = 20\ \log_{10} N$$

E, para a *relação de amplitudes* da resposta em frequência temos

$$\boxed{H(\omega)_{dB} = 20\ \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = -20\ \log_{10} \sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}}$$

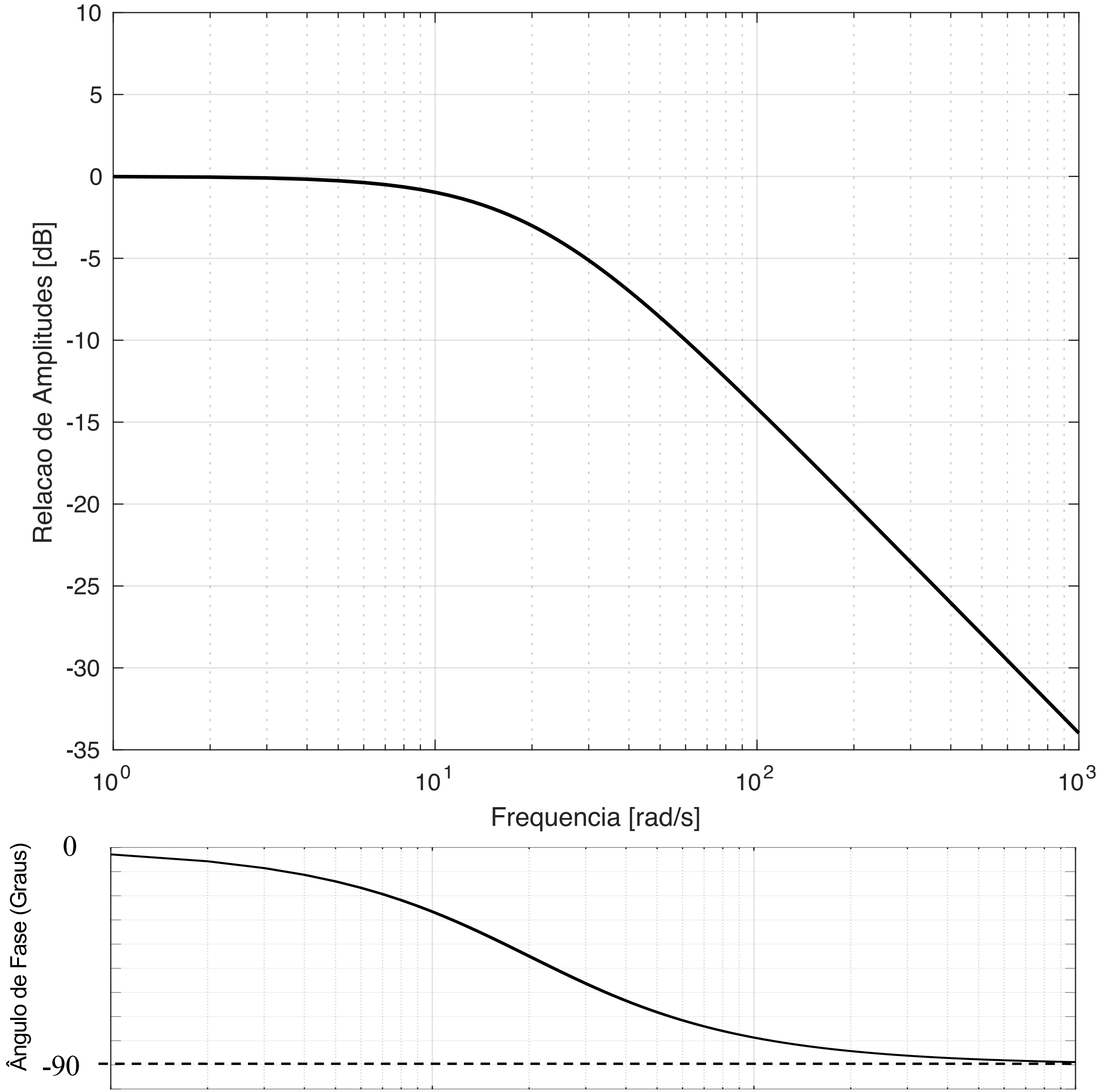
Dois conceitos adicionais (em relação ao eixo ω) :

- ***Década*** : Corresponde à uma mudança com um fator de 10 vezes
- ***Oitava***: Corresponde à uma mudança com fator de 2 vezes

Ex.: 1000 rad/s é uma década acima de 100 rad/s
1000 rad/s é uma oitava acima de 500 rad/s

Gráfico em dB

DIAGRAMA DE BODE



Análise de Assíntotas

Retomando a relação de amplitudes em dB

$$H(\omega)_{dB} = 20\ \log_{10}\frac{1}{\sqrt{(\tau\omega)^2+1}} = -20\ \log_{10}\sqrt{(\tau\omega)^2+1}$$

Vamos considerar dois casos limites

- Frequências muito baixas tal que $(\tau\omega)^2 << 1{,}0$

$$H(\omega)_{dB} \cong -20\log_{10}1 = 0$$

- Frequências muito altas tal que $(\tau\omega)^2 >> 1{,}0$

$$H(\omega)_{dB} \cong -20\log_{10}(\tau\omega) = -20\log_{10}\tau - 20\log_{10}\omega$$

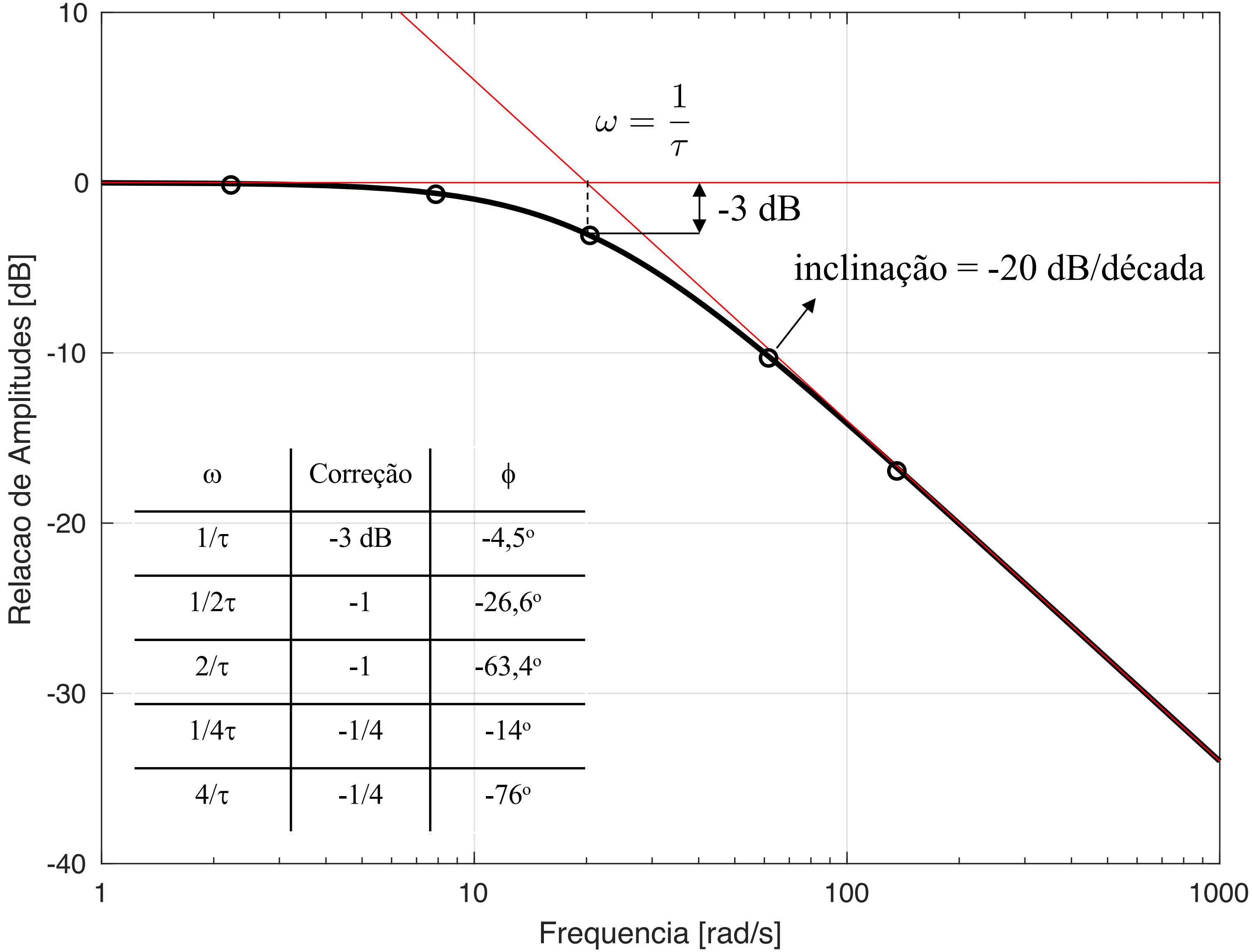
Análise de Assíntotas

Essas assíntotas se cruzam na chamada *breakpoint frequency*

$$\omega = \frac{1}{\mathcal{T}}$$

Importante: Quando o ganho de regime permamente K for diferente de 1,0 a assíntota de baixa frequência continua horizontal cruzando o eixo vertical no valor 20 $\log_{10}$ K dB ao invés de 0 dB

Análise de Assíntotas



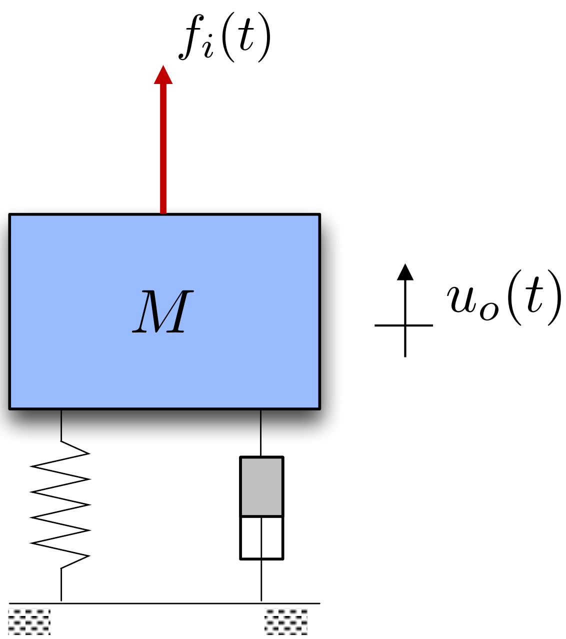
ω	Correção	φ
1/τ	-3 dB	-4,5º
1/2τ	-1	-26,6º
2/τ	-1	-63,4º
1/4τ	-1/4	-14º
4/τ	-1/4	-76º

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Resposta de um sistema de segunda ordem à entrada senoidal

Seguindo procedimento análogo, nos interessa agora investigar as características da resposta à uma entrada senoidal e consequentemente a resposta em frequência de um sistema de segunda ordem.

Como motivação, usaremos o sistema massa-mola-amortecedor para o caso sub amortecido ($0 < \zeta < 1$). Logo



$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_i(t)$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Podemos obter a resposta de regime permanente à entrada harmônica de três formas:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{ih} \mathrm{sen}(\omega t)$$

ou

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} f_{ih} e^{i\omega t}$$

ou ainda através da F.T. relacionando as variáveis de entrada e saída do modelo

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{F_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \xrightarrow{s = i\omega} H(\omega) = \frac{\mathbb{K}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

Cont. ...

Seguindo a primeira opção, inicialmente aplicamos a T.L. à equação considerando CIs nulas. E a solução algébrica da EDO é dada por

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K} f_{ih}\omega}{(s^2+\omega^2)(s-s_1)(s-s_2)}$$

Tomando a Transformada Inversa de Laplace desta última temos

$$u_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} f_{ih}\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Se seguirmos a segunda opção, escrevemos a resposta de regime permanente como

$$u_o(t) = U_{ih} e^{i\omega t}$$

E, ao subsituirmos na equação do modelo obtemos a expressão para U_{ih}

$$U_{ih} = \frac{\mathbb{K} f_{ih}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\frac{\omega}{\omega_n}}$$

E a resposta fica

$$\boxed{u_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\frac{\omega}{\omega_n}} f_{ih} e^{i\omega t}}$$

Cont. ...

Fazendo agora uma análise conjunta das três soluções

$$u_o(t) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}}} f_{ih}\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}$$

$$u_o(t) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\frac{\omega}{\omega_n}}} f_{ih}e^{i\omega t}$$

$$H(s) = \frac{U_o(s)}{F_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

$$s = i\omega$$

$$H(\omega) = \boxed{\frac{\mathbb{K}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\ 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}}$$

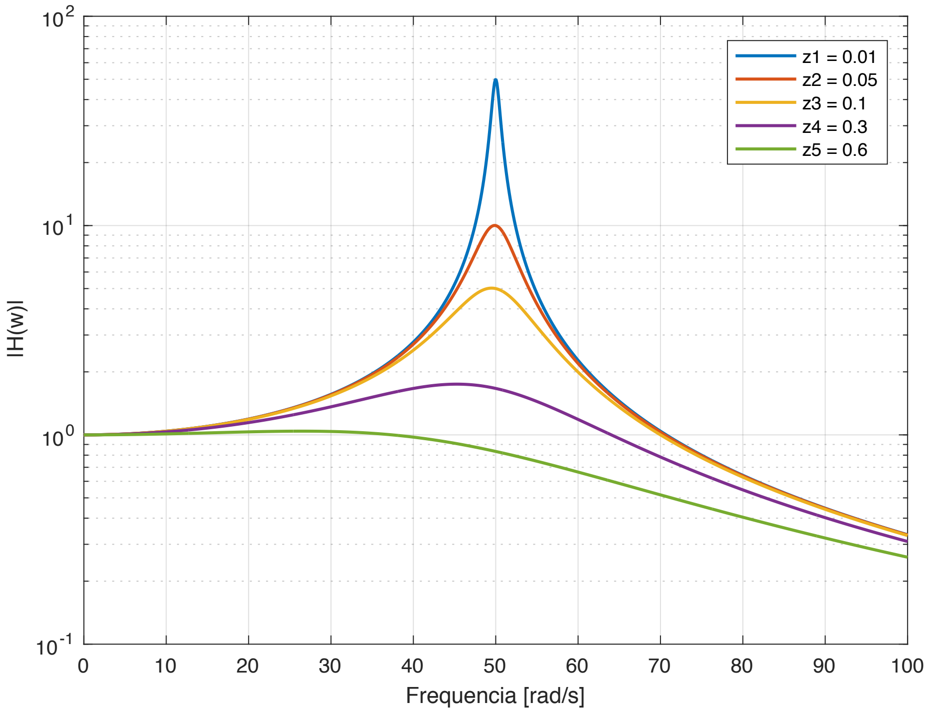
$$\boxed{|H(\omega)| = \frac{\mathbb{K}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}}$$

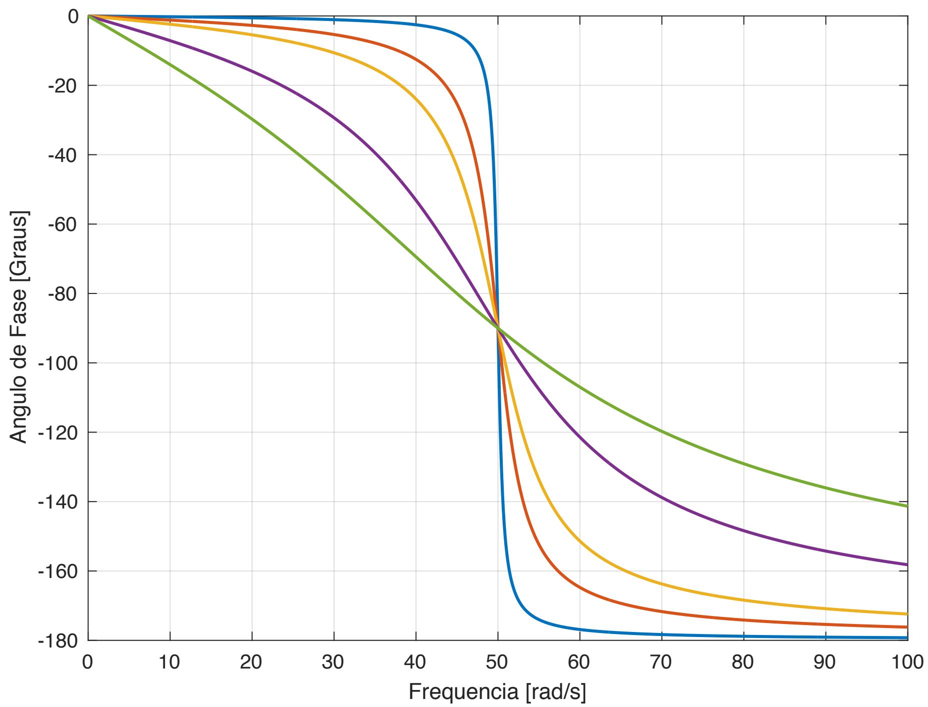
Cont. ...

Portanto, para um sistema massa-mola-amortecedor viscoso, sub-amortecido e com entrada força harmônica, a F.T.S. é um número complexo e dependente da frequência da força de entrada, dado por

$$H(\omega) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\ 2\zeta\omega_n\omega} \begin{cases} |H(\omega)| = \dfrac{\mathbb{K}\omega_n^2}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \\ \\ \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \end{cases}$$

Cont. ...

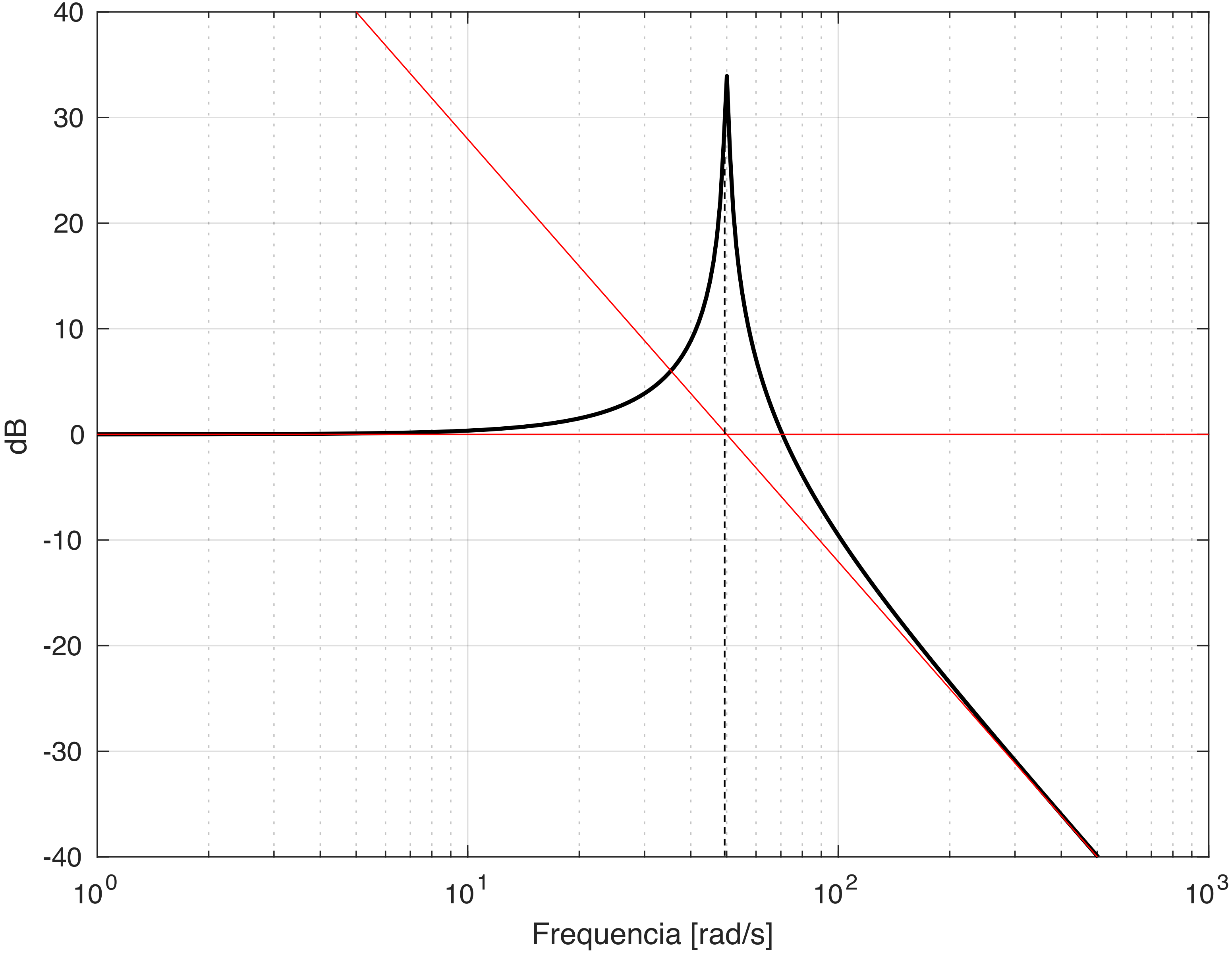




Assíntotas

$$|H(\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 \text{ dB} & \omega << \omega_n \\ -20\log_{10}\omega^2 & \omega >> \omega_n \end{cases}$$

COMPORTAMENTO DAS ASSÍNTOTAS



Considerações Adicionais

Vimos que a F.T. de um sistema dinâmico linear pode ser escrita como o quociente entre dois polinômios em s

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{s^p + B_{p-1}s^{p-1} + \cdots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \cdots + A_1 s + A_0}$$

onde k é uma constante e p e n é a ordem dos polinômios do numerador e denominador, respectivamente, sendo que em geral p<n. A expressão acima pode ser escrita como

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_p)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

- $z_1, z_2, \ldots, z_p$ são os ***zeros*** da F.T. (raizes do polinômio do numerador)
- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são os ***pólos*** da F.T. (raizes do polinômio do denominador)

Zeros e pólos podem ser positivos, negativos ou complexos !

Cont. ...

Na maioria dos casos trabalharemos com frações próprias (n>p), e nestes casos assumindo (pelo menos por enquanto) que não existam pólos repetidos, a F.T. é escrita como

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K_1}{(s-p_1)} + \frac{K_2}{(s-p_2)} + \cdots + \frac{K_k}{(s-p_k)} + \cdots + \frac{K_n}{(s-p_n)}$$

Esta forma é conhecida como expansão em frações parciais. E vale também quando os pólos do sistema são complexos. Como exemplo tomemos um sistema de 2ª ordem

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E, vamos assumir o caso sub-amortecido ($\zeta < 1$). Logo os pólos do sistema são

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_d \qquad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Cont. ...

E agora escrevemos a F.T. como

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}$$

Juntando as frações parciais novamente temos

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} = \frac{(k_1 + k_2)s - k_1 s_2 - k_2 s_1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Igualando os coeficientes dos polinômios do numerador aos da fração original

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 s_2 - k_2 s_1 = \mathbb{K}\omega_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d} \\ k_2 &= -\frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d} \end{aligned}$$

Identificação de Características a partir de Dados Experimentais

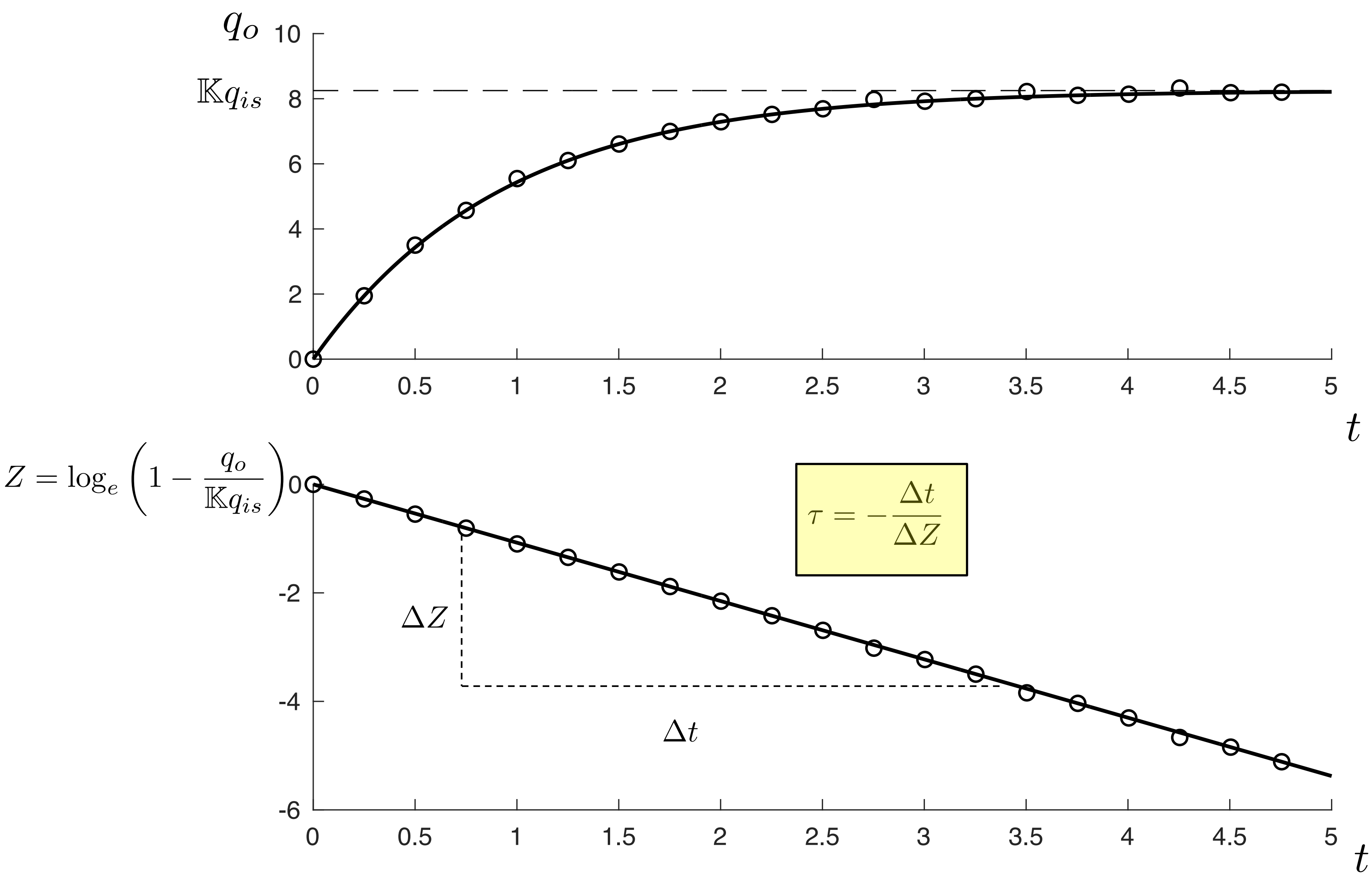
Inicialmente para um sistema de primeira ordem, recordemos que sua resposta de regime permanente à uma entrada degrau é dada por

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$$

Agora vamos assumir que para um sistema de primeira ordem é realizado um experimento onde uma entrada degrau de amplitude q_{is} conhecida é aplicada ao sistema. O objetivo é obtermos os valores de K e τ a partir deste dados. Criemos então uma nova função a partir da expressão acima escrevendo

$$Z = \log_e \left(1 - \frac{q_o}{\mathbb{K} q_{is}}\right) = \log_e \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Cont. ...



q_o
10
$\mathbb{K}q_{is}$
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t
$Z = \log_e\left(1 - \frac{q_o}{\mathbb{K}q_{is}}\right)$
0
-2
-4
-6
ΔZ
Δt
$\tau = -\frac{\Delta t}{\Delta Z}$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t

Cont. ...

Agora vamos analisar um sistema de 2ª ordem

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$k_1 = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d}$$

$$k_2 = -\frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{i\ 2\omega_d}$$

E como vimos

$$H(s) = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\mathbb{K}\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}$$

E tomando a transformada inversa de Laplace de H(s) temos

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2}\right\} = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

Cont. ...

Simplificando esta última expressão (usando as Relações de Euler) temos

$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)$$

Recordando o resultado para a resposta ao impulso de área A_i

$$u_o(t) = \frac{\mathbb{K}A_i\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)$$

Se assumirmos $A_i = 1$ (impulso unitário) as expressões são idênticas e chegamos a uma conclusão muito importante

A resposta ao impulso unitário de um sistema de segunda ordem é igual a transformada inversa de Laplace de sua F.T.

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Algébricamente

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}$$

Prosseguindo com a análise, recordemos agora a resposta transiente do 2ª ordem quando $u_o(0) = 0$ $du_0/dt\ (t = 0) = v_0$

$$u_o(t) = \frac{v_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{sen}(\omega_d t)$$

e comparando com h(t)

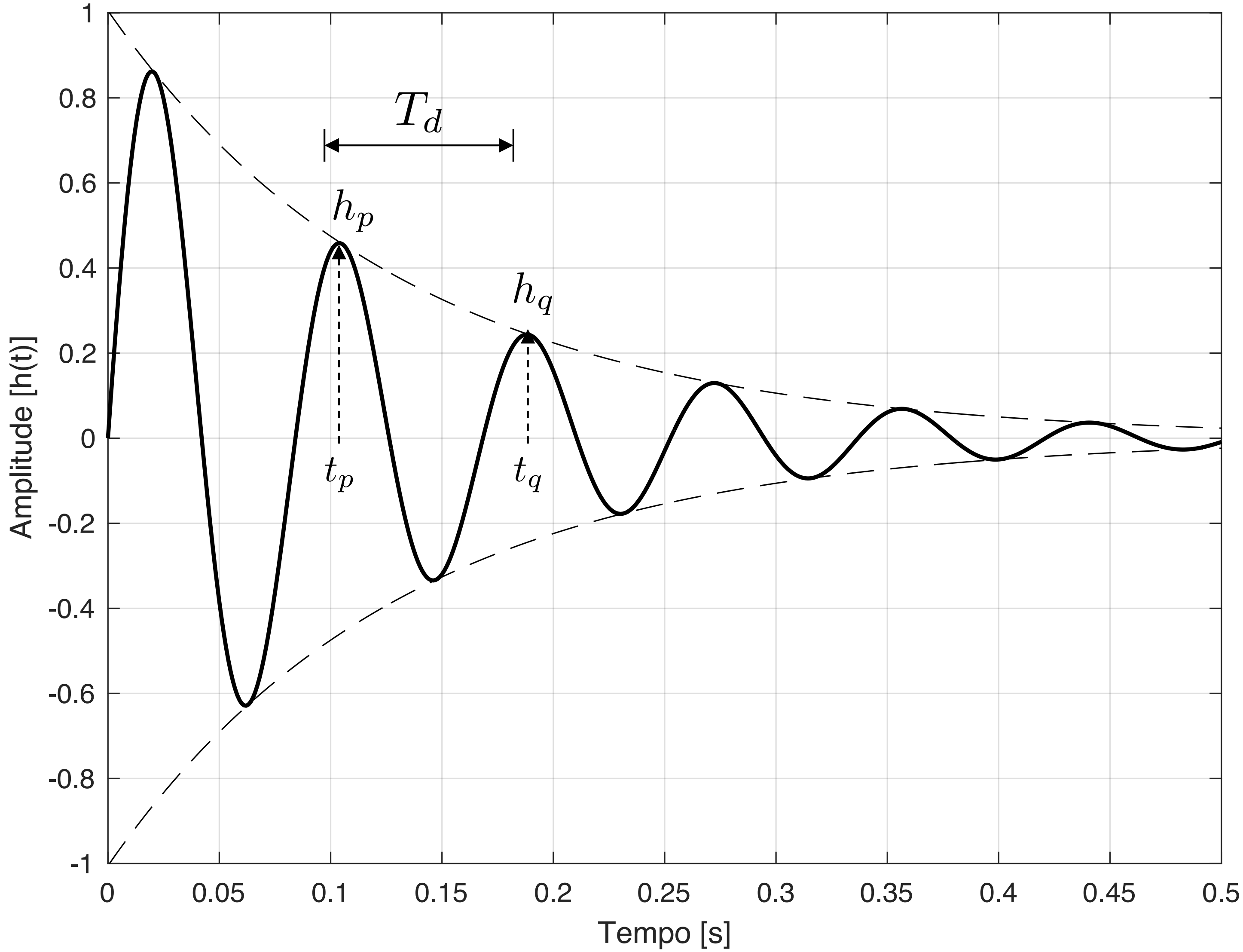
$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\mathrm{sen}(\omega_d t)$$

A resposta ao impulso unitário que é a transformada inversa de Laplace da F.T. também corresponde à resposta transiente com $u_o(0) = 0$ e $v_0 = K\,\omega_n^2$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Suponha que o gráfico abaixo seja a resposta experimental ao impulso



Cont. ...

Escrevemos a resposta ao impulso para estes dois instantes

$$h(t) = \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t) = \begin{cases} \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \operatorname{sen}(\omega_d t_p) & t = t_p \\ \\ \frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_q} \operatorname{sen}(\omega_d t_q) & t = t_q \end{cases}$$

E agora tomamos a razão entre elas

$$\frac{h_p}{h_q} = \frac{\frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \operatorname{sen}(\omega_d t_p)}{\frac{\mathbb{K}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_q} \operatorname{sen}(\omega_d t_q)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_p}}{e^{-\zeta\omega_n t_q}} = e^{\zeta\omega_n T_d}$$

Cont. ...

em seguida definimos a grandeza δ, denominada ***decremento logarítmico***

$$\delta = \log_e \left(\frac{h_p}{h_q} \right) = \log_e \left(e^{\zeta \omega_n T_d} \right) = \zeta \omega_n T_d$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

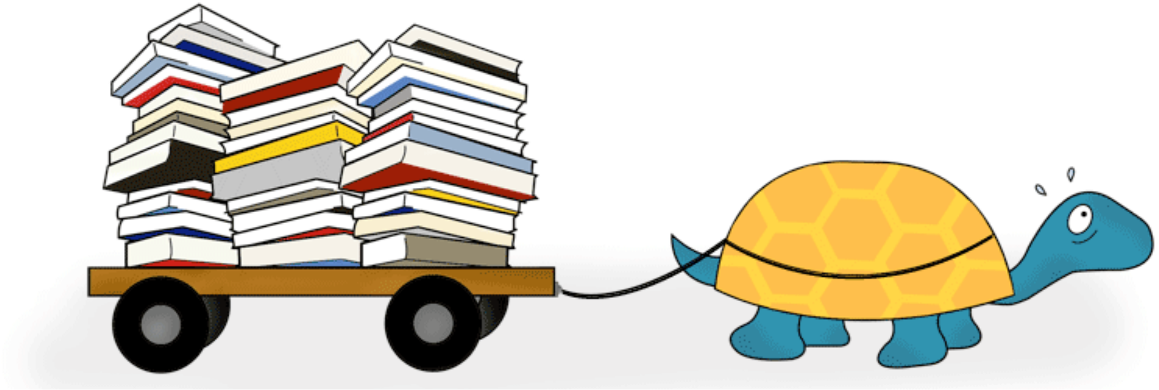
$$\boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}}$$

Para valores pequenos de ζ

$$\boxed{\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi}}$$

FIM

Bom Estudo !



Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP