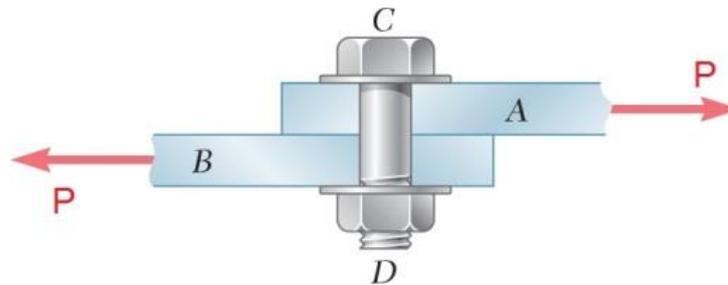


São Paulo, junho de 2020.

1. A ligação é formada pelas chapas A e B e pelo parafuso CD. Nas chapas atuam a força P de 400 kN, conforme desenho abaixo. Sabendo que tensão admissível de cisalhamento do parafuso CD é de 50 MPa. Determine o menor valor admissível do diâmetro do parafuso.



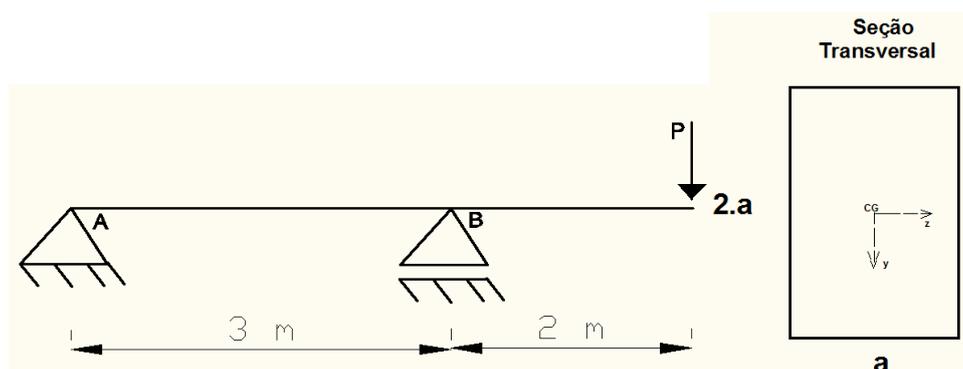
Resposta:

$$\tau_{\max} \geq \tau \rightarrow 50 \cdot 10^3 \geq \frac{V}{\pi \cdot r^2} \rightarrow 50 \cdot 10^3 \geq \frac{400}{\pi \cdot r^2} \rightarrow r \geq 0,05 \text{ m} \rightarrow d_{\min} = 10 \text{ cm}$$

2. A seção retangular de uma viga está sujeita ao esforço cortante (V) originado devido a um carregamento distribuído. Dado que  $V = 240 \text{ kN}$  e que a sua largura e altura são de 12 cm e 20 cm. Determine as tensões cisalhantes no centro de gravidade e num ponto do extremo da seção.

Resposta: Para uma seção retangular maciça, sabe-se que distribuição da tensão cisalhante é uma parábola com valor máximo no CG de:  $\tau_{\max} = 1,5 \frac{V}{A} = 1,5 \frac{240}{12 \cdot 20} = 1,5 \text{ kN/cm}^2$ . E nos extremos é **nulo** seu valor.

3. Determinar a menor dimensão “a” da seção transversal indicada abaixo (retângulo), sabendo que na estrutura devem ser verificadas as tensões normal e cisalhante, onde  $\sigma_{\text{adm}} = 11,25 \text{ MPa}$  e  $\tau_{\text{adm}} = 0,25 \text{ MPa}$ . Adote  $P = 30 \text{ kN}$ .



Resposta:

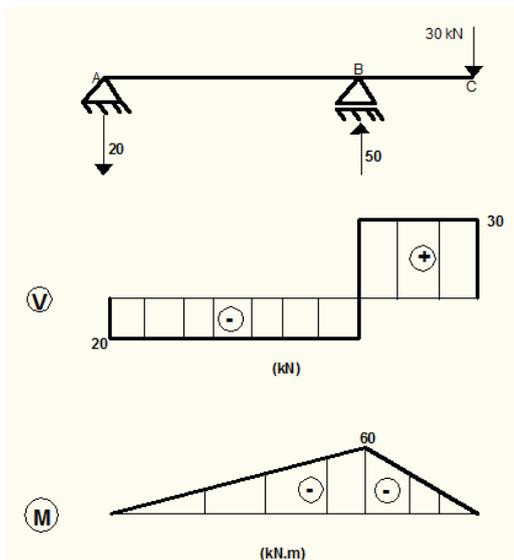
a) Características geométricas:

$$y_{CG} = a;$$

$$A = 2.a^2$$

$$I_{z_{CG}} = \frac{a.(2a)^3}{12} = 0,667.a^4$$

b) Determinar o diagrama de momento fletor:



c) Análise de tensões

Momento máximo ocorre na seção B e de valor:  $M_{\max} = -60 \text{ kN.m}$

Como a tensão admissível é a mesma tanto para tração e compressão, e as distâncias do CG às fibras superiores e inferiores são as mesmas, para essa seção transversal, basta fazer o dimensionamento em uma das fibras mais distantes.

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M \cdot y_{\text{inf}}}{I_z} = \left| \frac{-60.(a)}{0,667.a^4} \right| (\text{compressão}) \leq 11,25.10^3 \text{ (kPa)} \rightarrow a \geq 0,20 \text{ (m)}$$

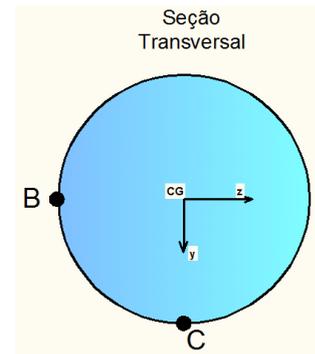
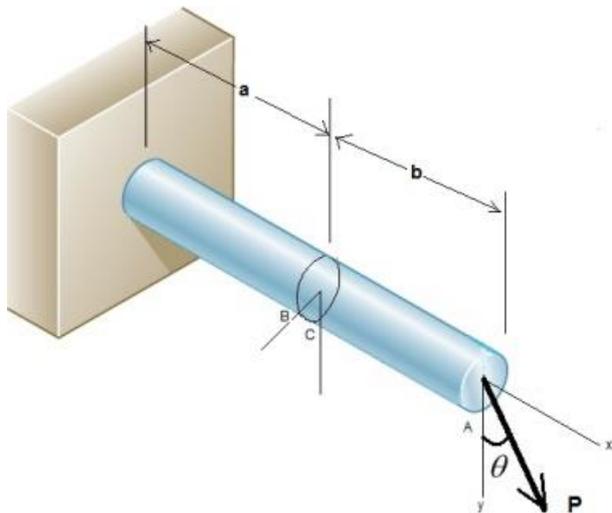
Pelo diagrama, o esforço cortante máximo ocorre nas seções entre B e C de valor:  $V_{\max} = 30 \text{ kN}$ , assim:

$$\tau_{\max} = 1,5 \cdot \frac{V_{\max}}{A} = 1,5 \cdot \frac{30}{2a^2} \leq \tau_{\text{adm}} = 0,25.10^3 \rightarrow a \geq 0,30$$

$$\therefore a_{\min} = 30 \text{ cm}$$

4. A viga engastada e a força  $P = 800 \text{ N}$  estão contidas no plano  $xy$ . A força  $P$  forma um ângulo de  $\theta = 30^\circ$  com  $y$ . A seção transversal é circular maciça com diâmetro de  $40 \text{ mm}$ . Obtenha as tensões normais nos

pontos B e C, de uma seção que está a  $a = 150$  mm do engaste. Adote  $b = 200$  mm. Obtenha também a tensão cisalhante no ponto C.



Resposta:

a) Obter esforços na seção de interesse

$$F = P \cdot \cos(\theta) = 692,82 \text{ N} ; H = P \cdot \sin(\theta) = 400 \text{ N}$$

Na seção a 150 mm do engaste, os esforços são:

$$N = 400 \text{ N (T)}$$

$$M_z = - 692,82 \cdot 200 = - 138.564,1 \text{ N.mm (tracionando as fibras superiores da seção em } a=150\text{mm)}$$



b) Características geométricas:

$$\text{Área da seção: } A = 1.256,64 \text{ mm}^2$$

$$\text{Momento de inércia: } I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 125.663,71 \text{ mm}^4$$

c) Análise de tensões

Fórmula da flexão composta:

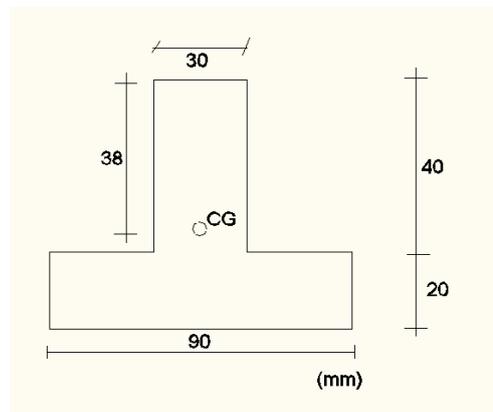
$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_C = \frac{(-138.564,1) \cdot 20}{125.663,71} + \frac{400}{1.256,64} = -21,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{(-138.564,1) \cdot 0}{125.663,71} + \frac{400}{1.256,64} = 0,32 \text{ N/mm}^2$$

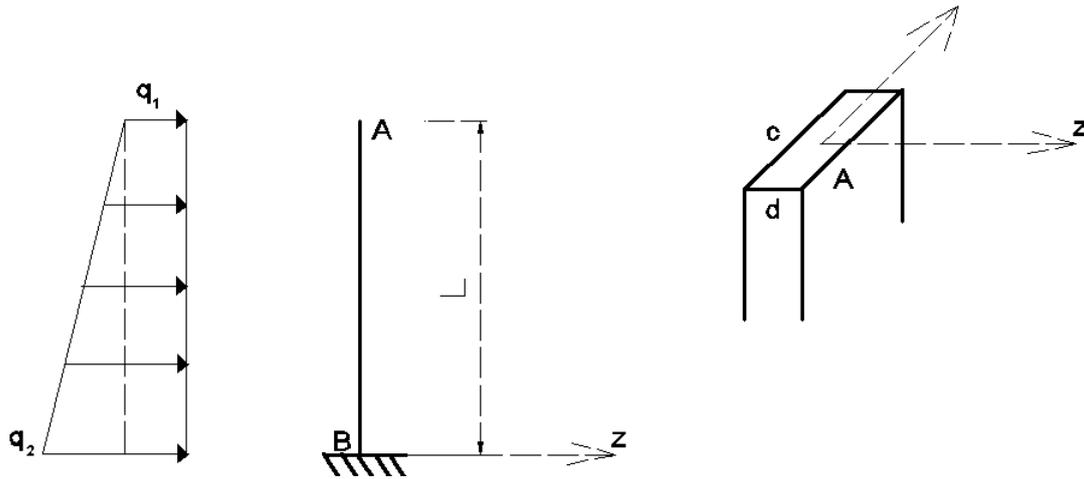
A tensão cisalhante na fibra em C é nula:  $\tau_C = 0$

5. Para certa estrutura, sua seção transversal é a indicada a seguir, com  $I_{cg} = 868000 \text{ mm}^4$ . Sabendo que seu momento crítico é de  $M = P$  e o cortante crítico é de  $V = P$ , unidades em kN e m. Determine o máximo valor de P de modo a atender as tensões admissíveis da normal e do cisalhamento. Dados:  $\sigma_{adm} = 300 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{adm} = 5 \text{ MPa}$



Respostas:  $P_{m\acute{a}x} =$  (kN)

6. A estrutura de contenção esta submetida a uma ação de empuxo do solo, onde a distribuição é linear de valores que variam de  $q_1 = 10 \text{ kN/m}$  a  $q_2 = 30 \text{ kN/m}$ , atuando na direção do eixo z, conforme figura. Sabe-se que a altura L é 5 m, e a seção transversal da estrutura é retangular de dimensão  $c = 40 \text{ cm}$  e  $d = 15 \text{ cm}$ , conforme figura. Determine as máximas tensões normais de tração e compressão e de cisalhamento da estrutura. Desconsidere o peso próprio da estrutura.

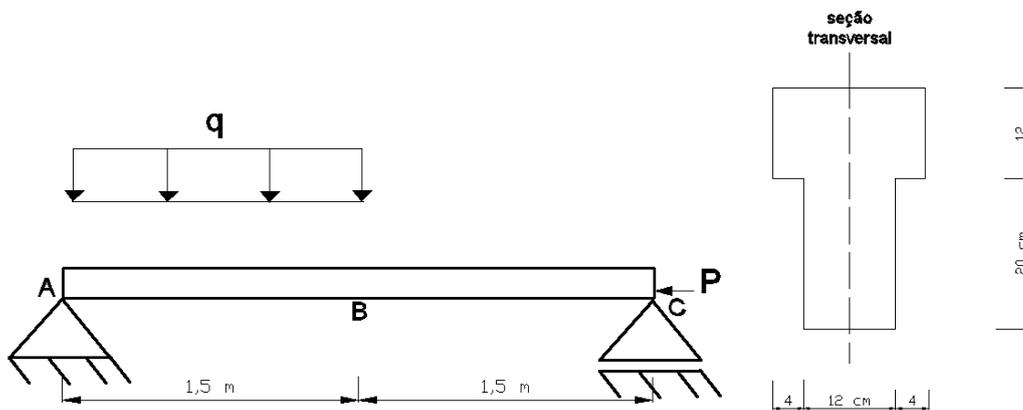


$I = 1,125 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ ;  $M_b = 208,33 \text{ kNm}$ ;  $V = 100 \text{ kN}$

Respostas:  $\sigma_{\text{tração}} = 138,89 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_{\text{compressão}} = 138,89 \text{ MPa}$ ;  $\tau = 2,5 \text{ MPa}$

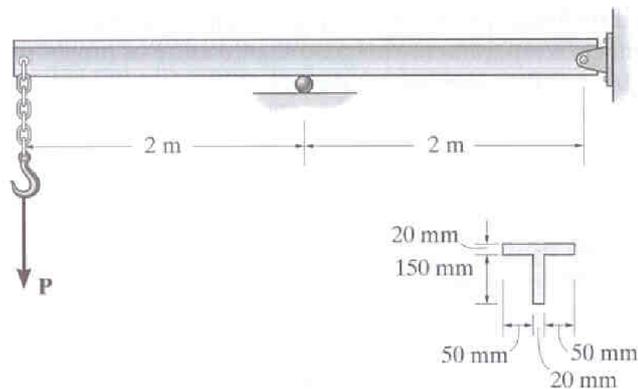
7. Para a viga a seguir, sabendo que  $q = 20 \text{ kN/m}$ , determine:

- Considerando  $P = 0$ ,  $\sigma_{\text{adm}} = 11 \text{ MPa}$  (tração),  $\sigma_{\text{adm}} = 20 \text{ MPa}$  (compressão) e  $\tau_{\text{adm}} = 1 \text{ MPa}$ , obtenha os três coeficientes de segurança, devido a máxima tensão de tração, compressão e cisalhamento.
- Considerando  $P = 100 \text{ kN}$  aplicado no CG, com  $\sigma_{\text{adm}} = 11 \text{ MPa}$  (tração),  $\sigma_{\text{adm}} = 20 \text{ MPa}$  (compressão), obtenha os dois coeficientes de segurança, devido a máxima tensão de tração e compressão.



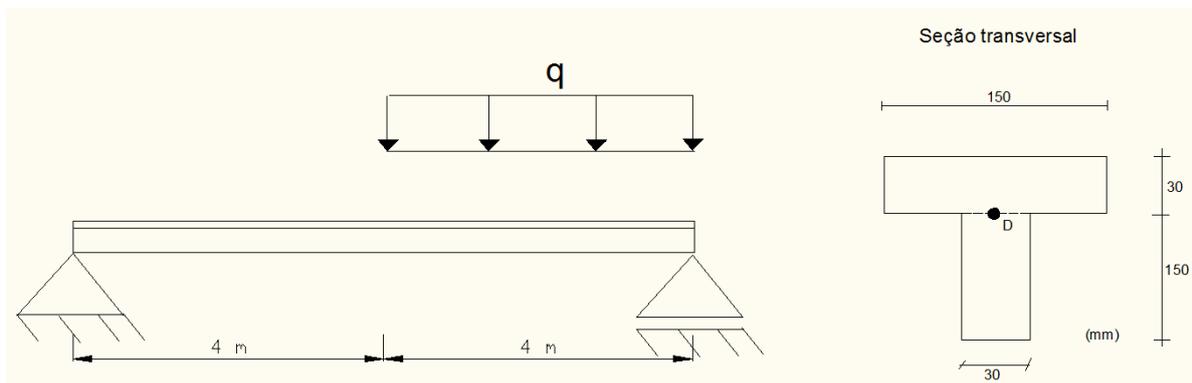
Respostas:

8. A viga de aço tem uma tensão de flexão admissível de 140 MPa e a tensão de cisalhamento de 90 MPa. Determine a carga máxima que ela pode suportar com segurança. Esboce a distribuição das tensões cisalhantes na seção mais crítica.



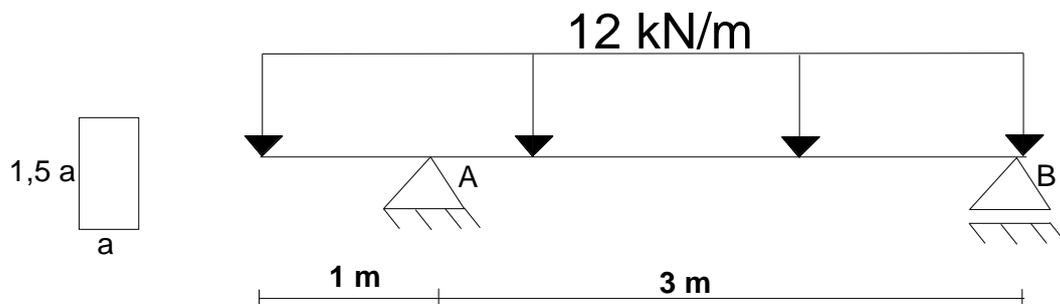
Respostas:

9. A viga mostrada a seguir é feita de duas tábuas coladas. Determine a tensão de cisalhamento máxima que ocorre na cola (ponto D). Dados:  $q = 13,0 \text{ kN/m}$ .



Respostas:  $\tau_D^{MAX} =$

10. A viga mostrada na figura suporta uma carga uniforme de 12 kN/m. Se a viga tiver uma relação altura/largura de 1,5, determinar sua largura mínima (a). A tensão normal admissível é  $\sigma_{adm} = 9 \text{ MPa}$  e a tensão de cisalhamento admissível é  $\tau_{adm} = 0,6 \text{ MPa}$ .



Respostas:  $a = 183 \text{ mm}$

Resolução:  
a =

a) DIAGRAMAS:

b) caract. geométricas:

$$I = a(1,5a)^3/12 = 0,28125a^4$$

$$M_{\text{máx}} = (a \cdot 0,75a) \cdot 0,75a/2 = 0,28125a^3$$

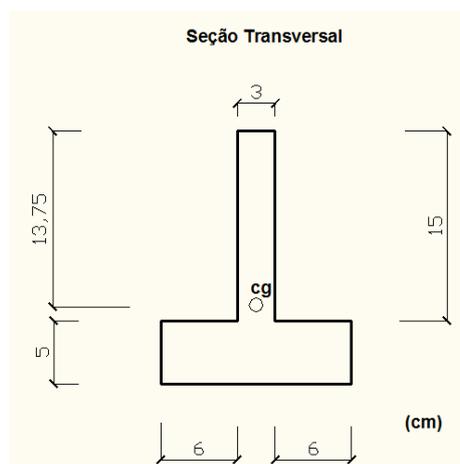
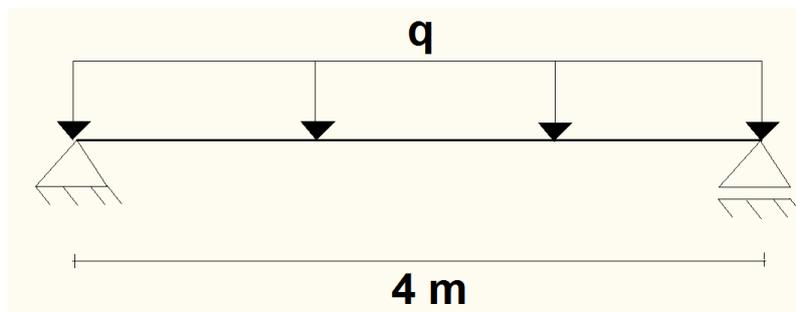
c) análise na tensões:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{10,67 \cdot 0,75a}{0,28125a^4} = \frac{28,14}{a^3} \leq 9,10^3 \rightarrow a \geq 0,111m$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{20 \cdot 0,28125a^3}{a \cdot 0,28125a^4} = \frac{20}{a^2} \leq 2,6 \cdot 10^3 \rightarrow a \geq 0,087m$$

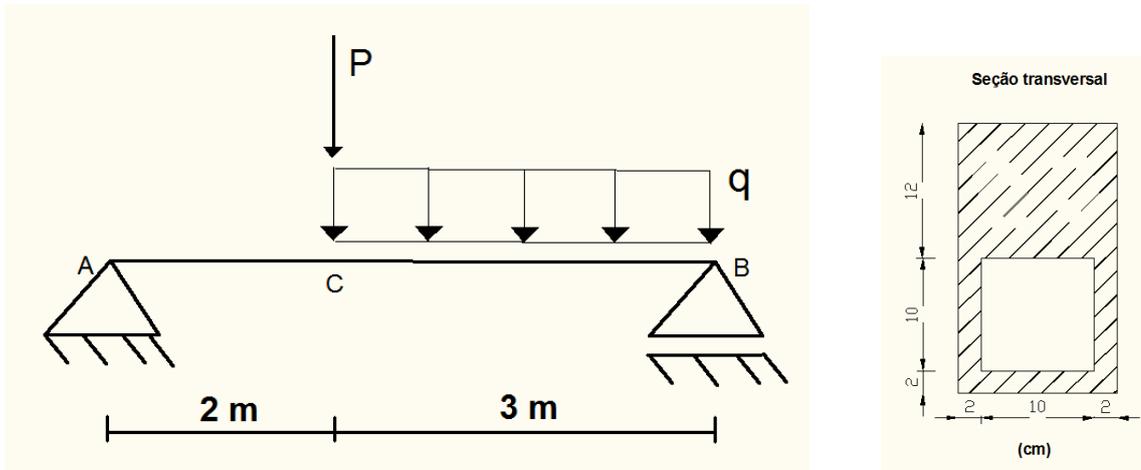
$a = 183mm$

11. Determinar o valor máximo da tensão de cisalhamento e sua distribuição ao longo da seção transversal.  
Dado:  $q = 22,5 \text{ kN/m}$ . É fornecido a posição do centro de gravidade.



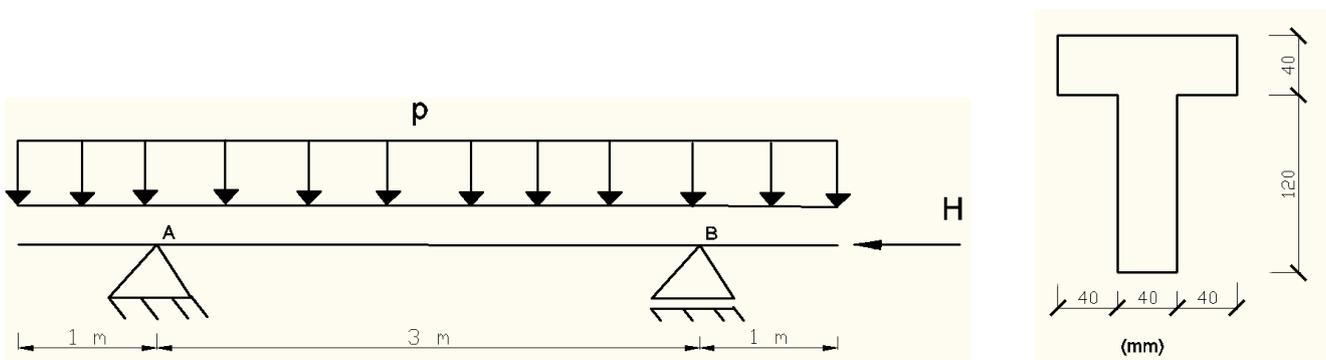
Resposta:

12. Para a viga mostrada na figura, adote  $P = 40 \text{ kN}$  e  $q = 40 \text{ kN/m}$ , determine a distribuição de tensões cisalhantes na seção mais crítica.



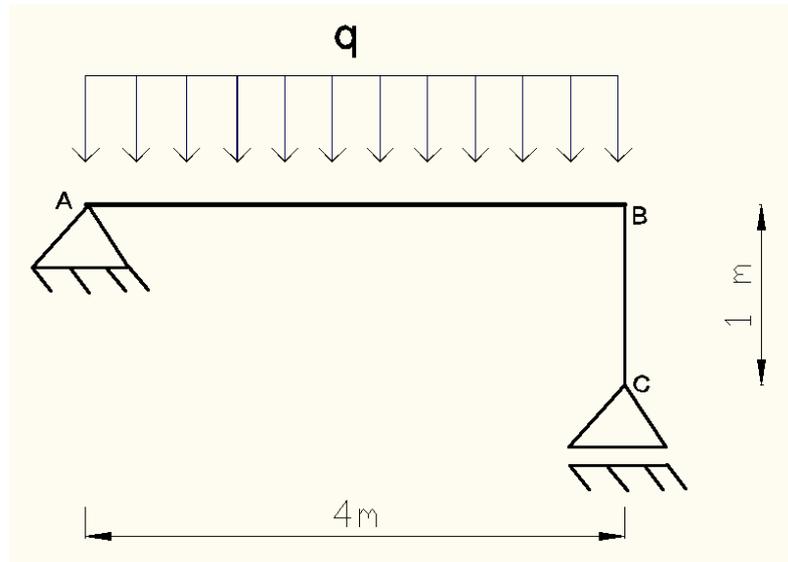
Resposta:

13. Determinar as mínimas tensões de ruptura (ou tensões limites) de tração, compressão e cisalhamento que deve ter o material que constitui a viga a seguir, sabendo-se que a mesma deve trabalhar com um coeficiente de segurança igual a 2,0 para as tensões normais e igual a 1,4 para a tensão cisalhante. Considerar  $p = 20 \text{ kN/m}$  e  $H = 80 \text{ kN}$  (aplicado no centro geométrico da seção transversal).



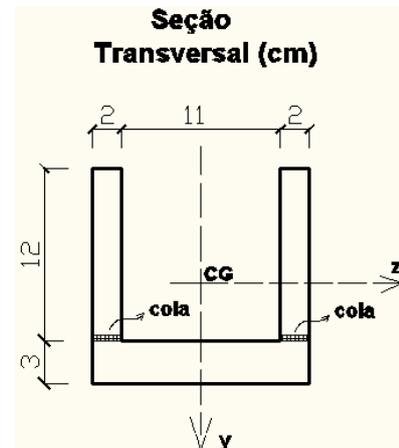
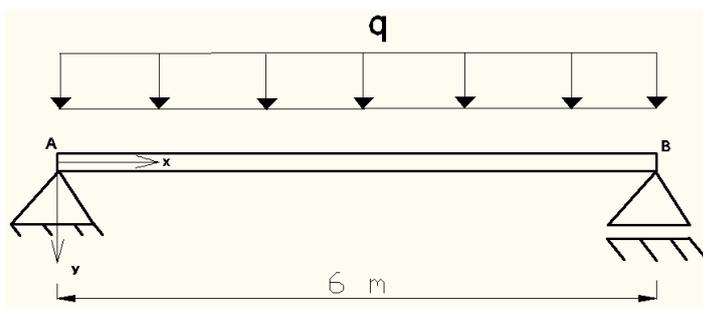
14. Sabendo-se que  $q = 40 \text{ kN/m}$ , e que toda a estrutura possui seção transversal quadrada de lado "a", determine a menor dimensão admissível de "a", de modo a atender as condições de tensões para toda a estrutura.

Dados:  $\sigma_{adm}^t = 8 \text{ MPa}$  (tensão adm. de tração);  $\sigma_{adm}^c = 10 \text{ MPa}$  (tensão adm. de compressão) e  $\tau_{adm} = 1 \text{ MPa}$  (tensão adm. ao cisalhamento).



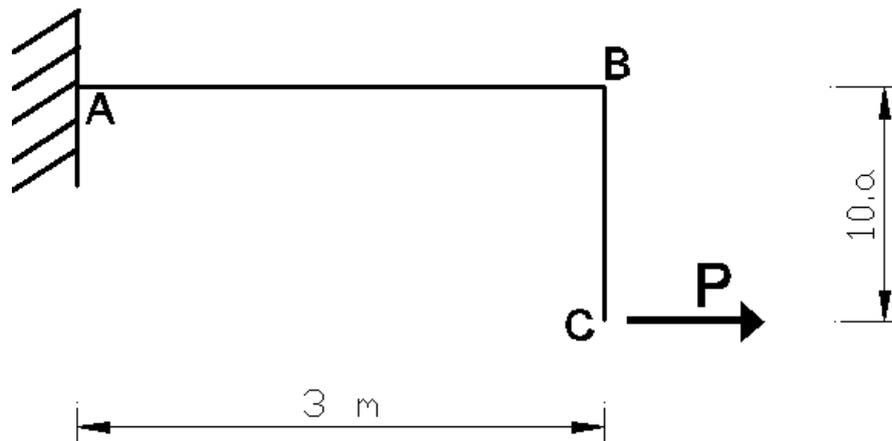
Resposta:

15. Sabendo-se que a seção transversal da viga a seguir é formada por um perfil “U”, a qual foi obtida pela colagem de perfis retangulares de madeira nas regiões indicadas, obtenha a carga distribuída máxima admissível ( $\bar{q}$ ). São dadas as seguintes tensões admissíveis para a madeira e para a cola: Madeira:  $\bar{\sigma}_{\text{tração}} = 60 \text{ MPa}$ ;  $\bar{\sigma}_{\text{compressão}} = 150 \text{ MPa}$ ; Cola:  $\bar{\tau} = 8,5 \text{ MPa}$ .



Resposta:  $\bar{q} =$  (kN/m)

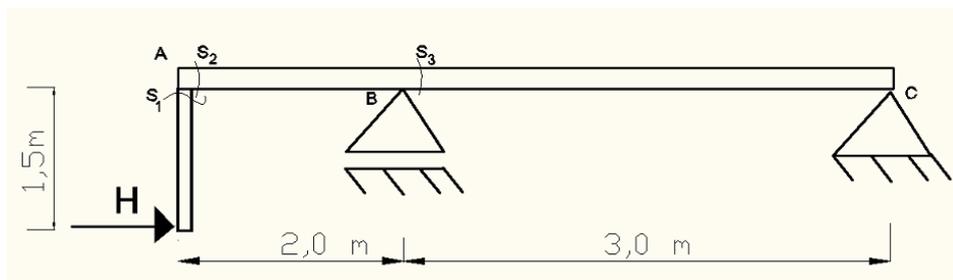
16. A estrutura a seguir possui seção transversal quadrada de dimensão “a”. Determinar o menor valor admissível de “a”. Sabendo-se que:  $P = 100 \text{ kN}$ ;  $\bar{\sigma}_{\text{tração}} = 400 \text{ MPa}$ ,  $\bar{\sigma}_{\text{compressão}} = 500 \text{ MPa}$  e  $\bar{\tau}_{\text{adm}} = 1,0 \text{ MPa}$ . Obs.: O comprimento de BC é  $10.a$ .



Resposta:  $a =$

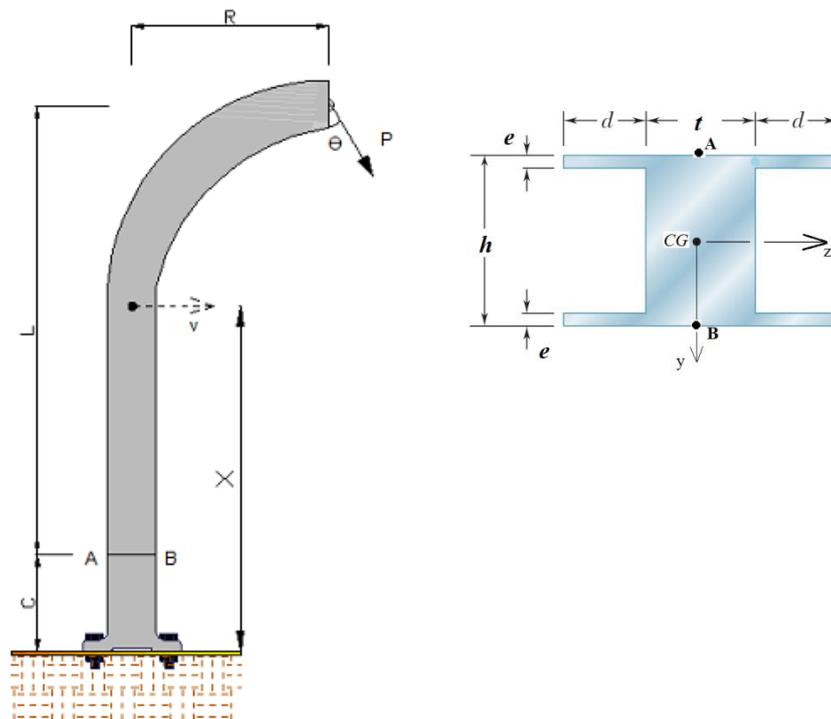
17. Sabendo-se que a estrutura a seguir possui seção quadrada de lado 12 cm e que  $H = 100$  kN, determine a tensão cisalhante máxima na seção  $S_3$ .

Obs.1:  $S_3$  está numa seção imediatamente posterior ao apoio B.



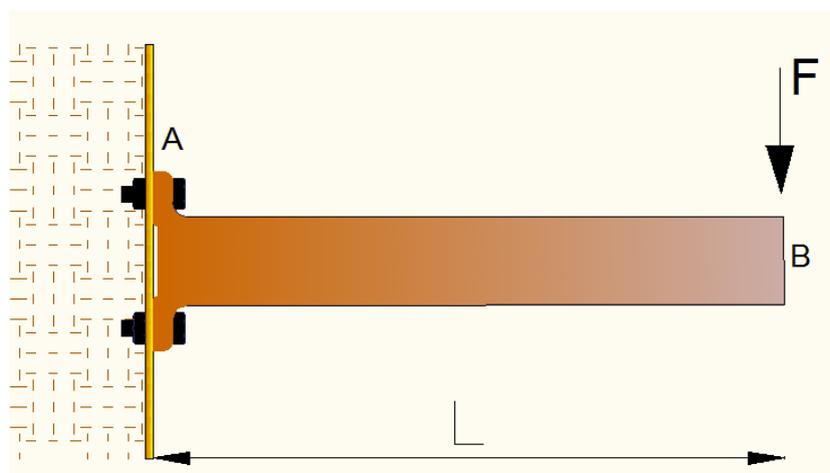
Respostas:

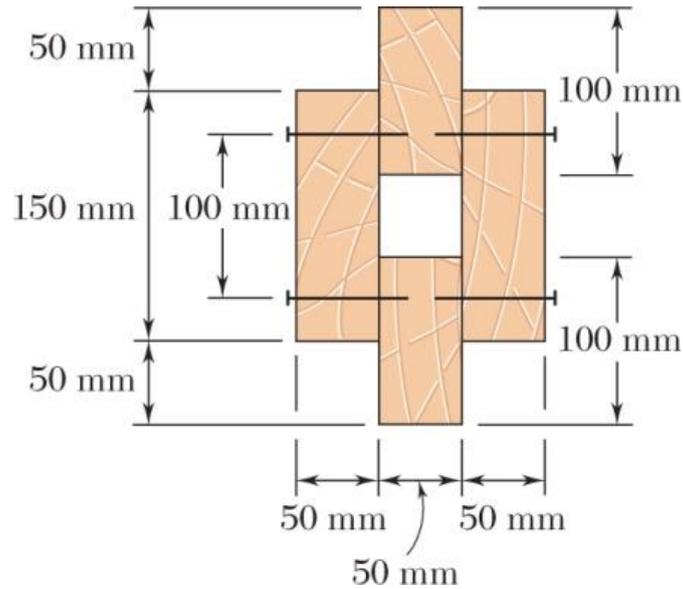
18. O poste é engastado no solo e tem uma força concentrada aplicada no ponto indicado na figura. Seu valor é devido ao peso dos cabos de energia elétrica de  $P = 5$  kN, de modo a estar atuando no seu plano médio, inclinado com a vertical em um ângulo de  $\theta = 30^\circ$ . A seção transversal (ST) de todo o poste é indicada. A força  $P$  e as cotas das distâncias  $R$  e  $L$  estão com referência ao CG da ST. Adote  $C = 1,0$ m,  $R = 1,5$ m,  $L = 2,5$ m,  $e = 12$  mm,  $d = 50$ mm,  $t = 100$ mm,  $h = 150$ mm.. Obtenha distribuição da tensão cisalhante extrema da ST na cota a  $C$  metros do engaste.



Resposta:

19. Para a viga de madeira do tipo Ipê-roxo que está em balanço, ver figura, admita que  $E = 70 \text{ GPa}$ ,  $F = 50 \text{ kN}$ ,  $L = 3 \text{ m}$  e que a seção transversal seja a indicada na figura, determine a distribuição das tensões cisalhantes na linha do seu CG de uma seção junto ao engaste.





Resposta:  $\tau_{CG} =$

20. Calcule as tensões cisalhantes nos pontos A, B, C e D da seção transversal (ST) indicada a seguir. Em seguida, esboce o diagrama de sua distribuição ao longo da ST, indicando seus valores extremos. *Dados:*  $V = 350 \text{ kN}$ ,  $I_z = 34.923 \text{ cm}^4$ .

**Resposta:**

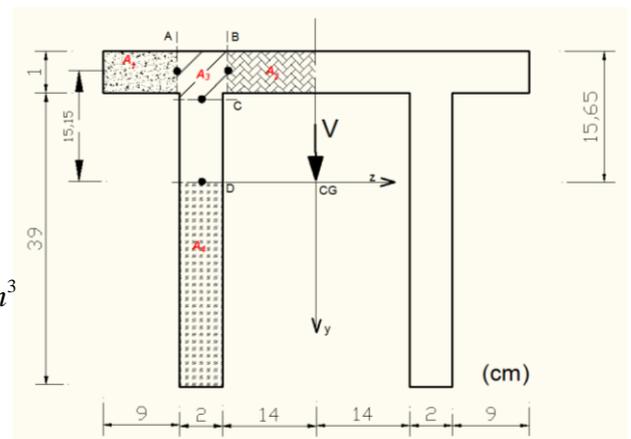
$$\tau_i = \frac{V \cdot M_{s_i}}{t_i \cdot I_z}$$

$$M_{s_A} = A_1 \cdot y_A = 1 \cdot 9 \cdot 15,15 = 136,35 \text{ cm}^3$$

$$M_{s_B} = A_2 \cdot y_A = 1 \cdot 14 \cdot 15,15 = 212,1 \text{ cm}^3$$

$$M_{s_C} = (A_1 + A_2 + A_3) \cdot y_A = 1 \cdot (9 + 2 + 14) \cdot 15,15 = 378,75 \text{ cm}^3$$

$$M_{s_D} = A_4 \cdot y_B = 2 \cdot (40 - 15,65)^2 / 2 = 592,92 \text{ cm}^3$$



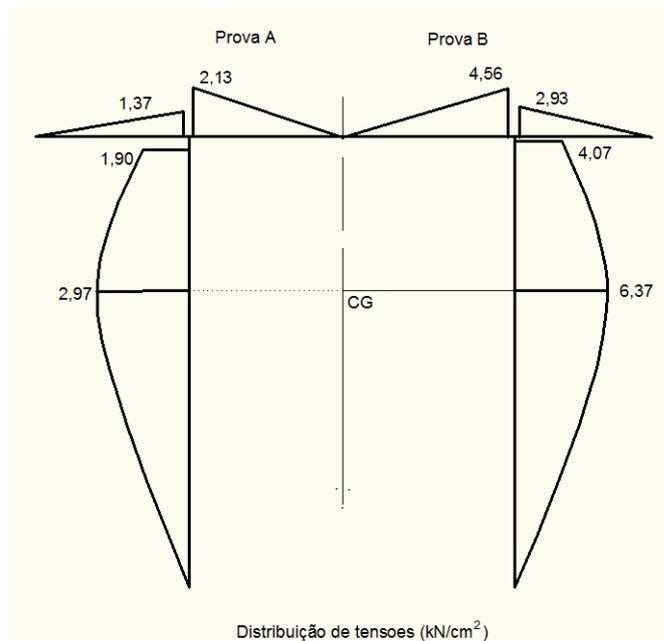
$$\tau_i = \frac{350 \cdot M_{s_i}}{t_i \cdot 34923} = \frac{M_{s_i}}{99,78 \cdot t_i}$$

$$\tau_A = \frac{136,35}{99,78 \cdot 1} = 1,37 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_B = \frac{212,1}{99,78 \cdot 1} = 2,13 \text{ kN/cm}^2$$

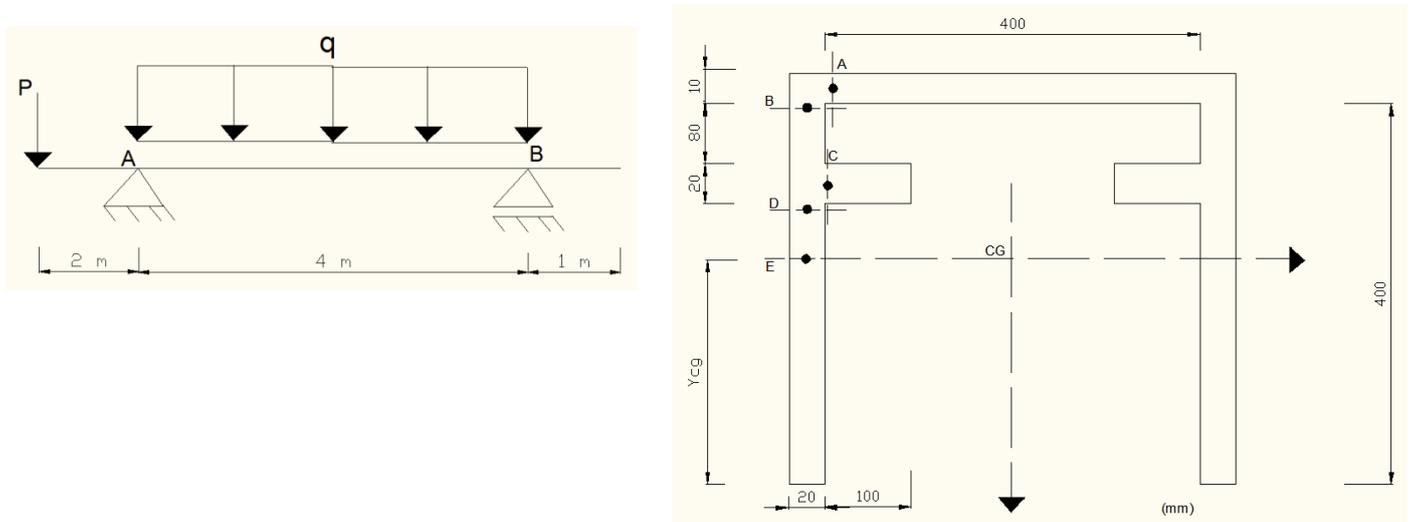
$$\tau_C = \frac{378,75}{99,78 \cdot 2} = 1,90 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_D = \frac{592,92}{99,78 \cdot 2} = 2,97 \text{ kN/cm}^2$$



Distribuição de tensões (kN/cm<sup>2</sup>)

21. Para a estrutura a seguir, determine as tensões cisalhantes, em  $N/mm^2$ , nos pontos A, B, C, D e E da seção mais solicitada à força cortante. Em seguida, esboce o diagrama de sua distribuição ao longo da ST, indicando seus valores extremos. Dados:  $P = 100\text{ kN}$ ,  $q = 30\text{ kN/m}$ ,  $Y_{CG} = 255\text{ mm}$ ,  $I_z = 37301 \times 10^4\text{ mm}^4$ .



Resposta:

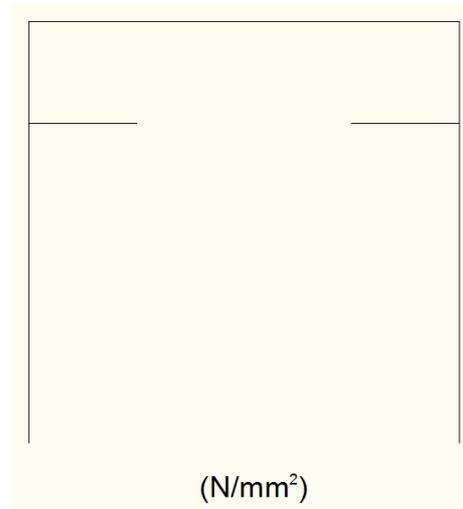
$$\tau_A =$$

$$\tau_B =$$

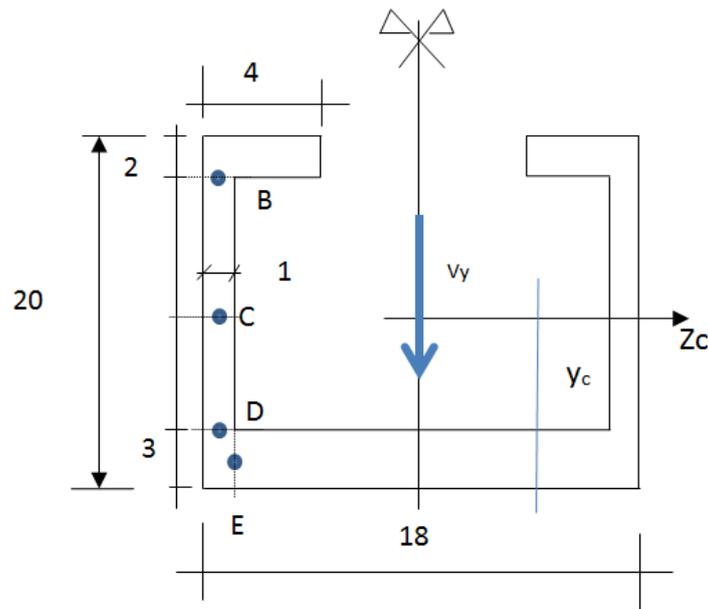
$$\tau_C =$$

$$\tau_D =$$

$$\tau_E =$$



22. Determine as tensões de cisalhamento  $\tau_i$  nos pontos B, C, D e E da seção transversal da barra solicitada por uma força cortante  $V=300\text{kN}$ . Desenhe a distribuição de cisalhamento ao longo da seção transversal. O ponto C esta no eixo que passa pelo centroide da seção transversal. Considerando que o  $\tau_{adm}=100\text{ MPa}$ , qual é o coeficiente de segurança ao cisalhamento? Dado  $I_{z_c} = 8.385 \times 10^3\text{ cm}^4$  e  $y_c=7\text{ cm}$ .



Resposta:

23. A seção transversal de uma viga, ilustrada na figura a, é submetida a uma força cortante  $V$  para baixo, conforme indicado na mesma figura. Considere a seção transversal de paredes finas (seção delgada) com espessura constante de 0,5 cm. A posição do baricentro da seção transversal está indicada na figura por “G”. O momento de inércia da seção inteira em relação ao eixo  $z$  vale  $I = \frac{1300}{3} \text{ cm}^4$ . Considere  $V = 26.000 \text{ N}$ . Calcular a distribuição de tensão de cisalhamento ao longo da seção. Desenhe os gráficos e indique claramente os valores notáveis em módulo (máximos, mínimos, etc.) bem como indique o sentido da tensão utilizando setas. Apresente o resultado de forma clara na figura no verso dessa folha. Justifique com os cálculos necessários.

**Dica:** No corte da viga representada na Figura b estão indicados os sentidos positivos dos esforços solicitantes  $V(x)$  e  $M(x)$ . Pela equação diferencial de equilíbrio:  $V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$ . Logo, se  $V(x)$  é positivo,  $\frac{dM(x)}{dx}$  também é positivo.

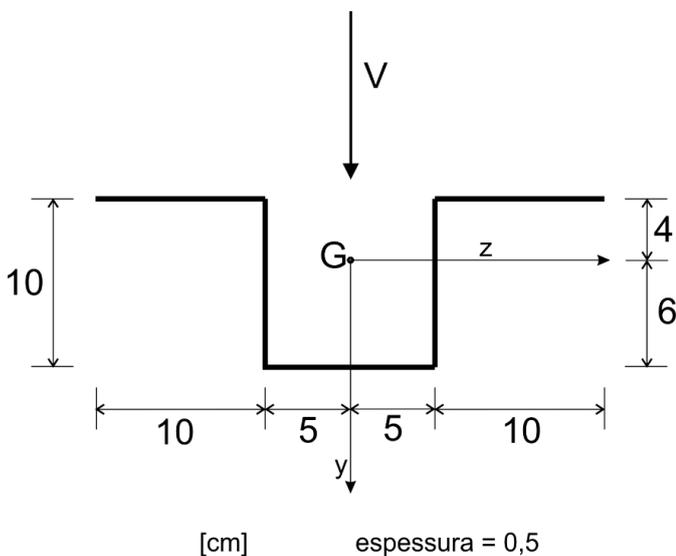


Figura a

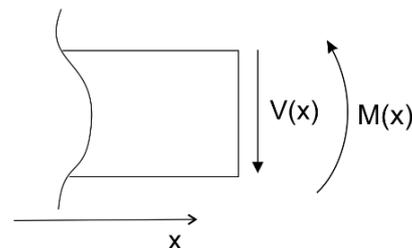
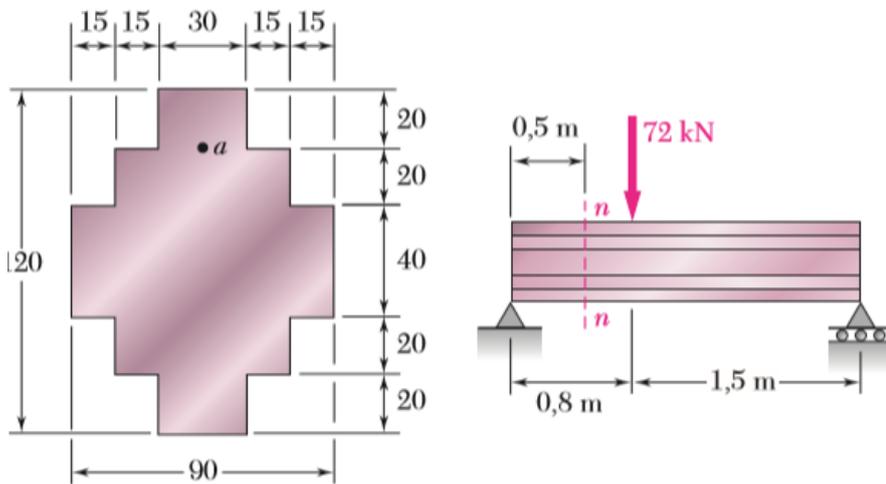


Figura b

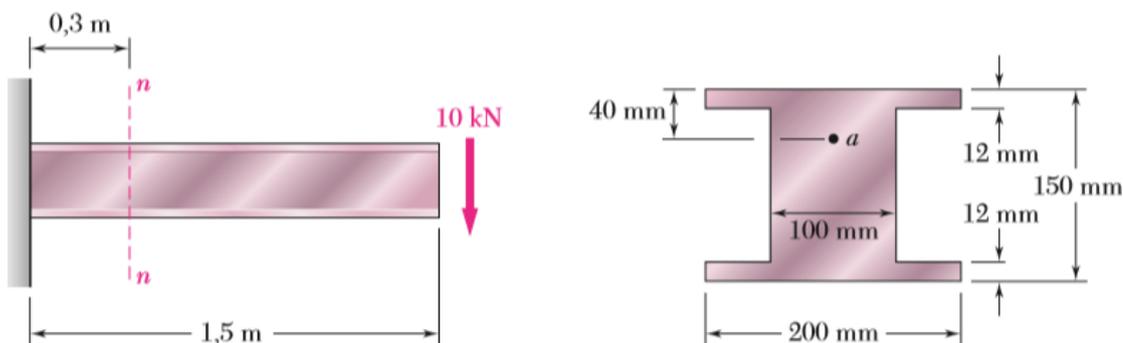
Resposta:

24. (Beer J.) Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção n-n e determine (a) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (b) a tensão de cisalhamento no ponto a.

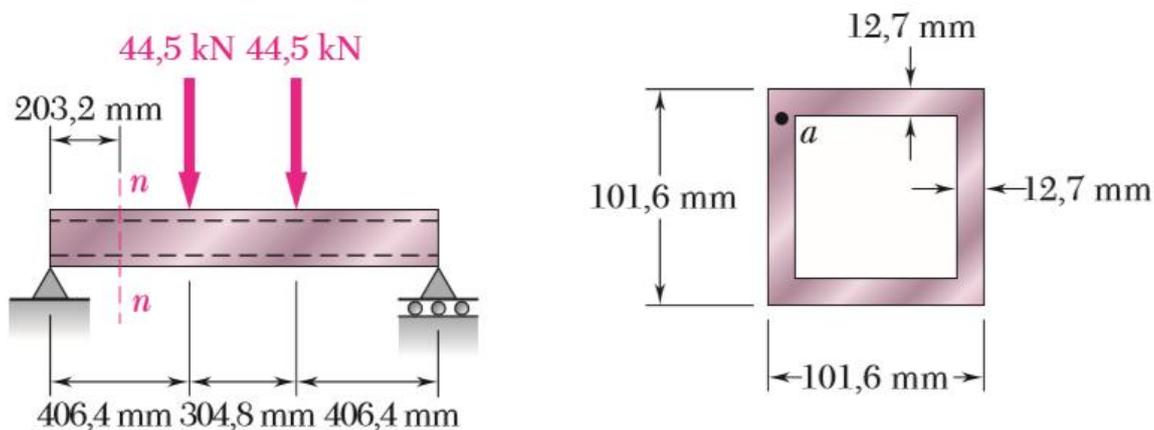


Dimensões em mm

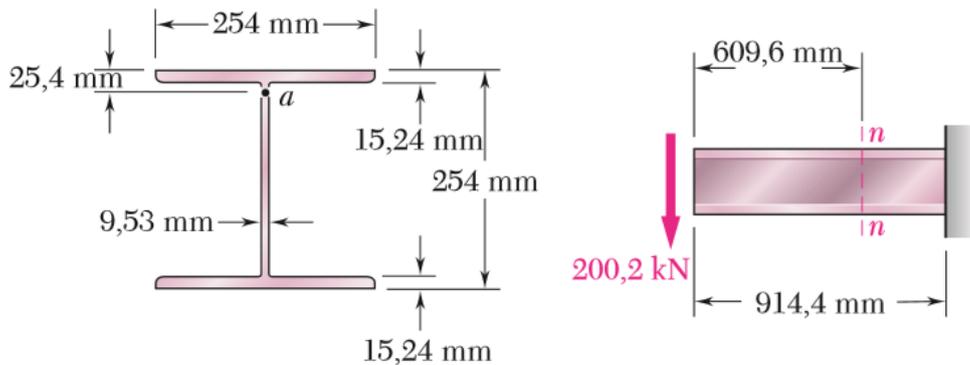
25. (Beer J.) Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção n-n e determine (a) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (b) a tensão de cisalhamento no ponto a.



26. (Beer J.) Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção n-n e determine (a) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (b) a tensão de cisalhamento no ponto a.

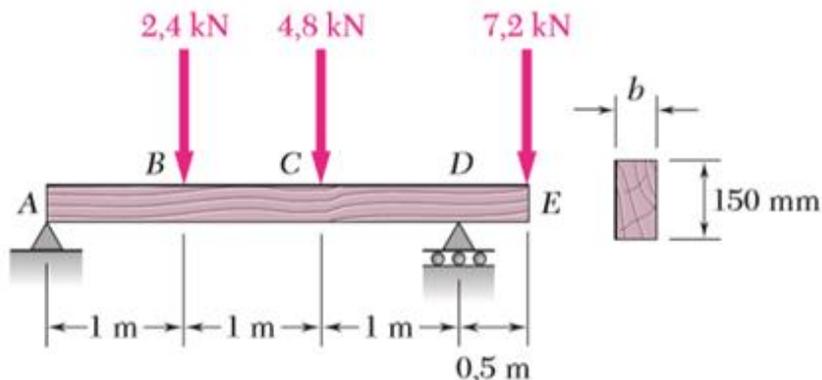


27. (Beer J.) Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção n-n e determine (a) a maior tensão de cisalhamento naquela seção e (b) a tensão de cisalhamento no ponto a.



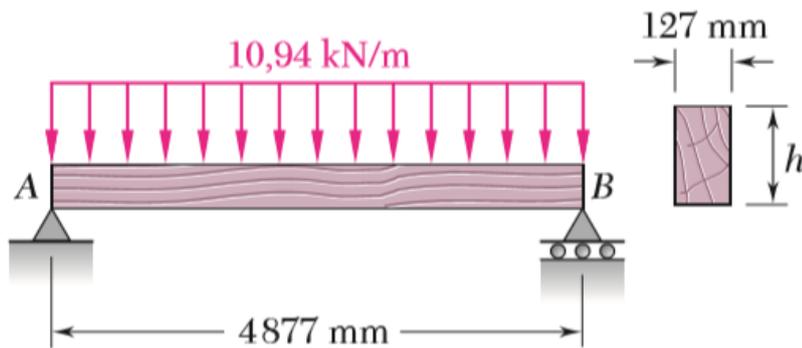
28. (Beer J.)

Para a viga e carregamento mostrados, determine a largura  $b$  mínima necessária, sabendo que, para o tipo de madeira usada,  $\sigma_{adm} = 12 \text{ MPa}$  e  $\tau_{adm} = 825 \text{ kPa}$ .



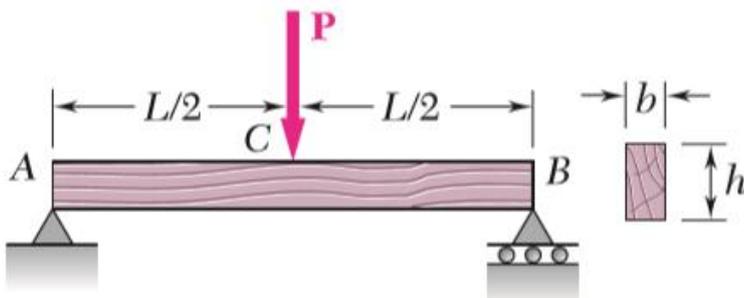
29. (Beer J.)

Para a viga e o carregamento mostrados, determine a altura  $h$  mínima necessária, sabendo que, para o tipo de madeira usada,  $\sigma_{adm} = 12,07 \text{ MPa}$  e  $\tau_{adm} = 0,896 \text{ MPa}$ .



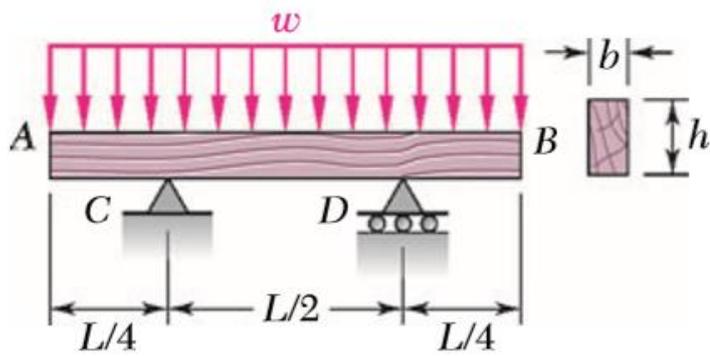
30. (Beer J.)

Uma viga de madeira  $AB$  de comprimento  $L$  e seção transversal retangular suporta uma única força concentrada  $P$  em seu ponto médio  $C$ . (a) Mostre que a relação  $\tau_m/\sigma_m$  dos valores máximos das tensões de cisalhamento e normal na viga é igual a  $2h/L$ , em que  $h$  e  $L$  são, respectivamente, a altura e o comprimento da viga. (b) Determine a altura  $h$  e a largura  $b$  da viga, sabendo que  $L = 2\text{ m}$ ,  $P = 40\text{ kN}$ ,  $\tau_m = 960\text{ kPa}$  e  $\sigma_m = 12\text{ MPa}$ .



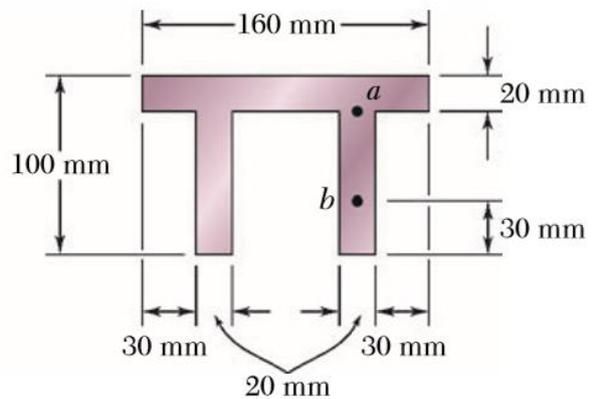
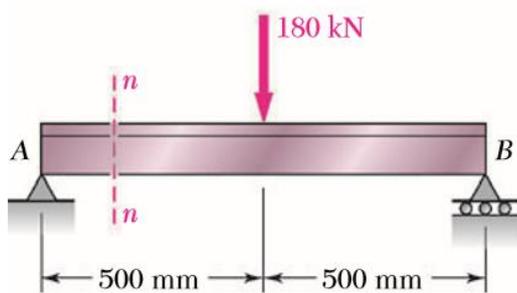
31. (Beer J.)

Uma viga da madeira  $AB$  de comprimento  $L$  e seção transversal retangular suporta uma força uniformemente distribuída  $w$  e é vinculada conforme mostra a figura. (a) Mostre que a relação  $\tau_m/\sigma_m$  dos valores máximos das tensões de cisalhamento e normal na viga é igual a  $2h/L$ , em que  $h$  e  $L$  são, respectivamente, a altura e o comprimento da viga. (b) Determine a altura  $h$  e a largura  $b$  da viga, sabendo que  $L = 5\text{ m}$ ,  $w = 8\text{ kN/m}$ ,  $\tau_m = 1,08\text{ MPa}$  e  $\sigma_m = 12\text{ MPa}$ .



32. (Beer J.)

Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção  $n-n$  e determine a tensão de cisalhamento no (a) ponto  $a$  e (b) ponto  $b$ .



33. (Beer J.)

Para a viga e o carregamento mostrados, considere a seção  $n-n$  e determine a tensão de cisalhamento no (a) ponto  $a$  e (b) ponto  $b$ .

