# PME 3481 – Controle e Aplicações
# Diagramas de Bode e Compensadores

Prof. Dr. Flávio Celso Trigo

Os métodos de resposta em frequência foram desenvolvidos nas décadas de 1930–1950 por pesquisadores como Nyquist, Bode e Nichols, entre outros. Basicamente, constituem-se em ferramentas de avaliações do comportamento de sistemas dinâmicos quando submetidos a sinais periódicos, algo comum em diversas aplicações reais. Os métodos de resposta em frequência complementam as análises de transitório. Veja-se um exemplo: um sistema de controle de posicionamento deve, quando solicitado a uma entrada em degrau unitário, apresentar baixo sobressinal, tempo de acomodação dentro de certos limites e tempo de subida estabelecido. No entanto, tal sistema é afetado também por uma perturbação proveniente de suas fundações. Uma maneira de estabelecer a influência de tais perturbações sobre a resposta dinâmica do sistema é efetuar uma varredura de frequências até que se determine quais frequências e harmônicos provocam as maiores amplitudes de vibrações. Assim, pode-se redimensionar tais fundações de modo a obter o menor efeito possível.

Os métodos de resposta em frequência apresentam as seguintes vantagens sobre outros métos de análise já estudados:

- não é necessária a obtenção de raízes da equação característica;
- podem ser utilizados para levantar características do sistema por testes simples com equipamentos baratos e precisos;
- podem ser utilizados na *identificação* de sistemas;
- a metodologia é extensível também a sistemas não lineares.

# 1 Saídas em regime permanente para entradas senoidais

Seja, no diagrama da fig. 1, a função de transferência

$$\frac{C(s)}{R(s)} = F(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1.1}$$

estável, linear e invariante no tempo e sujeita e uma entrada $r(t) = Asen(\omega t)$. A saída $c(t)$ pode ser obtida como se segue:

$$\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[Asen(\omega t)] = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \tag{1.2}$$

$$\text{com} \quad F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s + p_k)} \Longrightarrow \tag{1.3}$$

$$C(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} F(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s + p_k)} \tag{1.4}$$

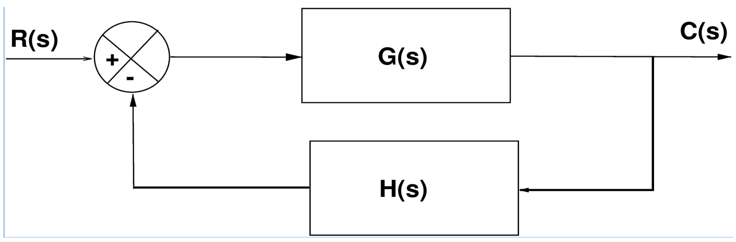



Figura 1: Diagrama de blocos de um sistema genérico em malha fechada

A expansÃ£o em frações parciais conduz a

$$C(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{n}(s + p_k)} = \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \ldots + \frac{b_n}{s + p_n} \tag{1.5}$$

A resposta no tempo é obtida com a tranformação inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + b_1 e^{-p_1 t} + b_2 e^{-p_2 t} + \ldots + e^{-p_n t} \tag{1.6}$$

Porém, como por hipótese, o sistema é *estável*, quando entra em regime (isto é, $t \to \infty$), todos os termos $b_k e^{-p_k t}$ tendem a zero. Assim, a resposta em regime fica

$$c(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t}, \tag{1.7}$$

que, como se nota, depende *apenas da entrada periódica.* Prosseguindo na análise, devem-se calcular os resíduos $a_1$ e $a_2$ nos pólos $\pm j\omega$. Pelos métodos já estudados, pode-se escrever:

$$a_1 = F(s).(s+j\omega)\left.\frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\right|_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j}F(-j\omega) \tag{1.8}$$

$$a_2 = F(s).(s-j\omega)\left.\frac{A\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\right|_{s=j\omega} = \frac{A}{2j}F(j\omega) \tag{1.9}$$

Nota-se que $a_1$ e $a_2$ são complexos conjugados (representa-se $a_2 = \overline{a}_1$). Lembrando ainda que $F(j\omega)$ e $F(-j\omega)$ são números complexos e, portanto, podem ser escritos em termos de módulo e fase, tem-se:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|\angle F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\phi} \tag{1.10}$$

$$F(-j\omega) = |F(-j\omega)|\angle F(-j\omega) = |F(j\omega)|e^{-j\phi} \tag{1.11}$$

$$\text{onde} \quad tg\phi = \frac{\mathbb{I}m(F(\pm j\omega))}{\mathbb{R}e(F(\pm j\omega))} \tag{1.12}$$

Voltando à s eq. 1.8 e 1.9,

$$a_1 = -\frac{A}{2j}|F(-j\omega)|e^{-j\phi} = -\frac{A}{2j}|F(-j\omega)|[cos(-\phi) + jsen(-\phi)] \Longrightarrow \tag{1.13}$$

$$a_1 = -\frac{A}{2j}|F(-j\omega)|[cos(\phi) - jsen(\phi)] \tag{1.14}$$

$$a_2 = \frac{A}{2j}|F(j\omega)|e^{j\phi} = \frac{A}{2j}|F(j\omega)[cos(\phi) + jsen(\phi)] \Longrightarrow \tag{1.15}$$

$$a_2 = -\frac{A}{2j}|F(j\omega)|[cos(\phi) + jsen(\phi)] \tag{1.16}$$

A resposta temporal fica, de acordo com a eq. 1.7,

$$c(t) = -\frac{A}{2j}|F(-j\omega)|e^{-j\phi}e^{-j\omega t} + \frac{A}{2j}|F(j\omega)|e^{j\phi}e^{j\omega t} \Longrightarrow \tag{1.17}$$

$$c(t) = \frac{A}{2j}|F(j\omega)|\left[-e^{-j(\omega t+\phi)} + e^{j(\omega t+\phi)}\right] \Longrightarrow \tag{1.18}$$

$$c(t) = \frac{A}{2j}|F(j\omega)|\left[-(cos(-\omega t-\phi) + j.sen(-\omega t-\phi)) + cos(\omega t+\phi) + j.sen(\omega t+\phi)\right] \Longrightarrow \tag{1.19}$$

$$c(t) = \frac{A}{2j}|F(j\omega)|.2j.sen(\omega t+\phi) \Longrightarrow c(t) = A|F(j\omega)|sen(\omega t+\phi) \tag{1.20}$$

Da demonstração acima conclui-se que:

1. a *amplitude* de resposta $A|F(j\omega)|$ é proporcional à entrada e ao módulo da função de transferência calculada em $s = \pm j\omega$;

2. a resposta é *senoidal* com *frequência idêntica* à frequência de excitação, $w\ rad/s$;

3. a *fase* da resposta difere da fase da excitação $\phi$ graus. Quando $\phi > 0$, ocorre *avanço de fase*, ao passo que se $\phi < 0$, há *atraso de fase*.

Genericamente, para $r(t) = Asen(\omega t + \gamma)$ e $c(t) = Bsen(\omega t + \beta)$,

$$\frac{c(t)}{r(t)} = \frac{B}{A}\frac{sen(\omega t + \beta)}{sen(\omega t + \gamma)} = \tag{1.21}$$

$$\frac{B}{A}\frac{e^{j(\omega t+\beta)}}{e^{j(\omega t+\gamma)}} \tag{1.22}$$

$$\therefore \frac{c(t)}{r(t)} = \frac{B}{A}e^{j(\beta-\gamma)} = F(j\omega) \quad \text{com} \tag{1.23}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{B}{A} \quad \text{e} \quad \phi(F(j\omega)) = \angle F(j\omega) = \beta - \gamma \tag{1.24}$$

**Exemplo**: determinar a resposta do sistema representado pela FT $F(s) = \frac{6}{s+4}$ quando submetido à entrada $r(t) = 3cos(7t + 20^o)$.

Em primeiro lugar, calcula-se $F(j\omega)$,

$$F(s = j7) = \frac{6}{j7 + 4} = |F(j7)|e^{j\phi} = 0,74e^{-j60^o}$$

Por analogia com $r(t) = Asen(\omega t + \gamma)$ e $c(t) = Bsen(\omega t + \beta)$, tem-se:

$$A = 3 \quad \omega = 7\ rad/s \quad \gamma = 20^o$$

Com isso, a resposta $c(t)$ fica,[i]:

$$\text{amplitude de c(t)} \quad B = A.|F(j7)| = (3).(0,74) = 2,22$$

$$\text{fase de c(t)} \quad \beta = \phi + \gamma$$

$$\text{como} \quad \gamma = 20^o \quad e \quad \phi = -60^o \Longrightarrow \beta = 20^o + (-60^o) = -40^o$$

$$\therefore \quad \text{e}c(t) = 2,22cos(7t - 40^o)$$

Verifica-se que, para uma entrada periódica (cosseno), a saída é também periódica e a amplitude depende da frequência $\omega$.

[i]Lembre-se de que o ângulo de fase em graus mostrado aqui serve apenas o propósito didático. Todos os cálculos com números complexos devem ser efetuados com arcos em **radianos**.

# 2 Diagrama de Bode – fundamentos

## 2.1 Definições

Apresentam-se a seguir algumas definições utilizadas na construção do Diagrama de Bode e na análise no domínio da frequência.

1. Amplitude normalizada

$$A(\omega) \triangleq \frac{\text{amplitude da saída senoidal}}{\text{amplitude da entrada senoidal}} = |F(s = j\omega)| \tag{2.1}$$

2. Fase

$$\phi(\omega) \triangleq \angle F(s = j\omega) = \angle F(j\omega) = tg^{-1}\left[\frac{\mathbb{I}m(F(\pm j\omega))}{\mathbb{R}e(F(\pm j\omega))}\right] \tag{2.2}$$

3. Decibel (dB)

   O decibel (dB) é uma grandeza adimensional que representa a relação entre logaritmos das amplitudes de sinais de saída e entrada. Fisicamente, representa a intensidade sonora mais baixa perceptível pelo ouvido humano.

$$dB \triangleq 10\log_{10}\left(\frac{\text{amplitude da saída}}{\text{amplitude da entrada}}\right) \tag{2.3}$$

4. Relações de frequências

$$1 \quad \text{oitava} = 20\log_{10}\left(\frac{2.amplitude}{amplitude}\right) = 20\log_{10} 2 \cong 6\ dB \tag{2.4}$$

$$1 \quad \text{década} = 20\log_{10}\left(\frac{10.amplitude}{amplitude}\right) = 20\log_{10} 10 = 20\ dB \tag{2.5}$$

## 2.2 Diagrama de Bode – aspectos gerais

O Diagrama de Bode é um gráfico constituído por duas partes: a primeira parte (ou primeiro diagrama) apresenta as curvas de amplitude $A(\omega)$ em função da frequência à medida que esta é variada entre zero e infinito; a segunda parte (ou diagrama) mostra o ângulo de fase $\phi(\omega)$ em função da frequência.

A escala-padrão de representação da amplitude de $|F(j\omega)|$ é um múltiplo da escala em decibel,

$$A(\omega) = 20\log_{10}|F(j\omega)| \tag{2.6}$$

A principal vantagem da representação nesta escala é que, como será visto na construção do diagrama, a multiplicação de módulos transforma-se em simples adição de escalares.

A escala de representação do ângulo de fase é linear. Já a escala de frequencias (abscissas) é logaritmica, de modo a abranger grandes faixas de variação.

## 2.3 Diagrama de Bode – fatores básicos na construção do diagrama

A construção do diagrama de Bode de uma função $F(s)$ envolve uma série de procedimentos que podem ser padronizados, quais sejam:
-amplitude e fase de um ganho $K$
-amplitude e fase de fatores integrais ou derivativos, $s = (j\omega)^{\pm 1}$
-amplitude e fase de fatores de primeira ordem, $(1 + sT)^{\pm 1} = (1 + j\omega T)^{\pm 1}$
-amplitude e fase de fatores de segunda ordem, $(\omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2))^{\pm 1}$ que, com $s = j\omega$, fica

$$\left[\frac{1}{1 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + \left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2}\right]^{\pm 1}$$

### 2.3.1 Ganho K

Um ganho $K$ é representado, no plano complexo, por $K = K + j0$. Assim, aplicando-se as equações 2.6 e 2.2 obtém-se

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 20\log_{10} K\ dB \\ \phi(\omega) &= tg^{-1}\frac{0}{K} = 0^o \end{aligned}$$

Portanto, no diagrama de amplitude, o ganho $K$ é representado por uma reta paralela ao eixo das abscissas, com valor positivo se $K > 1$, negativo se $0 < K < 1$ e nulo se $K = 1$ (0 dB). O ângulo de fase é nulo para toda a faixa de frequências. Salienta-se ainda que, caso o ganho seja multiplicado por potências de 10,

$$A(\omega) = 20\log_{10}(10^n K) = 20(\log_{10} 10^n + 20\log_{10} K) = 20\log_{10} K + 20n$$

### 2.3.2 Fatores integrais e derivativos

Seja $s = j\omega$ (fator derivativo). Aplicando-se as equações 2.6 e 2.2,

$$A(\omega) = 20\log_{10}|j\omega| = 20\log_{10}\omega\ dB$$
$$\phi(\omega) = tg^{-1}(\frac{\omega}{0}) = 90^o\ (\pi/2)\ rad$$

Seja, agora, $s = (j\omega)^{-1}$ (fator integral). Aplicando-se as equações 2.6 e 2.2,

$$A(\omega) = 20\log_{10}|\frac{1}{j\omega}| = -20\log_{10}\omega\ dB$$
$$\phi(\omega) = tg^{-1}(\frac{-\omega}{0}) = -90^o\ (-\pi/2)\ rad$$

Observa-se também que, para $s = j\omega$, :

$$\omega = 1\ rad/s \Rightarrow A(\omega) = 20\log_{10}1 = 0\ dB$$
$$\text{variação de uma oitava: } 20\log_{10}(\frac{2\omega}{\omega}) = 20\log_{10}2 \cong 6\ dB$$
$$\text{variação de uma década: } 20\log_{10}(\frac{10\omega}{\omega}) = 20\log_{10}10 \cong 20\ dB$$

Por analogia, para $s = (j\omega)^{-1}$

$$\omega = 1\ rad/s \Rightarrow A(\omega) = -20\log_{10}1 = 0\ dB$$
$$\text{variação de uma oitava: } -20\log_{10}2 \cong -6\ dB$$
$$\text{variação de uma década: } -20\log_{10}10 \cong -20\ dB$$

Conclui-se que os fatores derivativo e integral geram, no diagrama de amplitude, retas cujas inclinações sÃ£o respectivamente 6 dB/oitava (20 dB/década) e -6 dB/oitava (-20 db/década); além disso, o ponto ($\omega = 1\ rad/s$; 0 dB) irá sempre pertencer à s respectivas retas. Os ângulos de fase são constantes com valores $90^o$ e $-90^o$, respectivamente. A situação descrita pode ser vista na fig. 2.

Para fatores integrais ou derivativos de multiplicidade $n$, ou seja, $(j\omega)^{\pm n}$, tem-se,

$$A(\omega) = \pm 20n\ \text{dB/década}$$
$$\phi(\omega) = \pm n\frac{\pi}{2}$$

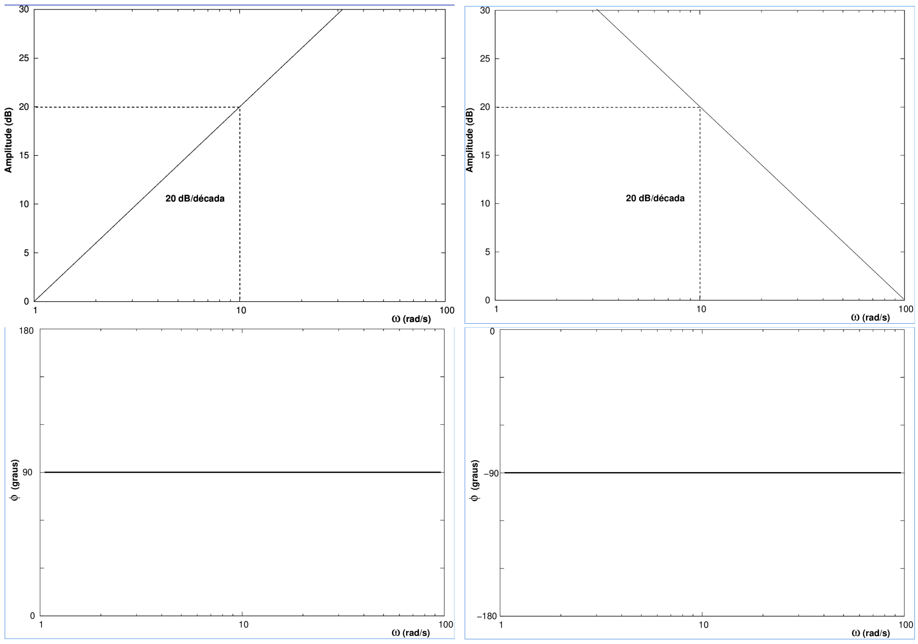



Figura 2: Diagramas de Bode: fatores derivativo e integral.

### 2.3.3 Fatores de primeira ordem

Fatores de primeira ordem são do tipo

$$(1 + sT)^{\pm 1} \left.\right|_{s=j\omega} = (1 + j\omega T)^{\pm 1}, \tag{2.7}$$

onde $T$ é a constante de tempo do sistema. Neste caso, o diagrama de Bode é construído tendo como abscissa múltiplos e submúltiplos da constante de tempo.

Seja o fator de primeira ordem $(1 + j\omega T)$. Aplicam-se as equações 2.6 e 2.2:

**Amplitude**

$$A(\omega) = 20 \log_{10} |1 + j\omega T| = 20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\right) \tag{2.8}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \tag{2.9}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = 20 \log_{10} \omega T \text{ dB} \tag{2.10}$$

As equações 2.36 e 2.37 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 2.35. Dois pontos são importantes na construção do diagrama de amplitude:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20\log_{10} 10 = 20 \text{ dB} \tag{2.11}$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20\log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \tag{2.12}$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $w > 1/T$ a aproximação leva a uma reta com inclinação de 20 dB/década, ou 6 dB/oitava. O valor $\omega = 1/T$ é denominado *frequência de canto*, e representa o ponto a partir do qual a assíntota horizontal passa a inclinada.

**Ângulo de fase**

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) \tag{2.13}$$

$$\phi(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) \tag{2.14}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 0^o (0\, rad) \tag{2.15}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 90^o (\pi/2\, rad) \tag{2.16}$$

$$\text{para} \quad \omega = \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 45^o (\pi/4\, rad) \tag{2.17}$$

**Erro em amplitude**

Quando efetua-se a aproximação pelas assíntotas, eqs. 2.36 e 2.37, incorre-se em erro com relação ao valor que seria obtido caso a amplitude fosse calculada de acordo com a expressão exata, eq. 2.35. Em termos práticos, consideram-se os erros existentes no intervalo entre uma oitava acima e uma oitava abaixo da frequência de canto. Assim, subtraindo-se o valor aproximado do exato obtêm-se

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\,|_{\omega=1/T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+1}\right) - 20\log_{10} 1 = 3,03\; dB \text{ (freq. de canto)} \tag{2.18}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\,|_{\omega=2/T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+4}\right) - 20\log_{10} 2 = 0,97\; dB \text{ (1 oitava acima)} \tag{2.19}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\,|_{\omega=1/2T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - 20\log_{10} 1 = 0,97\; dB \text{ (1 oitava abaixo)} \tag{2.20}$$

Observa-se que o erro é máximo na frequência de canto e simétrico em relação a ela nas duas direções. Um cálculo simples irá revelar que, para $\omega = 4/T$ (duas oitavas acima) ou $\omega = 1/4T$ (duas oitavas abaixo), o erro é de 0,26 dB, decaindo para 0,04 dB quando se avalia o intervalo de $\pm 1$ década, que pode ser admitido desprezível.

O diagrama de Bode para as aproximações referentes a um fator de primeira ordem no numerador de $F(s)$ (o que representa um zero em $s = -1/T$) pode ser visto nas figuras. 3 (a) e (c).

Considera-se agora o fator de primeira ordem $\frac{1}{1+j\omega T}$. O desenvolvimento é totalmente análogo, levando a resultados que apresentam sinais invertidos em relação ao caso anterior.

**Amplitude**

$$A(\omega) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right) \tag{2.21}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = -20\log_{10} 1 = 0 \text{ dB} \tag{2.22}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = -20\log_{10}\omega T \text{ dB} \tag{2.23}$$

As equações 2.49 e 2.50 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 2.48. Neste caso, os dois pontos para a construção do diagrama de amplitude são:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = -20\log_{10} 10 = -20 \text{ dB} \tag{2.24}$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = -20\log_{1} 10 = 0 \text{ dB} \tag{2.25}$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $w > 1/T$ obtém-se uma reta com inclinação de -20 dB/década, ou -6 dB/oitava. Novamente, denomina-se $\omega = 1/T$ como frequência de canto.

**Ângulo de fase**

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T)^{-1} \tag{2.26}$$

$$\text{como} \quad \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \Longrightarrow \tag{2.27}$$

$$\phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) \tag{2.28}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 0^o(0\, rad) \tag{2.29}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = -90^o(-\pi/2\, rad) \tag{2.30}$$

$$\text{para} \quad \omega = \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = -45^o(-\pi/4\, rad) \tag{2.31}$$

**Erro em amplitude**

$$\text{Para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+1}\right) - (-20\log_{10}1) = -3,03\; dB \text{ (freq. de canto)} \tag{2.32}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=2/T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+4}\right) - (-20\log_{10}2) = -0,97\; dB \text{ (1 oitava acima)} \tag{2.33}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/2T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - (-20\log_{10}1) = -0,97\; dB \text{ (1 oitava abaixo} \tag{2.34}$$

As considerações em relação ao decaimento logarítmico quando se aumenta o intervalo de avaliação para ± 4 oitavas ou ± 1 década são idênticas, com a ressalva da inversão no sinal.

**Amplitude**

$$A(\omega) = 20\log_{10}|1 + j\omega T| = 20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \omega^2 T^2}\right) \tag{2.35}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = 20\log_{10}1 = 0 \text{ dB} \tag{2.36}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = 20\log_{10}\omega T \text{ dB} \tag{2.37}$$

As equações 2.36 e 2.37 sÃ£o as *assíntotas* à  curva real, dada pela eq. 2.35. Dois pontos são importantes na construção do diagrama de amplitude:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20\log_{10}10 = 20 \text{ dB} \tag{2.38}$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20\log_{10}1 = 0 \text{ dB} \tag{2.39}$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $w > 1/T$ a aproximação leva a uma reta com inclinação de 20 dB/década, ou 6 dB/oitava. O valor $\omega = 1/T$ é denominado *frequência de canto*, e representa o ponto a partir do qual a assíntota horizontal passa a inclinada.

**Ângulo de fase**

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1 + j\omega T) \tag{2.40}$$

$$\phi(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) \tag{2.41}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 0^o (0\, rad) \tag{2.42}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 90^o (\pi/2\, rad) \tag{2.43}$$

$$\text{para} \quad \omega = \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 45^o (\pi/4\, rad) \tag{2.44}$$

**Erro em amplitude**

Quando efetua-se a aproximação pelas assíntotas, eqs. 2.36 e 2.37, incorre-se em erro com relação ao valor que seria obtido caso a amplitude fosse calculada de acordo com a expressão exata, eq. 2.35. Em termos práticos, consideram-se os erros existentes no intervalo entre uma oitava acima e uma oitava abaixo da frequência de canto. Assim, subtraindo-se o valor aproximado do exato obtêm-se

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+1}\right) - 20\log_{10} 1 = 3,03\; dB \text{ (freq. de canto)} \tag{2.45}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=2/T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+4}\right) - 20\log_{10} 2 = 0,97\; dB \text{ (1 oitava acima)} \tag{2.46}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/2T} \Longrightarrow \epsilon = 20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - 20\log_{10} 1 = 0,97\; dB \text{ (1 oitava abaixo)} \tag{2.47}$$

Observa-se que o erro é máximo na frequência de canto e simétrico em relação a ela nas duas direções. Um cálculo simples irá revelar que, para $\omega = 4/T$ (duas oitavas acima) ou $\omega = 1/4T$ (duas oitavas abaixo), o erro é de 0,26 dB, decaindo para 0,04 dB quando se avalia o intervalo de $\pm 1$ década, que pode ser admitido desprezível.

O diagrama de Bode para as aproximações referentes a um fator de primeira ordem no numerador de $F(s)$ (o que representa um zero em $s = -1/T$) pode ser visto nas figuras. 3 (a) e (c).

Considera-se agora o fator de primeira ordem $\frac{1}{1+j\omega T}$. O desenvolvimento é totalmente análogo, levando a resultados que apresentam sinais invertidos em relação ao caso anterior.

**Amplitude**

$$A(\omega) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right| = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right) \tag{2.48}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = -20\log_{10}1 = 0 \text{ dB} \tag{2.49}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow A(\omega) = -20\log_{10}\omega T \text{ dB} \tag{2.50}$$

As equações 2.49 e 2.50 são as *assíntotas* à curva real, dada pela eq. 2.48. Neste caso, os dois pontos para a construção do diagrama de amplitude sÃ£o:

$$A\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = -20\log_{10}10 = -20 \text{ dB} \tag{2.51}$$

$$A\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = -20\log_{1}10 = 0 \text{ dB} \tag{2.52}$$

Conclui-se que, para $\omega \leq 1/T$, a amplitude vale 0 dB, ao passo que, para $w > 1/T$ obtém-se uma reta com inclinação de -20 dB/década, ou -6 dB/oitava. Novamente, denomina-se $\omega = 1/T$ como frequência de canto.

**Ângulo de fase**

$$\phi(\omega) = \angle F(j\omega) = \angle(1+j\omega T)^{-1} \tag{2.53}$$

$$\text{como} \quad \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1(1-j\omega T)}{(1+j\omega T)(1-j\omega T)} = \frac{1}{1+\omega^2T^2} - j\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2} \Longrightarrow \tag{2.54}$$

$$\phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{\omega T}{1}\right) \tag{2.55}$$

$$\text{para} \quad \omega \ll \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = 0^o(0\,rad) \tag{2.56}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = -90^o(-\pi/2\,rad) \tag{2.57}$$

$$\text{para} \quad \omega = \frac{1}{T} \Longrightarrow \phi(\omega) = -45^o(-\pi/4\,rad) \tag{2.58}$$

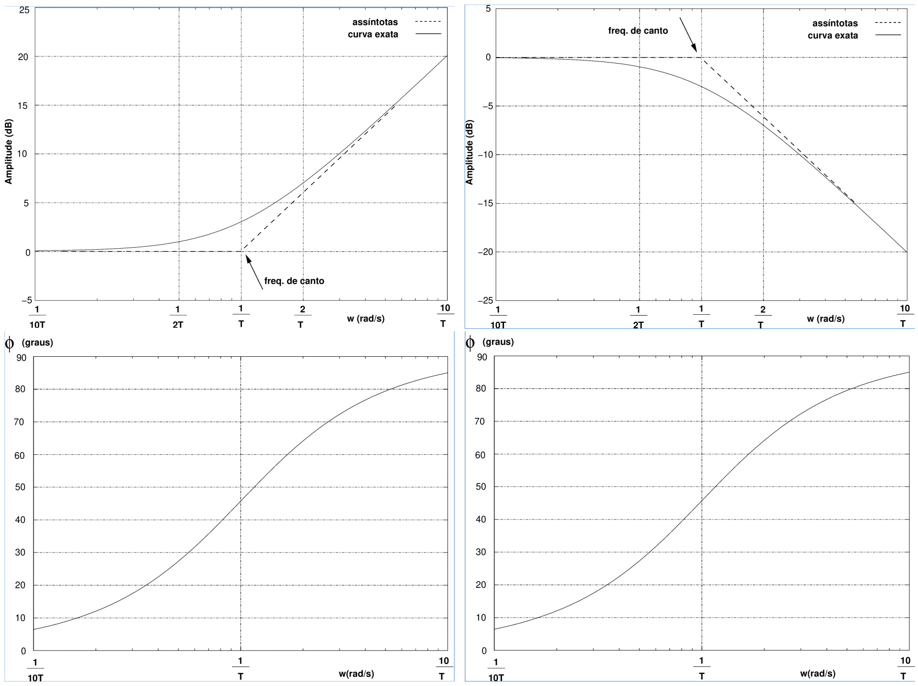



Figura 3: Diagramas de Bode: fatores de primeira ordem.

**Erro em amplitude**

$$\text{Para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+1}\right) - (-20\log_{10} 1) = -3,03\ dB \text{ (freq. de canto)} \tag{2.59}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=2/T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+4}\right) - (-20\log_{10} 2) = -0,97\ dB \text{ (1 oitava acima)} \tag{2.60}$$

$$\text{para} \quad \epsilon(A(\omega))\mid_{\omega=1/2T} \Longrightarrow \epsilon = -20\log_{10}\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right) - (-20\log_{10} 1) = -0,97\ dB \text{ (1 oitava abaixo} \tag{2.61}$$

As considerações em relação ao decaimento logarítmico quando se aumenta o intervalo de avaliação para ± 4 oitavas ou ± 1 década são idênticas, com a ressalva da inversão no sinal.

O diagrama de Bode para as aproximações referentes a um fator de primeira ordem no denominador de $F(s)$ (o que representa um pólo em $s = -1/T$) pode ser visto nas figuras 3 (b) e (d).

### 2.3.4 Fatores de segunda ordem

Os fatores de $2^a$ ordem são genericamente expressos como

$$F(s) = \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]^{\pm 1} \tag{2.62}$$

Considerando-se o expoente 1 e fazendo-se $s = j\omega$, obtêm-se

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j^2\omega^2 + 2j\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2} \tag{2.63}$$

Dividindo-se a equação precedente por $\omega_n^2$ chega-se a

$$F(j\omega) = \frac{1}{j^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + 1} = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2}, \tag{2.64}$$

que é a forma padrão de um sistema de segunda ordem. Observe que, quando $\zeta > 1$, o denominador pode ser escrito como o produto de dois fatores de primeira ordem com *pólos reais* (caso o expoente da eq. 2.62 seja -1, tem-se o produto de dois fatores de primeira ordem com *zeros reais*).

Por outro lado, quando $0 \leq \zeta < 1$, o termo quadrático é o produto de dois fatores com raízes complexas conjugadas.

**Amplitude**

As equações 2.6 e 2.2 aplicadas à eq. 2.64 fornecem:

$$A(F(j\omega)) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j) + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2}\right| \Rightarrow \tag{2.65}$$

$$A(\omega) = -20\log_{10}\left|1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j) + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2\right| \Rightarrow \tag{2.66}$$

$$A(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{\left(1 - \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2\right)^2 + 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \tag{2.67}$$

$$A(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{1 - 2\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2 + \left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^4 + 4\zeta^2\left[\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \tag{2.68}$$

Para $\omega \ll \omega_n$,

$$\Rightarrow A(\omega) = -20\log_{10}1 = 0 \text{ dB – assíntota das baixas frequências} \tag{2.69}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \omega_n \Rightarrow A(\omega) = -20\log_{10}\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_n})^4} \Rightarrow \tag{2.70}$$

$$A(\omega) = -40\log_{10}\frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB – assíntota das altas frequências} \tag{2.71}$$

Nota-se que a amplitude da resposta é função tanto de um fator externo, qual seja, a frequência do sinal de entrada, quanto de um fator "interno", o coeficiente de amortecimento $\zeta$, característico do sistema dinâmico. As curvas de amplitude refletem essa dependência, como pode ser visto no gráfico da fig. 4 (a). Neste diagrama, alguns pontos notáveis são:

$$\begin{aligned}
\text{para} \quad \omega = 0\ rad/s \Rightarrow A(\omega) = 0\ dB \\
\text{para} \quad \omega = \omega_n\ rad/s \Rightarrow A(\omega) = -40\log_{10} 1 = 0\ dB \text{ pela eq. } 2.70 \\
\text{para} \quad \omega = 10\omega_n\ rad/s \Rightarrow A(\omega) = -40\log_{10} 10 = -40 dB \text{ pela eq. } 2.70
\end{aligned}$$

A última equação mostra que a assíntota das altas frequências possui gradiente -40 dB/década, fato que será amplamente utilizado na construção do esboço do Diagrama de Bode. Como mencionado anteriormente, a amplitude é função da frequência de excitação e do coeficiente de amortecimento. Fixado um valor de $\zeta$, obtém-se a curva correspondente de amplitude. Quando a frequência do sinal de entrada iguala-se à frequência natural do sistema, a eq. 2.65 fica,

$$A(F(j\omega)) = A(F(j\omega_n)) = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1 + j2\zeta - 1}\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j2\zeta}\right| \tag{2.72}$$

fazendo com que, dessa forma, o denominador atinja um mínimo e, consequentemente, ocorra um pico de amplitude, cujo valor é inversamente proporcional ao valor de $\zeta$. A frequência $\omega_n$ é a frequência de canto para o fator quadrático.

**Ângulo de fase**

Considera-se a função

$$F(s = j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j) + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2} = \tag{2.73}$$

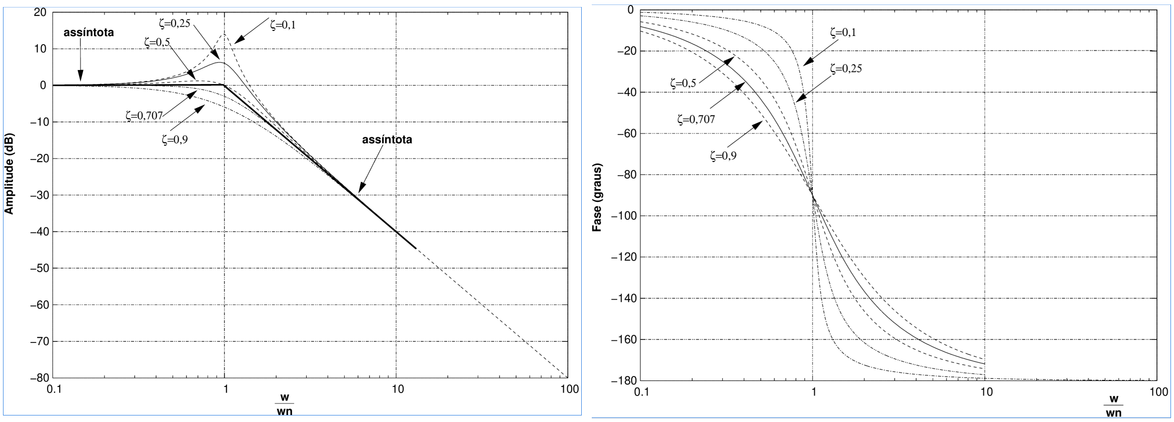
$$\frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j} = \tag{2.74}$$

$$\frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j}\left[\frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j)}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j)}\right] \tag{2.75}$$

$$= \frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2 - 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})j}{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 - 4\zeta^2(\frac{\omega}{\omega_n})^2} \tag{2.76}$$

Portanto,

$$tg\phi(\omega) = \frac{-2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \Longrightarrow -tg\phi(\omega) = \frac{2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}, \tag{2.77}$$




(a) (b)

Figura 4: Diagramas de Bode: fatores de 2a. ordem.

que, tal qual a amplitude, depende de $\omega$ e $\zeta$. Assim,

$$\text{para} \quad \omega \ll \omega_n \Rightarrow -tg\phi(\omega) = 0 \Rightarrow \phi(\omega) = 0^o \; (0 \; rad) \tag{2.78}$$

$$\text{para} \quad \omega \gg \omega_n \Rightarrow -tg\phi(\omega) = 0^- \Rightarrow \phi(\omega) = -180^o \; (-\pi \; rad) \tag{2.79}$$

$$\text{para} \quad \omega = \omega_n \Rightarrow -tg\phi(\omega) = -\frac{2\zeta}{0} \Rightarrow \phi(\omega) = -90^o \; (-\pi/2 \; rad) \tag{2.80}$$

O comportamento do ângulo de fase para fatores de segunda ordem é visto no gráfico da fig. 4 (b).

Ressonância

Já foi observado que a amplitude da resposta é função tanto da frequência natural do sistema quanto do seu coeficiente de amortecimento. O gráfico de amplitude, no diagrama de Bode, indica que existe um valor de $\zeta$ que delimita a ocorrência ou não de um pico, com $\omega \cong \omega_n$.

Quando $|F(j\omega)|$ apresentar um pico, a frequência correspondente será denominada *frequência de ressonância*, $\omega_r$. Matematicamente, um pico de amplitude implica a ocorrência de um mínimo no denominador da eq. 2.82 abaixo,

$$|F(j\omega))| = \left| \frac{1}{1 + 2\zeta(\frac{\omega}{\omega_n}j) + (\frac{\omega}{\omega_n}j)^2} \right| \tag{2.81}$$

$$|F(j\omega))| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2 + \left[2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \tag{2.82}$$

Para achar o mínimo no denominador, faz-se

$$\frac{d}{d\omega}\left(\left[1-\frac{\omega}{\omega_n})^2\right]^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)=0\Rightarrow$$
$$\frac{d}{d\omega}\left(\left[\frac{\omega_n^2-\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)=0\Rightarrow$$
$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega_n^4-2\omega_n^2\omega^2+\omega^4}{\omega_n^4}+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^4}\omega_n^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega_n^4+\omega^4-2\omega^2\omega_n^2(1-2\zeta^2)}{\omega_n^4}\right)=0\Rightarrow$$
$$\frac{d}{d\omega}\left(1+(\frac{\omega}{\omega_n})^4-2(\frac{\omega}{\omega_n})^2(1-2\zeta^2)\right)=0\Rightarrow$$
$$0+4\frac{\omega^3}{\omega_n^4}-4\frac{\omega}{\omega_n^2}(1-2\zeta^2)=0\Rightarrow$$
$$4\omega\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^4}-\frac{1-2\zeta^2}{\omega_n^2}\right)=0\Rightarrow$$
$$\frac{\omega^2}{\omega_n^4}=\frac{1-2\zeta^2}{\omega_n^2}\Rightarrow\omega^2=\omega_n^2(1-2\zeta^2)$$

Assim, o valor de $\omega$ que minimiza o denominador da eq. 2.82 é a frequência de ressonância

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \tag{2.83}$$

Com respeito à eq. 2.83, os seguintes pontos podem ser destacados:

- em sistemas cujo amortecimento é nulo ou muito pequeno, a frequência de ressonância $\omega_r$ tende à frequência natural, $\omega_n$;
- quando o radical se anula, não há pico de ressonância. O valor de $\zeta$ que torna o radical nulo é $\zeta=0,707$;
- para $0<\zeta\leq 0,707$, a frequência de ressonância $\omega_r$ é inferior à frequência natural amortecida, $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, e a resposta ao degrau é oscilatória;
- para $\zeta\longrightarrow 0$, a frequência de ressonância tende à frequência natural;

- quando $\zeta > 0,707$, não há pico de ressonância. Sabe-se, que para $0,707 \leq \zeta \leq 1$, o sistema é amortecido porém ainda sujeito a oscilações, quando solicitado ao degrau. Porém as oscilações decaem rapidamente.

O valor de pico na ressonância, $M_r$, pode ser encontrado substituindo-se a eq. 2.83 na eq. 2.82, que conduz a

$$M_r = |F(j\omega)| = |F(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{2.84}$$

A equação 2.84 indica que, à medida que $\zeta$ tende a zero, a amplitude tende ao infinito, ou seja, um sistema não amortecido, quando sujeito a vibrações na sua frequência natural, tende a oscilar com amplitudes cada vez maiores. Além disso, sistemas fracamente amortecidos, quando excitados em frequência próximas à frequência de ressonância, tendem a apresentar maiores amplitudes de oscilação.

As características de resposta apresentadas acima permitem a obtenção de esboços do diagrama de Bode para funções genéricas, desde que devidamente decompostas em termos de ordem inferior.

# 3 Estabilidade relativa utilizando diagramas de Bode

A estabilidade relativa de um sistema é determinada com base na suas margens de ganho e fase, definidas como se segue.

- **Margem de ganho**: qualitativamente, determina a proximidade (ou não) do lugar das raízes com o eixo imaginário, ou seja, quando o ganho é tal que os polos passam para o semiplano direito do plano complexo, tornando o sistema instável.

- **Margem de fase**: corresponde à diferença entre o ângulo de fase da FTMA e $-180^o$.

A fig. 5 mostra as margens de ganho e fase nos diagramas de Bode, com suas respectivas frequências de interesse.

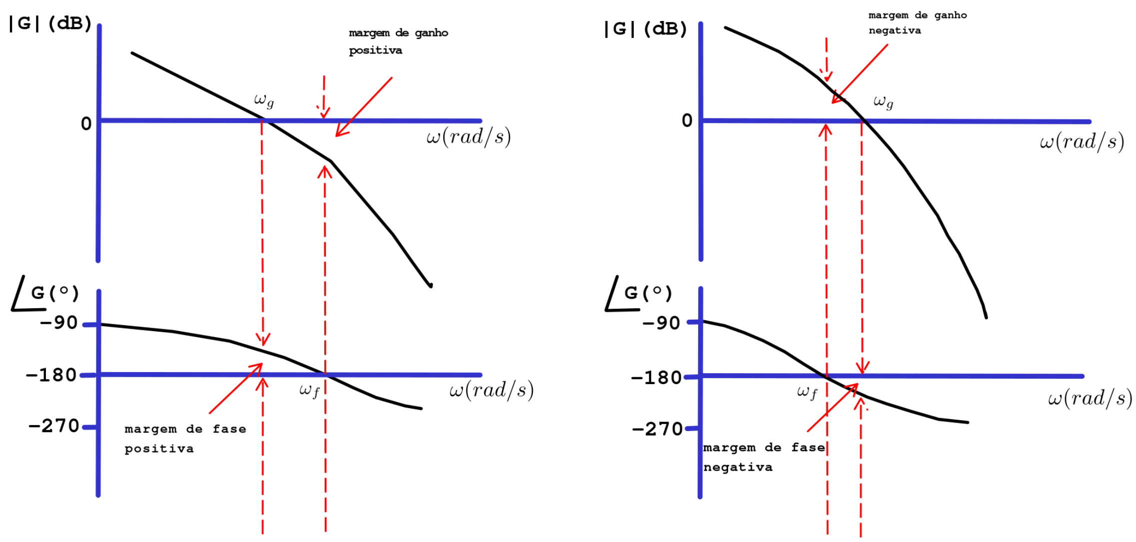



Figura 5: Margens de ganho e fase.