MAP5912 - $1^{\underline{o}}$ Semestre de 2016

Exercícios

1) Para seqüências de números complexos $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ defina

$$\begin{aligned} l_\infty &= \left\{ a : \|a\|_\infty \equiv \sup_n |a_n| < \infty \right\} \\ c_0 &= \left\{ a : \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} \\ c &= \left\{ a : \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existe} \right\} \\ l_1 &= \left\{ a : \|a\|_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\} \end{aligned}$$

a) Mostre que $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ e $(l_1, \|\cdot\|_1)$ são espaços de Banach.

b) Mostre que c_0 e c são subespaços vetoriais de l_∞.

c) Mostre que c_0 e c são subespaços vetoriais fechados de $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

d) Se $\lambda \in l_1$, prove que

$$\Lambda(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$$

é um funcional linear contínuo em c_0 cuja norma é $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$.

e) Use o teorema de Hahn-Banach para mostrar que $l_1^* = l_\infty$ mas que $l_\infty^* \neq l_1$.

2) Mostre que em $C^1([a,b])$,

$$(u,v) = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\,dx + \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)}\,dx$$

define um produto interno.

3) Dizemos que $u \in L^2(a,b)$ tem *derivada fraca* $w \in L^2(a,b)$ se

$$\int_a^b \phi(x)w(x)\,dx = -\int_a^b u(x)\phi'(x)\,dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(a,b).$$

a) Mostre que se a derivada fraca existir, ela é única.

b) Mostre que se $u \in C^1([a,b])$, a derivada fraca pode ser identificada com a derivada usual.

(A derivada fraca de u será denotada também por u').

4) Denote por $W^1(a,b)$ a classe de funções em $L^2(a,b)$ que possuem derivada fraca em $L^2(a,b)$.

a) Mostre que $W^1(a,b)$ é um espaço vetorial (complexo).

b) Mostre que

$$(u,v) = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}\,dx + \int_a^b u'(x)\overline{v'(x)}\,dx$$

define um produto interno em $W^1(a,b)$.

c) Prove que com o produto interno definido acima, $W^1(a,b)$ é um espaço de Hilbert.

5) Considere o espaço $L^2(-\pi,\pi)$ real. Denote por M a coleção das funções pares, isto é,

$$M = \left\{u \in L^2(-\pi,\pi) : u(-x) = u(x)\ q.s.\right\}$$

Defina $P : L^2(-\pi,\pi) \to L^2(-\pi,\pi)$ por

$$(Pu)(x) = \frac{1}{2}[u(x) + u(-x)].$$

a) Prove que P é a projeção ortogonal de $L^2(-\pi,\pi)$ sobre M.

b) Caracterize as funções pertencentes a $M^\perp$.

c) Apresente bases hilbertianas para M e para $M^\perp$.

6) Seja $A \in \mathcal{L}(H)$, onde H é um espaço de Hilbert, e denote por A^* o adjunto de A. Mostre que:

a) $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ e $\mathcal{R}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$;

b) $H = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)} = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$;

c) $(A^*)^* = A$;

d) $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(AA^*)$ e $\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(AA^*)}$;

e) $\|A^*A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|$;

f) se $B \in \mathcal{L}(H)$ então $(AB)^* = B^*A^*$;

g) suponha que A é inversível com inversa limitada. Então A^* é inversível com inversa limitada e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

7) Seja H um espaço de Hilbert e $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ um operador linear. Denote por $\Gamma(A)$ o gráfico de A. Prove que A é fechável se e somente se $\overline{\Gamma(A)}$ é o gráfico de um operador (o *fecho* de A).

8) Apresente um exemplo mostrando que o operador $\frac{d}{dx}$ em $L^2(a,b)$, com domínio $C^1([a,b])$, não é fechado.

9) Seja $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert H e seja e_∞ um vetor em H que não é uma combinação linear *finita* dos φ_n. Seja $\mathcal{D}$ o subespaço vetorial de H formado pelas combinações lineares *finitas* dos φ_n e e_∞, e em $\mathcal{D}$ defina o operador linear A por

$$A\left(be_\infty + \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n\right) = be_\infty.$$

Mostre que $[e_\infty, e_\infty]$ e $[e_\infty, 0]$ pertencem a $\overline{\Gamma(A)}$ e portanto A não é fechável. Apresente um exemplo concreto.

10) Sejam $H = L^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathcal{D} = \left\{u \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|u(x)|^2\,dx < \infty\right\}.$$

Defina $A : \mathcal{D} \subset H \to H$ por $(Au)(x) = x^2u(x)$ q.s. Mostre que A é um operador não limitado e que é fechado.

11) Seja $(A, \mathcal{D}(A))$ um operador *fechado* em um espaço de Hilbert H. Mostre que:

a) $\lambda I - A$ é fechado onde λ é um escalar e I é o operador identidade;

b) O núcleo de A é um subespaço fechado de H;

c) se A é *injetor*, então $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \subset H \to H$ é fechado, onde $\mathcal{R}(A)$ é a imagem de A.