

6. Aeroelasticidade dinâmica

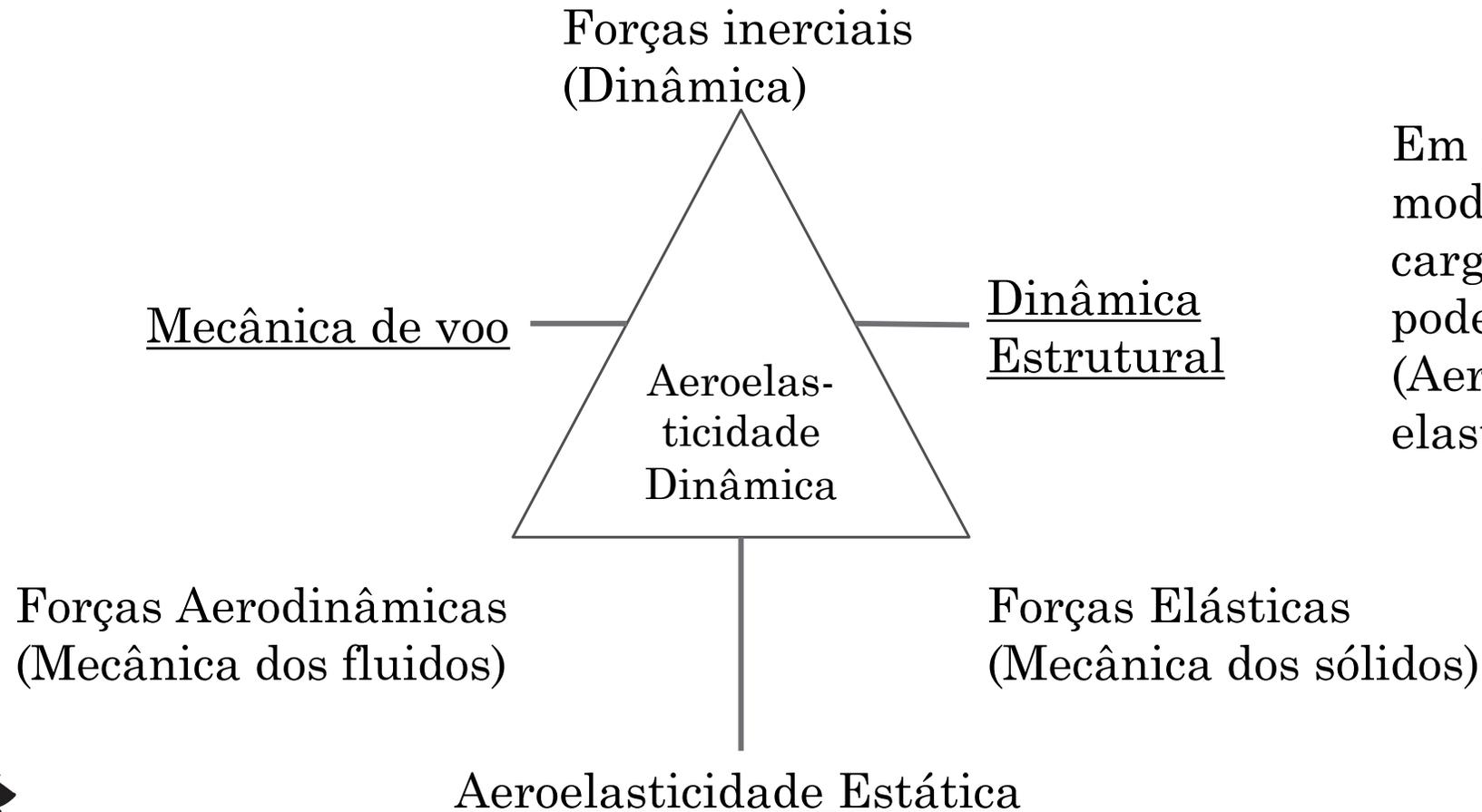
Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

- Os problemas aeroelásticos podem ser estáticos ou dinâmicos. O problema é dinâmico se a inércia tiver um papel fundamental no fenômeno. Em geral, o diagrama a seguir sugerido por Collar na década de 1940 se aplica:



Em problemas modernos, o controle e as cargas térmicas também podem ser presentes (Aero-servo-termo-elasticidade).

Classificação de problemas aeroelásticos

	Estática	Dinâmica
Estabilidade	Divergência	Flutter; Flutter de estol
Resposta	Distribuição de carregamento; Efetividade de comando; Reversão de comando	Resposta à rajada; Resposta de comando; Cargas dinâmicas de pouso; Buffeting; Galloping

Equações de movimento para a seção típica (por unidade de comprimento):

$$m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + K_h h = -L(t)$$

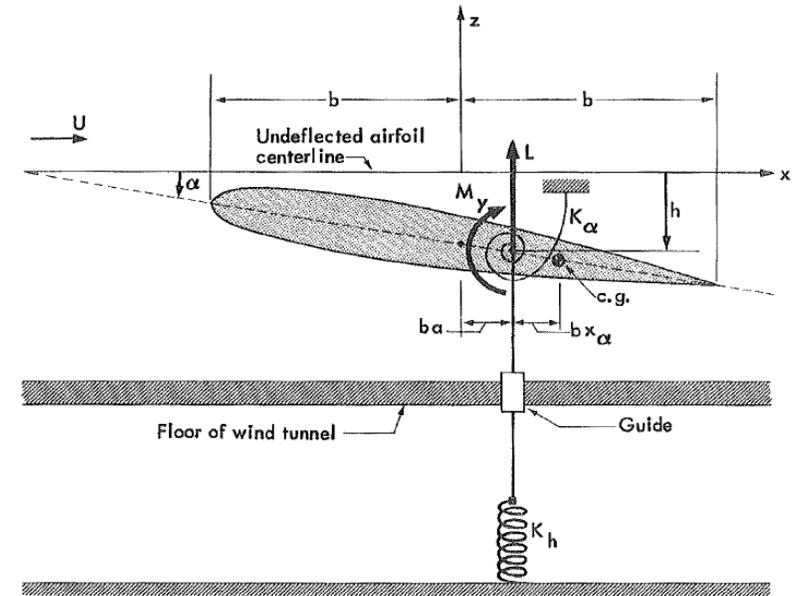
$$S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} + K_\alpha\alpha = M_a(t)$$

Assumindo

$$K_h = m\omega_h^2$$

$$K_\alpha = I_\alpha\omega_\alpha^2$$

$$\tau = \frac{U}{b}t \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{b}{U} \frac{\partial}{\partial t} = (\bullet)_{,\tau} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{b} \frac{\partial}{\partial \tau} \end{cases}$$

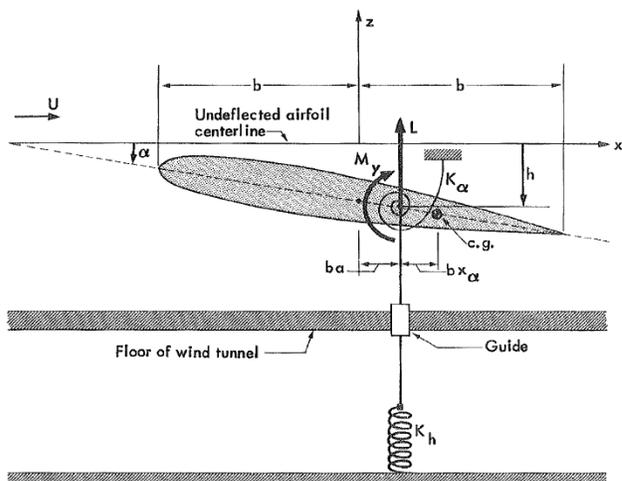


para obter na forma adimensional:

$$\mu \frac{h_{,\tau\tau}}{b} + \mu x_\alpha \alpha_{,\tau\tau} + \mu \bar{\omega}_h^2 \frac{h}{b} = \frac{-L(\tau)}{\rho \pi b U^2}$$

$$\mu x_\alpha \frac{h_{,\tau\tau}}{b} + \mu r_\alpha^2 \alpha_{,\tau\tau} + \mu r_\alpha^2 \bar{\omega}_\alpha^2 \alpha = \frac{M_a(\tau)}{\rho \pi b^2 U^2}$$

onde



$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{mb}$$

(distância do c.g. em relação ao e.e. em semi cordas)

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2}}$$

(raio de giração em torno do e.e. em semi cordas)

$$\mu = \frac{m}{\rho \pi b^2}$$

(razão de massa)

$$\bar{\omega}_{h,\alpha} = \frac{\omega_{h,\alpha} b}{U}$$

(frequências adimensionais desacopladas)



Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h_{,\tau\tau}}{b} \\ \alpha_{,\tau\tau} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\omega}_h^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \bar{\omega}_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h}{b} \\ \alpha \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} \frac{-L(\tau)}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{M_a(\tau)}{\rho\pi b^2 U^2} \end{Bmatrix}$$

Tomando a transformada de Laplace:

$$\begin{bmatrix} \bar{s}^2 + \bar{\omega}_h^2 & \bar{s}^2 x_\alpha \\ \bar{s}^2 x_\alpha & r_\alpha^2 (\bar{s}^2 + \bar{\omega}_\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} \frac{-L(\bar{s})}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{M_a(\bar{s})}{\rho\pi b^2 U^2} \end{Bmatrix}$$

onde

$$\bar{s} = \frac{sb}{U}$$

A função de transferência estrutural desejada é dada pela inversa da matriz anterior, isto é:

$$X(\bar{s}) = \frac{1}{\mu} E^{-1}(\bar{s}) F(\bar{s})$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{\Delta_E(\bar{s})} \begin{bmatrix} r_\alpha^2 (\bar{s}^2 + \bar{\omega}_\alpha^2) & -\bar{s}^2 x_\alpha \\ -\bar{s}^2 x_\alpha & \bar{s}^2 + \bar{\omega}_h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-L(\bar{s})}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{M_a(\bar{s})}{\rho\pi b^2 U^2} \end{Bmatrix}$$

onde

$$\Delta_E(\bar{s}) = (r_\alpha^2 - x_\alpha^2) \bar{s}^4 + (\bar{\omega}_\alpha^2 + \bar{\omega}_h^2) r_\alpha^2 \bar{s}^2 + \bar{\omega}_\alpha^2 \bar{\omega}_h^2 r_\alpha^2$$

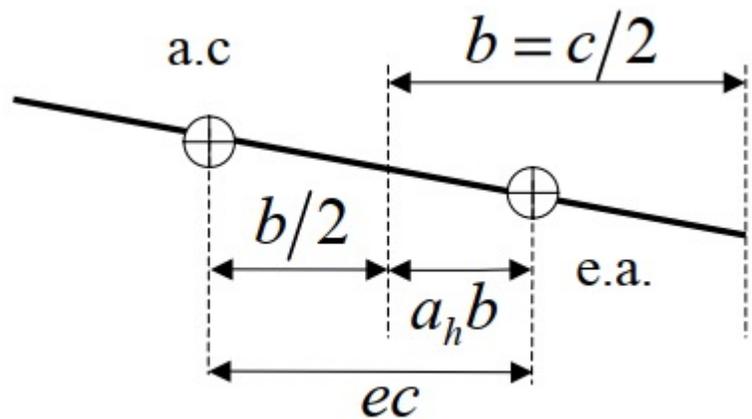
Aerodinâmica quase-estática

Do capítulo 5:

$$L(t) = q(2b) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \left(\alpha(t) + \frac{\dot{h}}{U} \right)$$
$$M_a(t) = e(2b)L(t) + M_0$$

Também note que o momento em torno do c.a. é independente de α e h/b e, portanto, ele pode ser desconsiderado da análise de estabilidade (pode ser visto como um termo de carga extra).

Também note que:



$$ec = e(2b) = \frac{b}{2} + a_h b$$

Então, em variáveis adimensionais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{-L(\tau)}{\rho \pi b U^2} \\ \frac{M_a(\tau)}{\rho \pi b^2 U^2} \end{array} \right\} = \frac{\frac{1}{2} \rho U^2 (2b) \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}}{\underbrace{\rho \pi b U^2}_{\frac{\partial C_L / \partial \alpha}{\pi}}} \left(\left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} + a_h & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_{,\tau}}{b} \\ \alpha_{,\tau} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} + a_h \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{h}{b} \\ \alpha \end{array} \right\} \right)$$

- Observe que as cargas na expressão anterior normalmente são dependentes do movimento, pois são multiplicadas pelas coordenadas generalizadas α e h / b . No problema de flutter, apenas os termos dependentes do movimento são retidos, porque o flutter é um problema de estabilidade; isto é, a equação diferencial homogênea é suficiente para descrever o problema de autovalor.
- As cargas independentes de movimento (como o momento aerodinâmico em torno do centro aerodinâmico) são necessárias apenas quando um problema de resposta, como a resposta dinâmica aeroelástica da seção típica (às rajadas de vento, por exemplo), precisa ser resolvido.

Então, a matriz aerodinâmica, no domínio de Laplace, lê:

$$A(\bar{s}) = \frac{\partial C_L / \partial \alpha}{\pi} \begin{bmatrix} -\bar{s} & -1 \\ \left(\frac{1}{2} + a_h \right) \bar{s} & \frac{1}{2} + a_h \end{bmatrix}$$

Aerodinâmica Não Estacionária

Do capítulo 5:

$$\begin{Bmatrix} \bar{L}(\bar{s}) \\ \bar{M}_a(\bar{s}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\bar{s}) & A_{12}(\bar{s}) \\ A_{21}(\bar{s}) & A_{22}(\bar{s}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(\bar{s})/b \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix}$$

ou

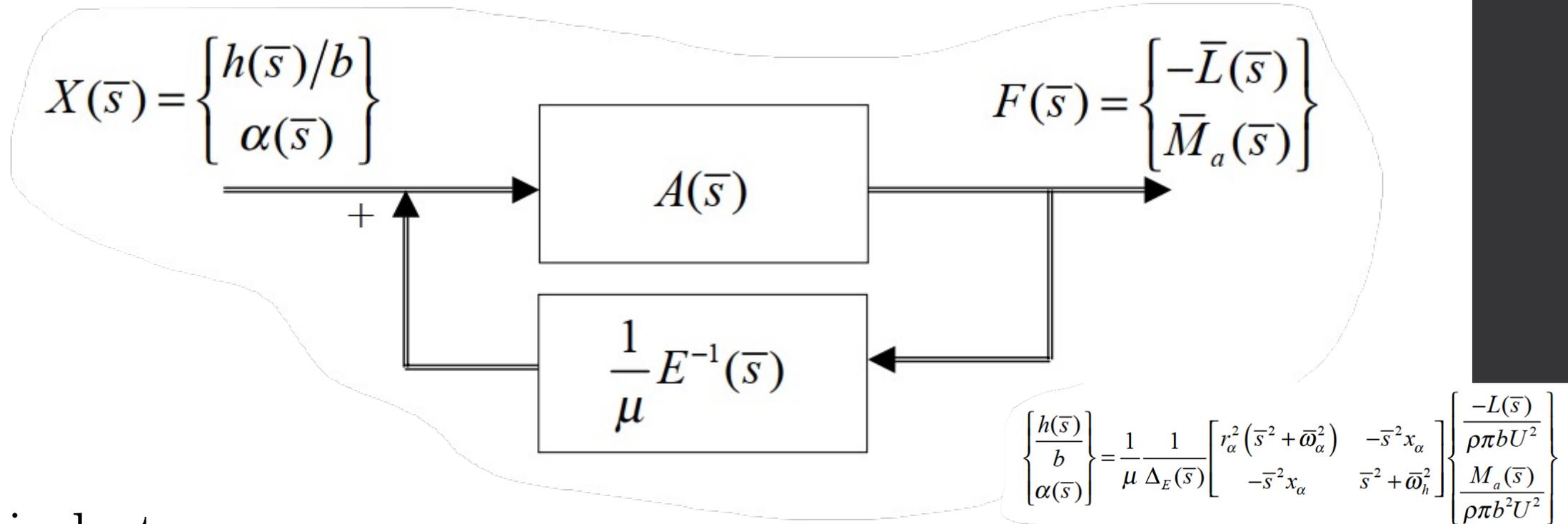
$$\begin{Bmatrix} -\bar{L}(\bar{s}) \\ \bar{M}_a(\bar{s}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{11}(\bar{s}) & -A_{12}(\bar{s}) \\ A_{21}(\bar{s}) & A_{22}(\bar{s}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(\bar{s})/b \\ \alpha(\bar{s}) \end{Bmatrix}$$

$$F(\bar{s}) = A(\bar{s})X(\bar{s})$$

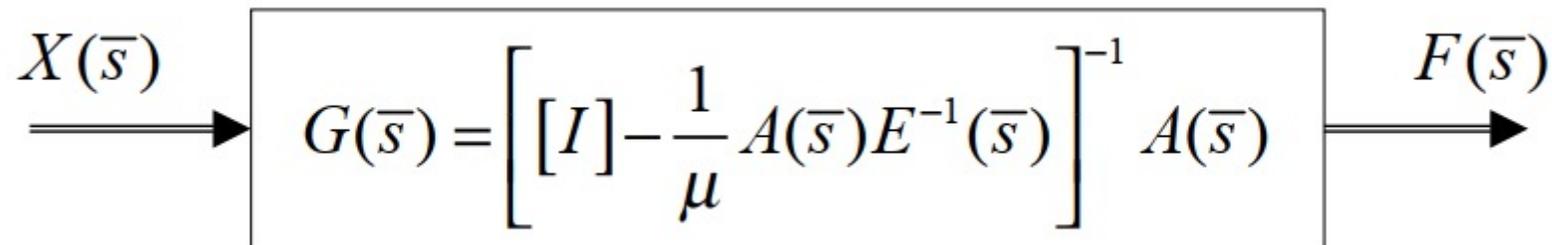
$$A(\bar{s}) = \frac{1}{\Delta(\bar{s})} \begin{bmatrix} -\bar{s}^2 \Delta(\bar{s}) & -(-\bar{s}^2 a_h + \bar{s}) \Delta(\bar{s}) \\ -2\bar{s}N(\bar{s}) & -2 \left[1 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \bar{s} \right] N(\bar{s}) \\ \bar{s}^2 a_h \Delta(\bar{s}) & - \left[\bar{s}^2 \left(\frac{1}{8} + a_h^2 \right) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \bar{s} \right] \Delta(\bar{s}) \\ +2 \left(\frac{1}{2} + a_h \right) \bar{s} N(\bar{s}) & +2 \left[\left(\frac{1}{2} + a_h \right) + \left(\frac{1}{4} - a_h^2 \right) \bar{s} \right] N(\bar{s}) \end{bmatrix}$$

$$C(\bar{s}) \cong \frac{0.5\bar{s}^2 + 0.2808\bar{s} + 0.01365}{\bar{s}^2 + 0.3455\bar{s} + 0.01365} \equiv \frac{N(\bar{s})}{\Delta(\bar{s})}$$

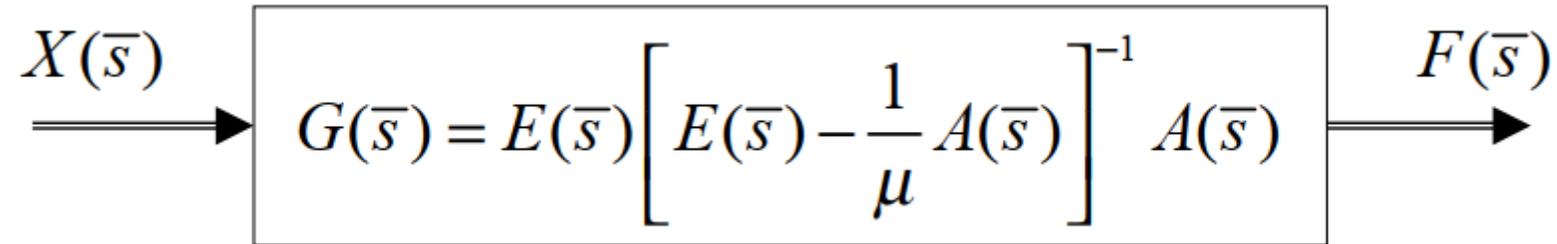
O seguinte sistema com 2 entradas e 2 saídas em malha fechada é obtido considerando a realimentação aeroelástica:



Equivalente a:



ou:



Os polos desse sistema 2x2 múltiplas entradas, múltiplas saídas (MIMO) com realimentação são dados pelas raízes ou autovalores associados à matriz:

$$E(\bar{s}) - \frac{1}{\mu} A(\bar{s})$$

Então, a solução do problema de flutter é:

$$\begin{bmatrix} \bar{s}^2 + \bar{\omega}_h^2 & \bar{s}^2 x_\alpha \\ \bar{s}^2 x_\alpha & r_\alpha^2 (\bar{s}^2 + \bar{\omega}_\alpha^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \frac{-L(\bar{s})}{\rho\pi b U^2} \\ \frac{M_a(\bar{s})}{\rho\pi b^2 U^2} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\mu} A(\bar{s}) \begin{bmatrix} \frac{h(\bar{s})}{b} \\ \alpha(\bar{s}) \end{bmatrix}$$

As soluções não-triviais (problema de autovalor) são obtidas quando:

$$\left| E(\bar{s}) - \frac{1}{\mu} A(\bar{s}) \right| = 0 \quad (\text{determinante do flutter})$$

As 4 raízes da equação característica (obtida do determinante do flutter) são complexas em geral (a não ser que a frequência seja zero, neste caso, uma raiz de complexo conjugado se divide em duas raízes reais):

$$\bar{s} = \bar{\sigma} \pm ik = \frac{\sigma b}{U} \pm i \frac{\omega b}{U}$$

σ : razão de amortecimento aeroelástica
 ω : frequência modal aeroelástica

As raízes são funções de dois parâmetros de voo fundamentais (além das propriedades da seção típica): velocidade e altitude (ou densidade do ar):

$$U \rightarrow \frac{\omega_h b}{U} = \bar{\omega}_h, \quad \frac{\omega_\alpha b}{U} = \bar{\omega}_\alpha$$

$$\rho \rightarrow \frac{m}{\pi \rho b^2} = \mu$$

Note que o inverso da razão de massa (proporcional à densidade do ar) pode ser visto como o ganho do sistema de realimentação!

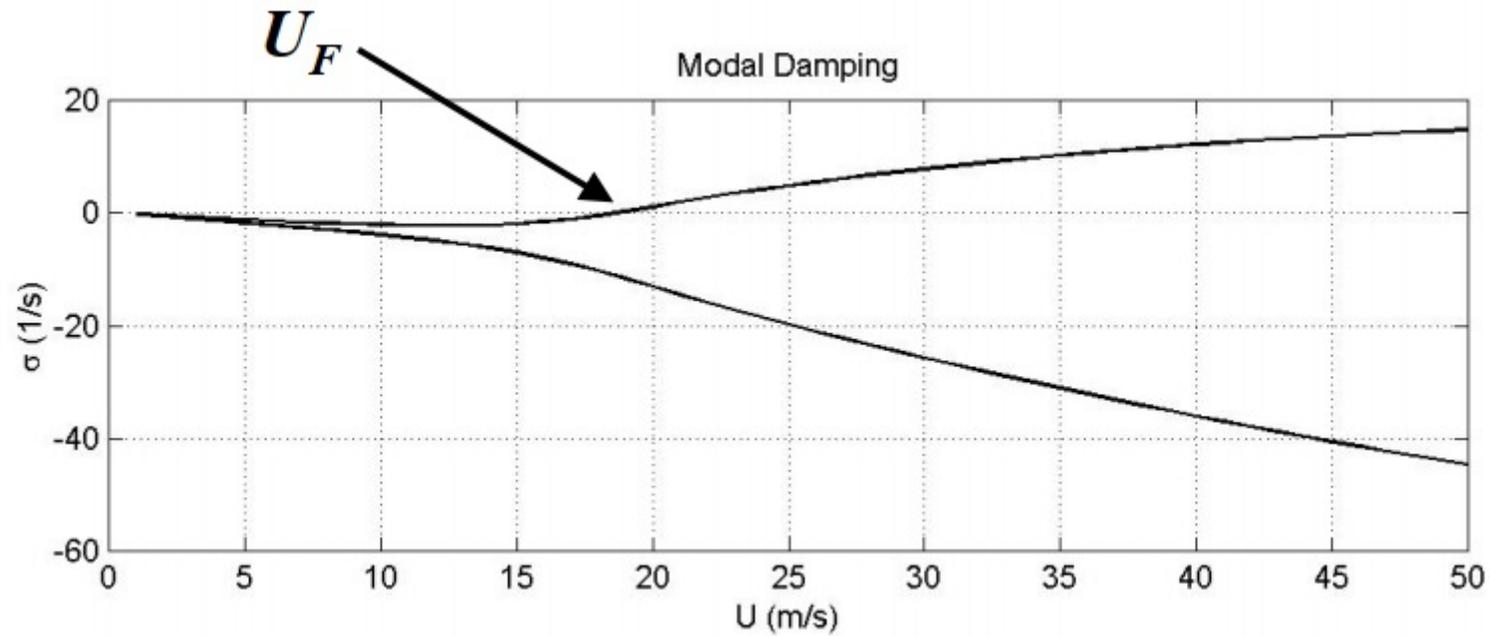
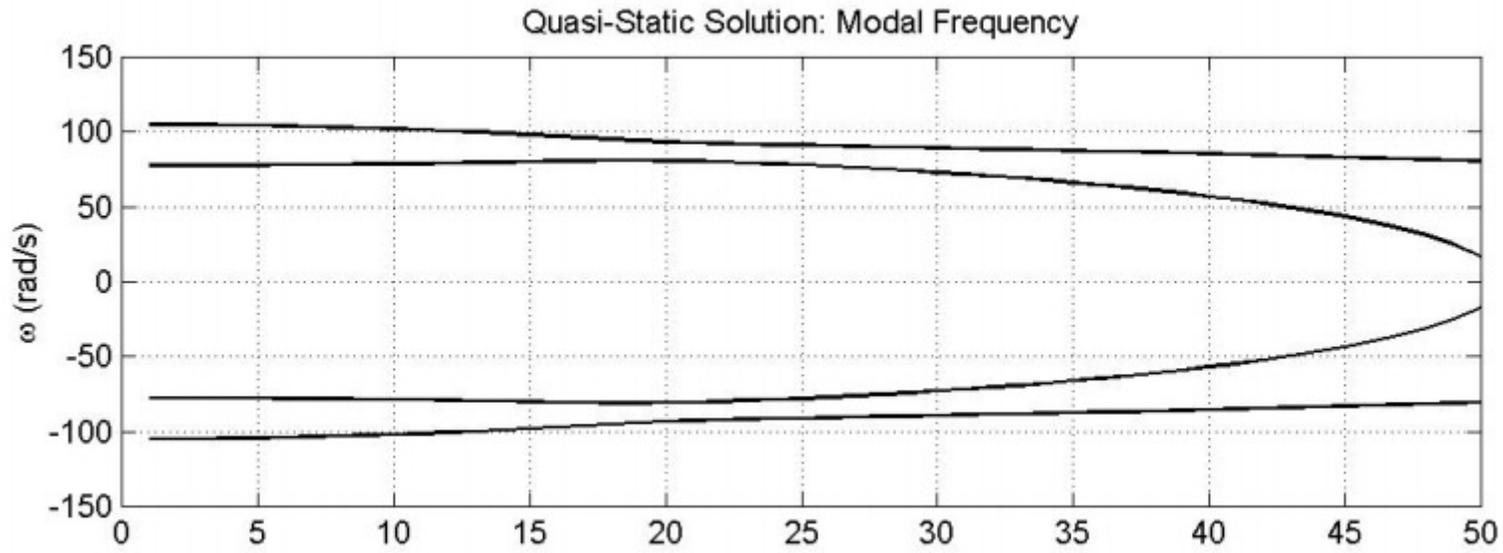
- O flutter é alcançado se qualquer par complexo conjugado se tornar instável (ou seja, a parte real da raiz migra para a parte real positiva do plano complexo; isso significa que o sistema obtém um "amortecimento negativo" para uma certa velocidade e altitude)
- A divergência é alcançada se qualquer uma das raízes reais (do par conjugado complexo que se dividiu em duas raízes reais no eixo real) migra para o eixo real positivo (ou seja, a divergência pode ser vista como um flutter que ocorre na frequência zero)

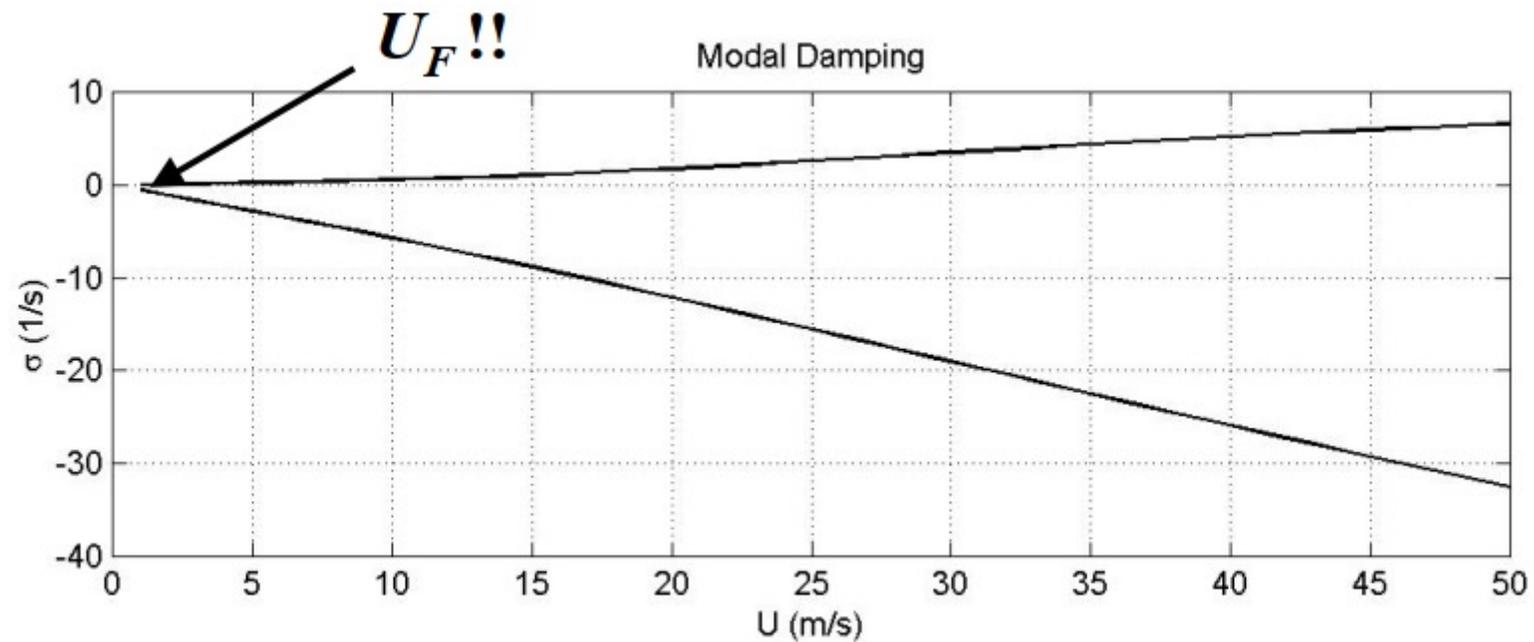
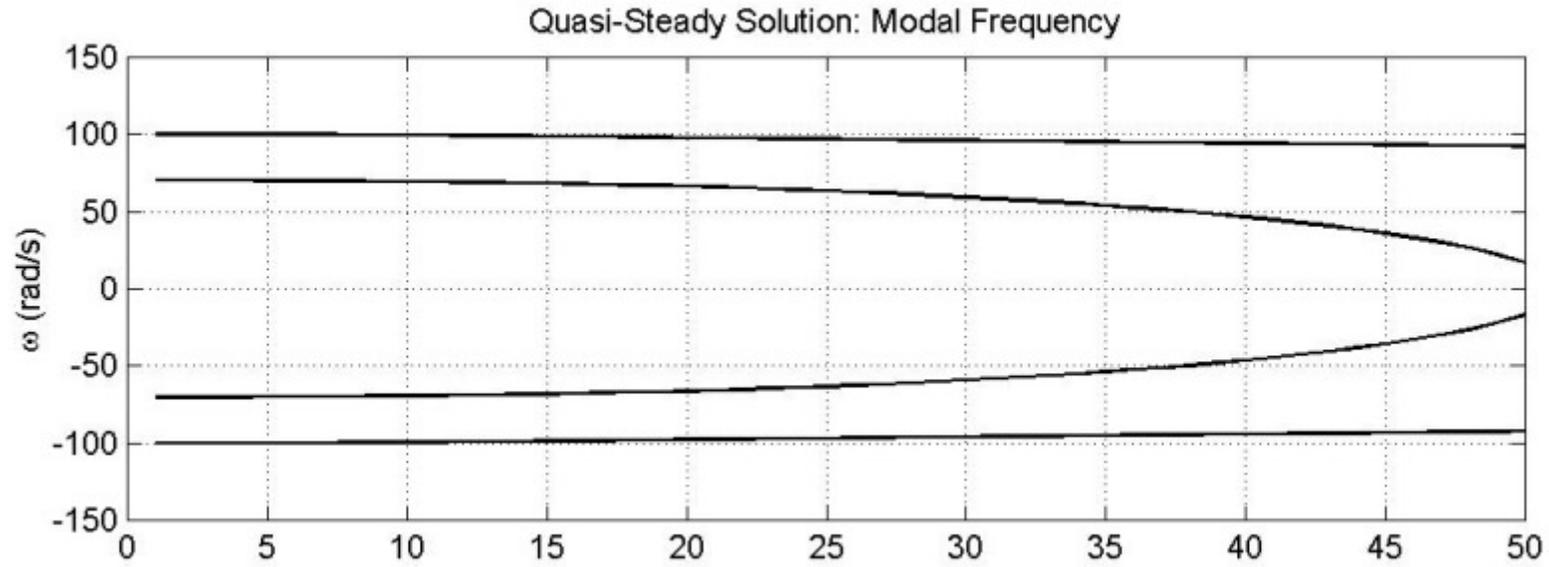
Exemplo de cálculo de flutter

Assuma os valores

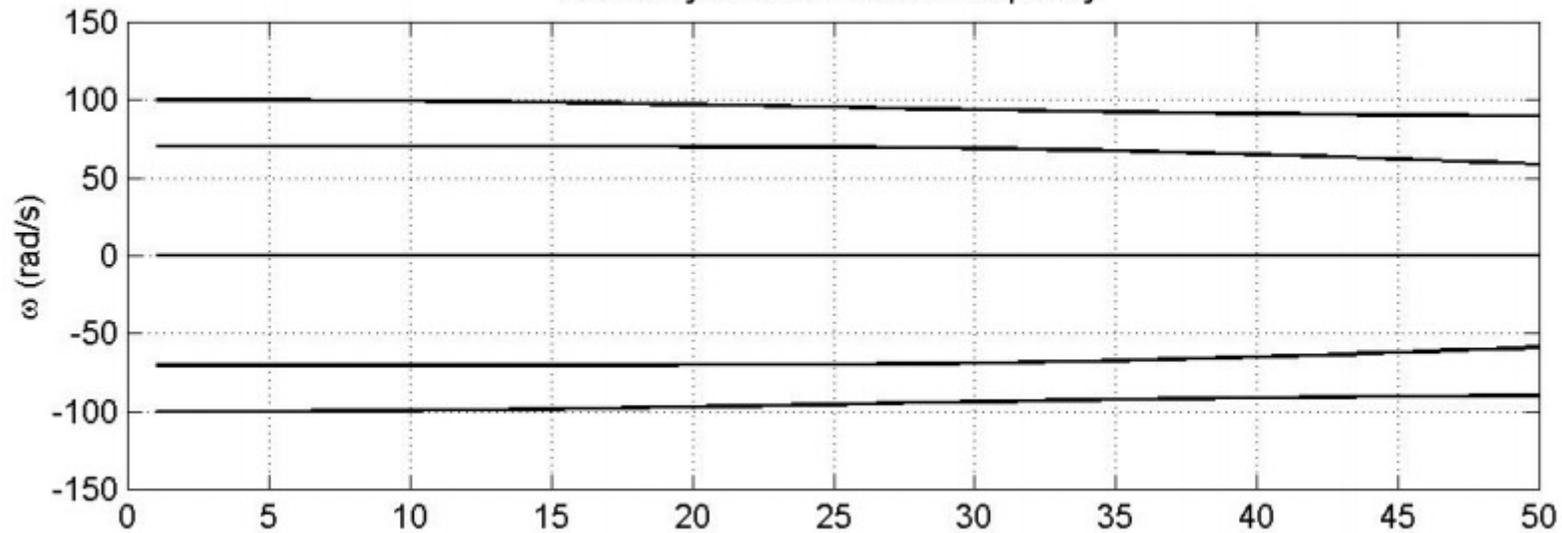
```
% problema de flutter da secao típica
% valores de entrada:
%
m= 3.0;      % massa por unidade de comprimento (kg/m)
ra= 0.5;     % raio de giração em torno do e.e. (unidades de b)
b= 0.4;      % semicorda (m)
wa= 100;     % frequência de arfagem desacoplada (rad/s)
wh= 80;      % frequência de plunge desacoplada (rad/s)
xa= 0.1;     % distancia do c.g. atrás do e.e. (unidades de b)
ah= -0.2;    % distancia do e.e. atrás da metade da corda (u. de b)
rho= 1.225;  % densidade do ar (kg/m^3)
dclda=2*pi;  % inclinação da curva de sustentação - quase-estático
              %      (1/rad)

mu= 4.8721 (output)
```

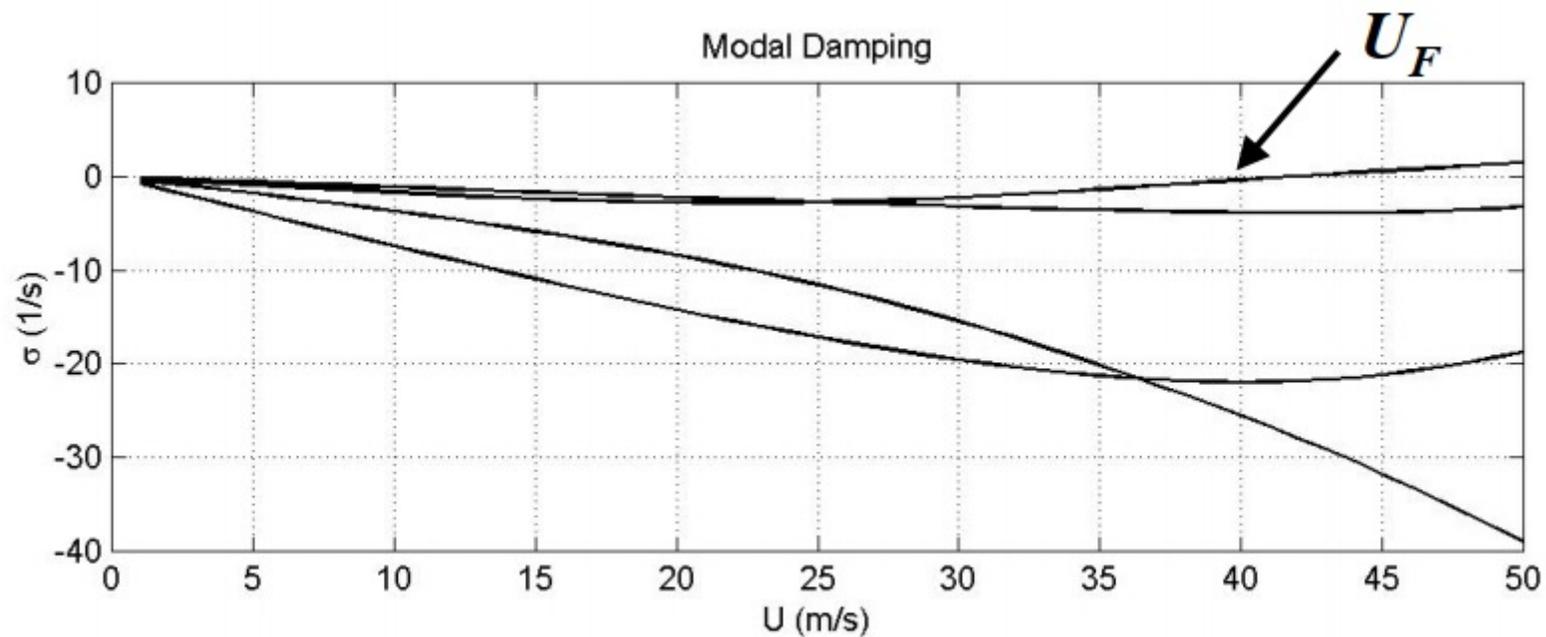




Unsteady Solution: Modal Frequency



Modal Damping



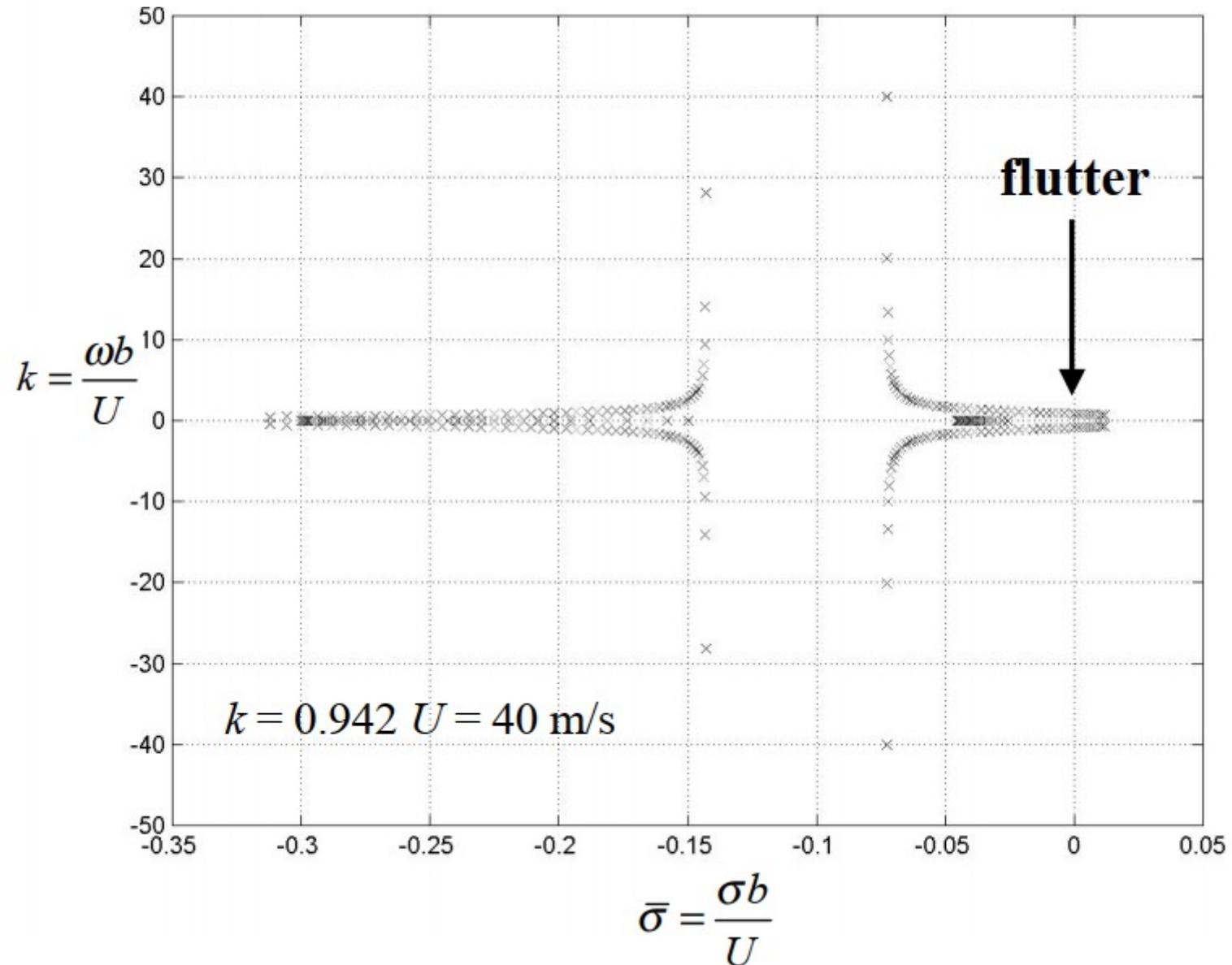
Havia grandes discrepâncias se métodos diferentes fossem usados para as velocidades de flutter.

A abordagem quase-estática é quase sempre muito conservadora. A abordagem quase-estacionária é uma boa representação apenas se a suposição de k pequeno (frequência reduzida) for válida. Observe que, neste caso, as velocidades do escoamento eram relativamente baixas e essa suposição foi muito violada (veja na próxima página o gráfico de raízes não dimensionais: partes reais versus imaginárias contra a velocidade do escoamento no caso transiente):

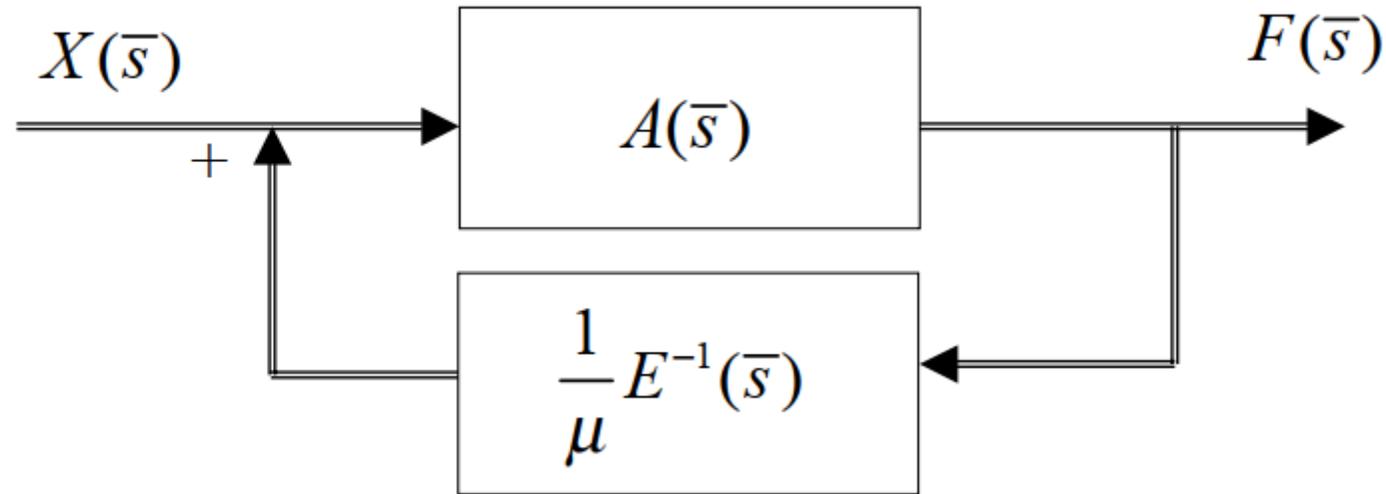
$$\bar{s} = \bar{\sigma} \pm ik = \frac{\sigma b}{U} \pm i \frac{\omega b}{U}$$

O método não estacionário é o mais confiável no presente caso.

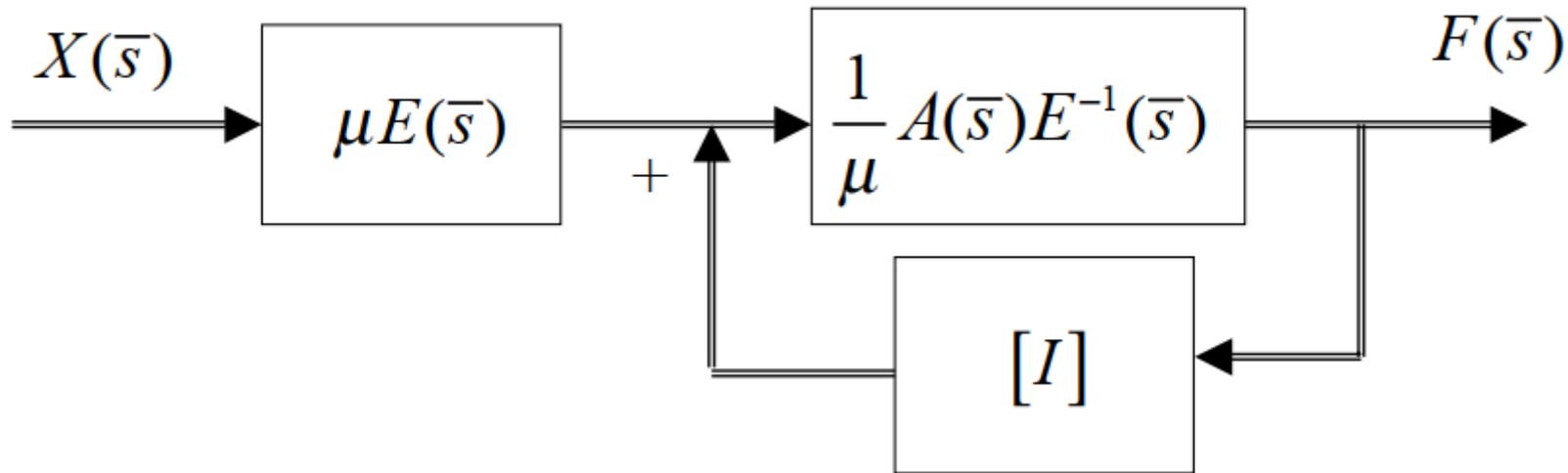
Aerodinâmica não estacionária: evolução com a velocidade



O sistema:



também pode ser expresso em termos de uma realimentação unitária:



como

$$F = \frac{1}{\mu} A E^{-1} (F + \mu E X)$$

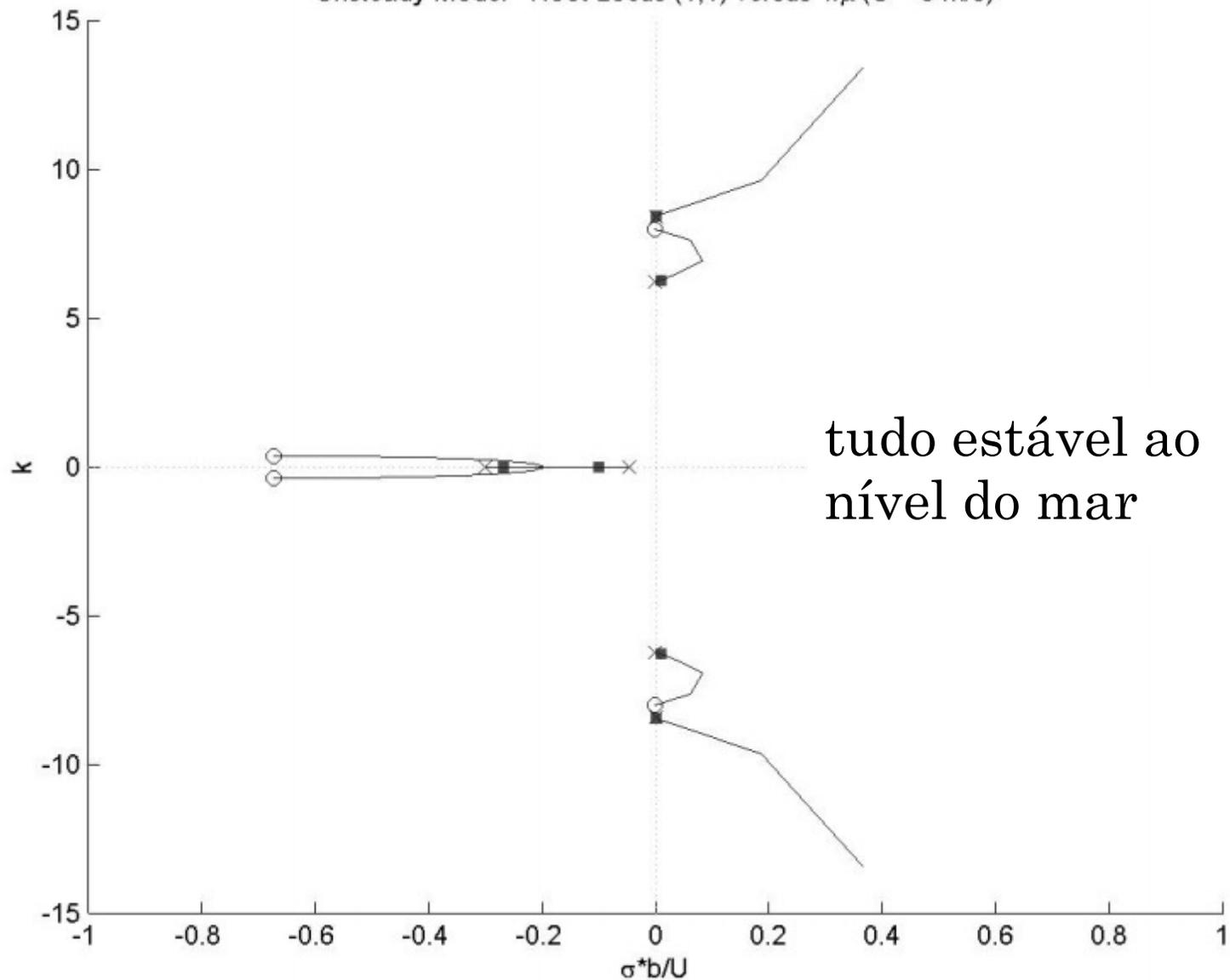
$$\left[I - \frac{1}{\mu} A E^{-1} \right] F = A X$$

$$F = \left[I - \frac{1}{\mu} A E^{-1} \right]^{-1} A X \quad (\text{como anteriormente})$$

- Na próxima análise (modelo não estacionário), os dados usados para a definição de seção típica são os mesmos do exemplo anterior
- "Quadrados" indicam os polos de malha fechada correspondentes à densidade do ar ao nível do mar (1,225 kg / m³); "x" indicam polos da função de transferência de malha aberta e "círculos" indicam zeros da função de transferência de malha aberta
- "Quadrados" no plano do lado direito indicam que, no nível do mar, a seção típica é instável
- Os gráficos foram obtidos para duas velocidades, 5 m/s (estável ao nível do mar) e 50 m/s (instável ao nível do mar), para o “caminho” dinâmico específico (função de transferência SISO):

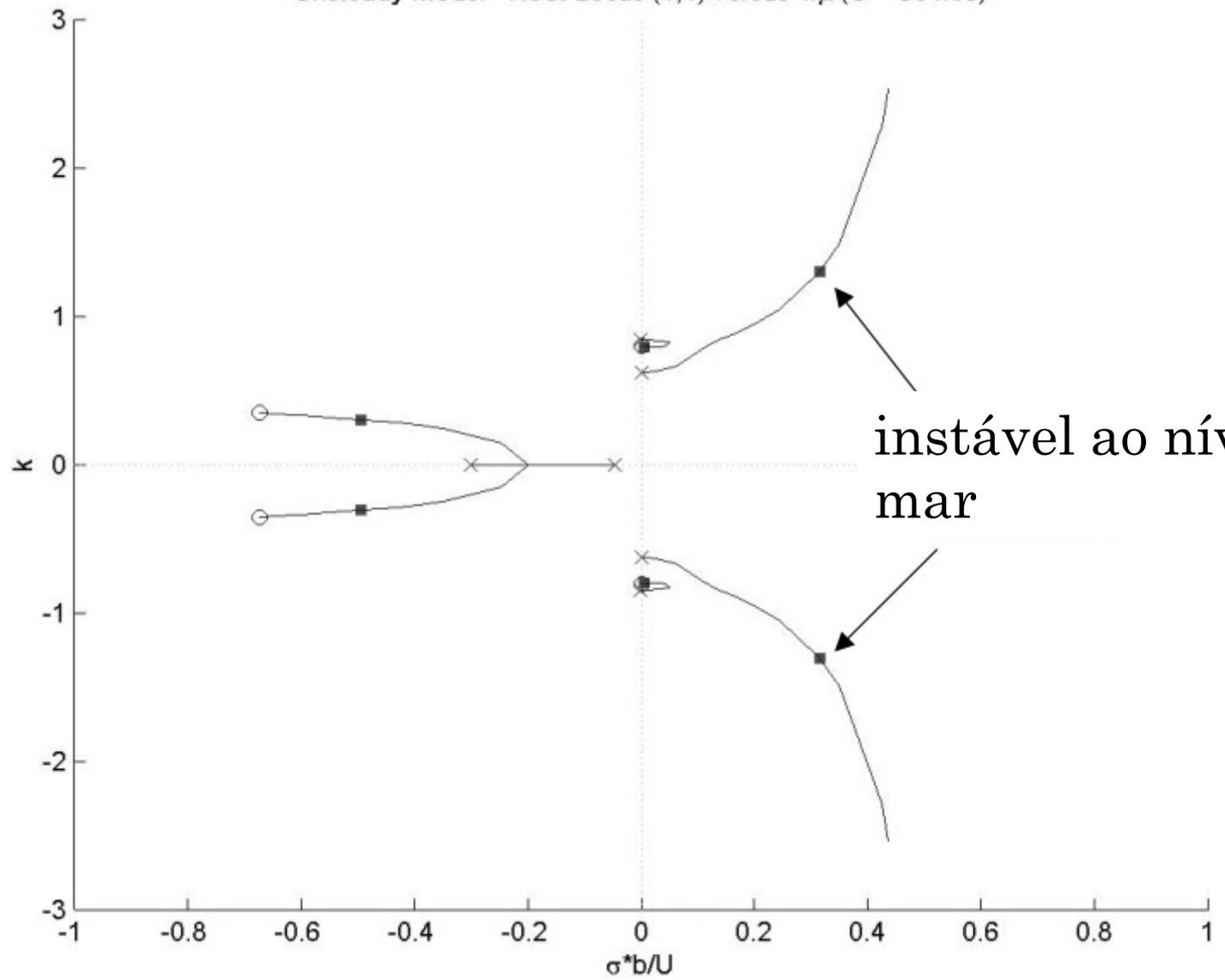
$$h(\bar{s})/b \rightarrow \bar{L}(\bar{s}) \Rightarrow G_{11}(\bar{s})$$

Unsteady Model - Root Locus (1,1) versus $1/\mu$ ($U = 5$ m/s)



tudo estável ao nível do mar

Unsteady Model - Root Locus (1,1) versus $1/\mu$ ($U = 50$ m/s)



- A partir dos gráficos anteriores, torna-se evidente que a natureza do local da raiz depende da velocidade do escoamento. Observe que os quatro polos de malha aberta no eixo imaginário correspondem aos autovalores normalizados de vibração livre (as frequências de ressonância da seção típica)
- A migração dos polos de malha fechada para o plano do lado direito é influenciada no caso de flutter apenas pela aerodinâmica
- Para qualquer sistema de feedback, os polos da função de transferência de malha fechada (que governam a estabilidade do sistema) se movem, à medida que o ganho aumenta, dos polos para os zeros (às vezes no infinito) da função de transferência de malha aberta associada
- O flutter ocorre quando o ganho (densidade do ar) é tal que um polo de malha fechada fica no plano do lado direito. Isso pode ocorrer em uma "altitude negativa", abaixo do nível do mar, o que indica que o sistema está estável nessa velocidade