

Superfície de resposta

Profa. Cibele Russo

(Referências: Montgomery (2012), Notas de aula de Roseli Leandro; Clarice Demétrio; Marinho Andrade)

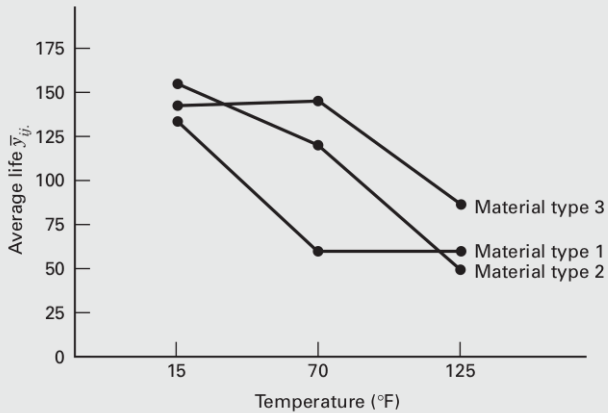
Superfície de resposta

- A ANOVA sempre trata todos os fatores do experimento como se fossem qualitativos ou categóricos.
- No entanto, muitos experimentos envolvem pelo menos um fator quantitativo.
- Pode ser útil ajustar uma curva de resposta aos níveis de um fator quantitativo para que o experimentador tenha uma equação que relacione a resposta ao fator.

- Essa equação pode ser usada para interpolação, ou seja, para prever a resposta em níveis do fator entre aqueles realmente utilizados no experimento.
- Quando pelo menos dois fatores são quantitativos, podemos ajustar uma superfície de resposta para prever y em várias combinações dos fatores do delineamento.
- Em geral, métodos de regressão linear são usados para ajustar esses modelos aos dados experimentais.

Exemplo

- Considere um experimento em que se observa a duração de baterias, em que se deseja avaliar a influência de fatores temperatura e tipo de material.
- O fator temperatura é quantitativo, com três níveis de temperatura, e o tipo de material é qualitativo.
- Podemos calcular um efeito linear e um efeito quadrático da temperatura para estudar como a temperatura afeta a duração da bateria.
- Os perfis médios para combinações de temperatura e tipo de material são apresentados na Figura 5.9 e a Tabela 5.15 apresenta resultados condensados para este experimento, assumindo temperatura quantitativa e tipo de material qualitativo.



■ **FIGURE 5.9** Material type–temperature plot for Example 5.1

Experimentos fatoriais em blocos

■ **TABLE 5.15**

Design-Expert Output for Example 5.4

Response: Life

In Hours

ANOVA for Response Surface Reduced Cubic Model

Analysis of Variance Table [Partial Sum of Squares]

Source	Sum of Squares	DF	Mean Square	F Value	Prov > F	
Model	59416.22	8	7427.03	11.00	<0.0001	significant
A	39042.67	1	39042.67	57.82	<0.0001	
B	10683.72	2	5341.86	7.91	0.0020	
A ²	76.06	1	76.06	0.11	0.7398	
AB	2315.08	2	1157.54	1.71	0.1991	
A ² B	7298.69	2	3649.35	5.40	0.0106	
Residual	18230.75	27	675.21			
<i>Lack of Fit</i>	0.000	0				
<i>Pure Error</i>	18230.75	27	675.21			
Cor Total	77646.97	35				
Std. Dev.	25.98		R-Squared	0.7652		
Mean	105.53		Adj R-Squared	0.6956		
C.V.	24.62		Pred R-Squared	0.5826		
PRESS	32410.22		Adeq Precision	8.178		

Experimentos fatoriais em blocos

Term	Coefficient		Standard Error	95% CI		VIF
	Estimate	DF		Low	High	
Intercept	107.58	1	7.50	92.19	122.97	
A-Temp	-40.33	1	5.30	-51.22	-29.45	1.00
B[1]	-50.33	1	10.61	-72.10	-28.57	
B[2]	12.17	1	10.61	-9.60	33.93	
A ²	-3.08	1	9.19	-21.93	15.77	1.00
AB[1]	1.71	1	7.50	-13.68	17.10	
AB[2]	-12.79	1	7.50	-28.18	2.60	
A ² B[1]	41.96	1	12.99	15.30	68.62	
A ² B[2]	-14.04	1	12.99	-40.70	12.62	

Final Equation in Terms of Coded Factors:

$$\begin{aligned}
 \text{Life} = & \\
 & +107.58 \\
 & -40.33 *A \\
 & -50.33 *B[1] \\
 & +12.17 *B[2] \\
 & -3.08 *A^2 \\
 & +1.71 *AB[1] \\
 & -12.79 *AB[2] \\
 & +41.96 *A^2B[1] \\
 & -14.04 *A^2[2]
 \end{aligned}$$

- A ANOVA na Tabela 5.15 mostra que a “fonte” de variabilidade do “modelo” foi subdividida em vários componentes.
- Os componentes “ A ” e “ A^2 ” representam os efeitos lineares e quadráticos da temperatura, e “ B ” representa o efeito principal do fator tipo de material.
- Lembre-se de que o tipo de material é um fator qualitativo com três níveis. Os termos “ AB ” e “ A^2B ” são as interações do fator temperatura linear e quadrático com o tipo de material.
- Os valores p indicam que A^2 e AB não são significativos, enquanto o termo A^2B é significativo. Frequentemente, pensamos em remover termos ou fatores não significativos de um modelo, mas, neste caso, remover A^2 e AB e manter A^2B resultará em um modelo que não é hierárquico.

O **princípio da hierarquia** indica que, se um modelo contém um termo de alta ordem (como A^2B), ele também deve conter todos os termos de ordem inferior que o compõem (neste caso, A^2 e AB). A hierarquia promove um tipo de consistência interna.

Isso não é unanimidade, entretanto. Alguns autores preferem incluir somente os efeitos significativos. O ideal, entretanto, para selecionar os termos que ficam no modelo, seria executar um método iterativo para seleção de modelos, como backward (passo atrás), forward (passo à frente) ou stepwise (passo-a-passo).

A saída do pacote também fornece estimativas dos coeficientes do modelo e uma equação de predição final para a duração da bateria em fatores codificados.

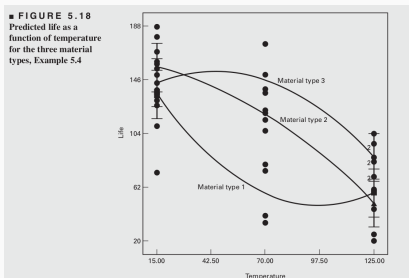
■ **TABLE 5.15** (Continued)

Final Equation in Terms of Actual Factors:

Material Type	1
Life =	
+169.38017	
-2.48860	*Temp
+0.012851	*Temp ²
Material Type	2
Life =	
+159.62397	
-0.17901	*Temp
+0.41627	*Temp ²
Material Type	3
Life =	
+132.76240	
+0.89264	*Temp
-0.43218	*Temp ²

A resposta predita é apresentada abaixo.

Observe que, como o tipo de material é um fator qualitativo, há uma equação para a vida predita como função da temperatura para cada tipo de material. A Figura 5.18 mostra as curvas de resposta geradas por essas três equações de predição. Compare-as com o gráfico de interação de dois fatores para este experimento na Figura 5.9.



Exemplo 5.5 (ver mais informações pág 214 Montgomery)

EXAMPLE 5.5

The effective life of a cutting tool installed in a numerically controlled machine is thought to be affected by the cutting speed and the tool angle. Three speeds and three angles are selected, and a 3^2 factorial experiment with two replicates is performed. The coded data are shown in Table 5.16. The circled numbers in the cells are the cell totals $\{y_{ij}\}$.

Table 5.17 shows the JMP output for this experiment. This is a classical ANOVA, treating both factors as categorical. Notice that both design factors tool angle and speed as

well as the angle–speed interaction are significant. Since the factors are quantitative, and both factors have three levels, a **second-order model** such as

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_{12}x_1x_2 + \beta_{11}x_1^2 + \beta_{22}x_2^2 + \varepsilon$$

where x_1 = angle and x_2 = speed could also be fit to the data. The JMP output for this model is shown in Table 5.18. Notice that JMP “centers” the predictors when forming the interaction and quadratic model terms. The second-order model

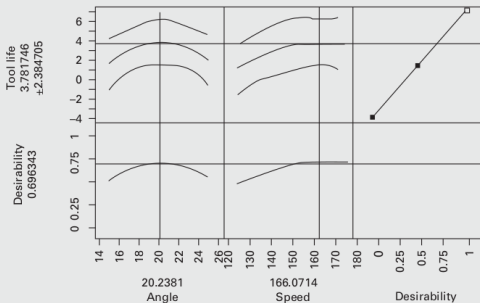
■ TABLE 5.16
Data for Tool Life Experiment

Total Angle (degrees)	Cutting Speed (in/min)						$y_{i.}$
	125		150		175		
15	−2	⊖3	−3	⊖3	2	⊕5	−1
	−1		0		3		
20	0	⊕2	1	⊕4	4	⊕10	16
	2		3		6		
25	−1	⊖1	5	⊕11	0	⊖1	9
	0		6		−1		
$y_{.j}$	−2		12		14		$24 = y_{..}$

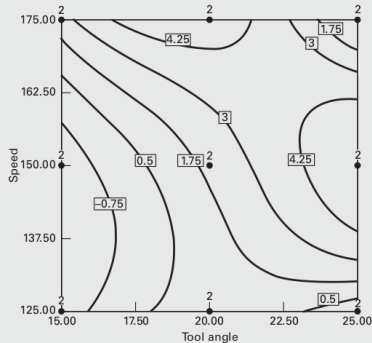
■ **TABLE 5.18** (Continued)

(Angle-20)*(Speed-150)	-0.008	0.00665	-1.20	0.2522
(Angle-20)*(Angle-20)	-0.08	0.047022	-1.70	0.1146
(Speed-150)*(Speed-150)	-0.0016	0.001881	-0.85	0.4116

Prediction Profiler

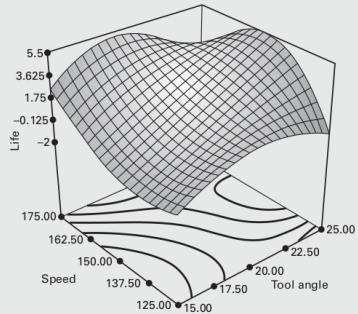


JMP output for the second-order model with the additional higher-order terms is shown in Table 5.19. While these higher-order terms are components of the two-factor interaction, the final model is a reduced quartic. Although



■ **FIGURE 5.19**
Two-dimensional contour plot of the tool life response surface for Example 5.5

there are some large P -values, all model terms have been retained to ensure hierarchy. The prediction profiler indicates that maximum tool life is achieved around an angle of 25 degrees and speed of 150 in/min.



■ **FIGURE 5.20**
Three-dimensional tool life response surface for Example 5.5

Ver material do Prof. Fernando Mayer

<http://leg.ufpr.br/~fernandomayer/aulas/ce074/msr.html>