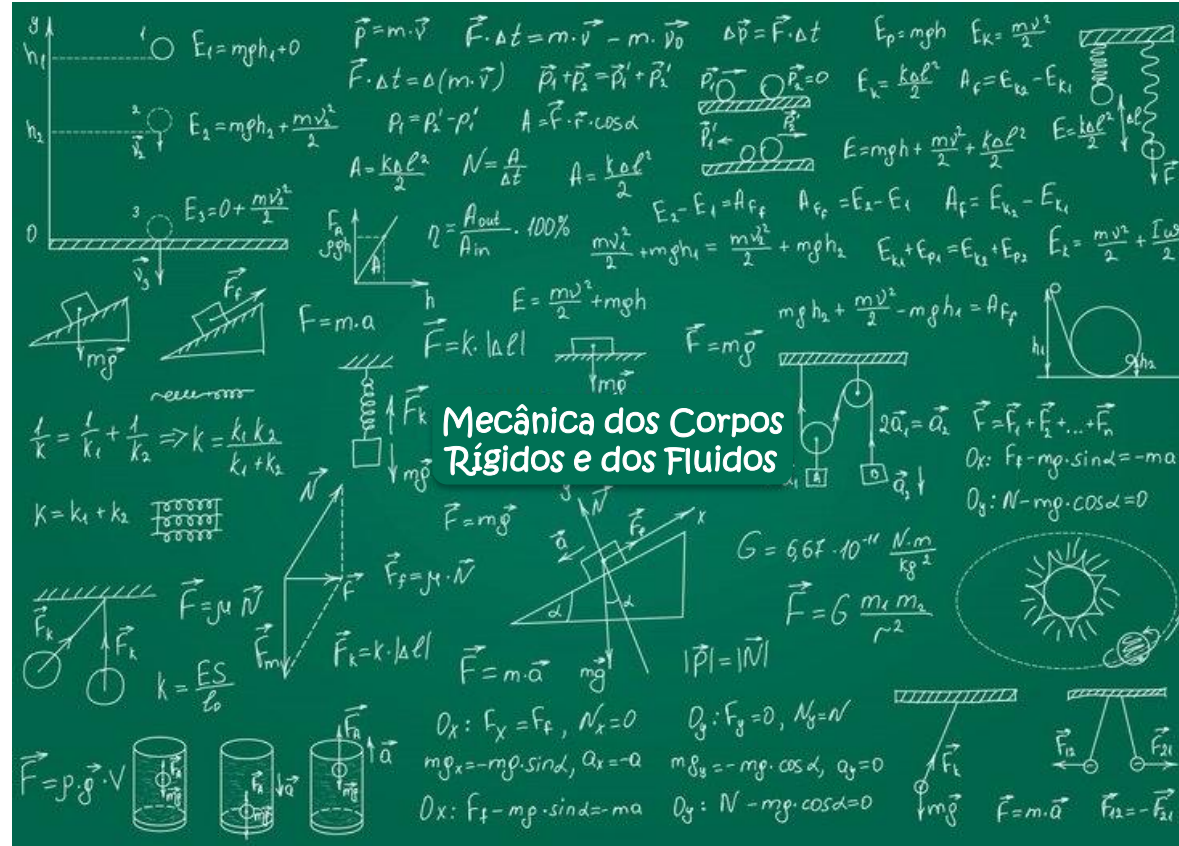


Mecânica de Corpos Rígidos e Fluidos

4300255 - Primeiro Semestre de 2024

26ª Aula - Tensão Superficial



Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Energy and Work:
 $E_1 = mgh_1 + 0$
 $E_2 = mgh_2 + \frac{mv^2}{2}$
 $E_3 = 0 + \frac{mv^2}{2}$
 $\Delta E = W = F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v$
 $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$
 $E_p = mgh$
 $E_k = \frac{mv^2}{2}$
 $E_k = \frac{k \Delta l^2}{2}$
 $A_f = E_{k2} - E_{k1}$
 $E = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{k \Delta l^2}{2}$
 $E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1}$
 $E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}$

Momentum and Impulse:
 $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
 $\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{v} - m \cdot \vec{v}_0$
 $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$
 $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$
 $\vec{p}_1 = p_1 \cdot \hat{i}$
 $\vec{p}_2 = p_2 \cdot \hat{j}$
 $\vec{p}'_1 = p'_1 \cdot \hat{i}$
 $\vec{p}'_2 = p'_2 \cdot \hat{j}$
 $A = \vec{F} \cdot \vec{r} \cdot \cos \alpha$
 $A = \frac{k \Delta l^2}{2}$
 $N = \frac{A}{\Delta t}$
 $A = \frac{k \Delta l^2}{2}$
 $E_2 - E_1 = A_{F_f}$
 $A_{F_f} = E_2 - E_1$
 $A_f = E_{k2} - E_{k1}$

Forces and Newton's Laws:
 $F = m \cdot a$
 $\vec{F} = k \cdot |\Delta l|$
 $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$
 $mg h_2 + \frac{mv^2}{2} - mg h_1 = A_{F_f}$
 $2\vec{a}_1 = \vec{a}_2$
 $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$
 $O_x: F_f - mg \cdot \sin \alpha = -ma$
 $O_y: N - mg \cdot \cos \alpha = 0$
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m}{kg^2}$
 $\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
 $|\vec{p}| = |\vec{v}|$
 $O_x: F_x = F_f, N_x = 0$
 $mg_x = -mg \cdot \sin \alpha, a_x = -a$
 $mg_y = -mg \cdot \cos \alpha, a_y = 0$
 $O_x: F_f - mg \cdot \sin \alpha = -ma$
 $O_y: N - mg \cdot \cos \alpha = 0$
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

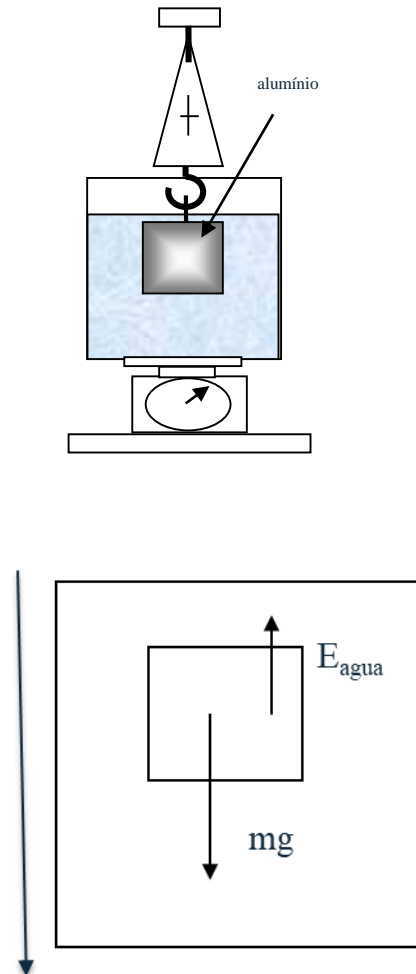
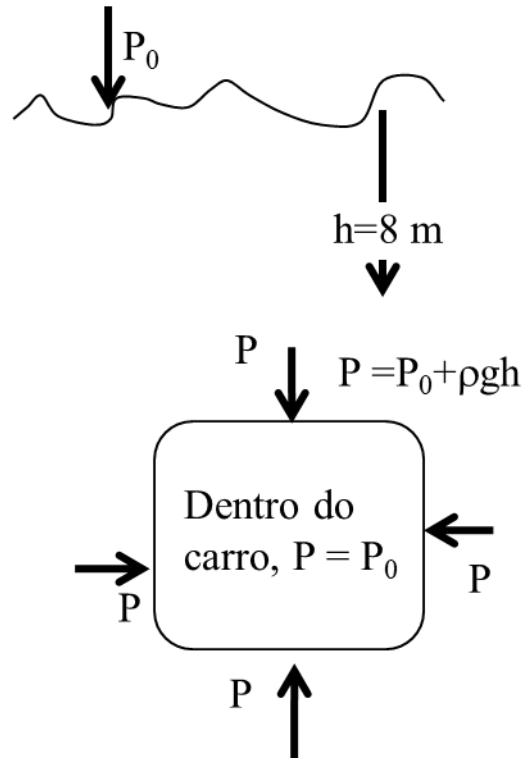
Fluids and Springs:
 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$
 $k = k_1 + k_2$
 $k = \frac{ES}{l_0}$
 $\vec{F} = \mu \cdot \vec{N}$
 $\vec{F}_k = k \cdot |\Delta l|$
 $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
 $\vec{F} = \rho \cdot \vec{g} \cdot V$
 $\vec{F}_a = \rho \cdot \vec{g} \cdot V$
 $\vec{F}_b = \rho \cdot \vec{g} \cdot V$
 $\vec{F}_c = \rho \cdot \vec{g} \cdot V$

Nilberto H. Medina e Nora L. Maidana
medina@if.usp.br, nmaidana@if.usp.br

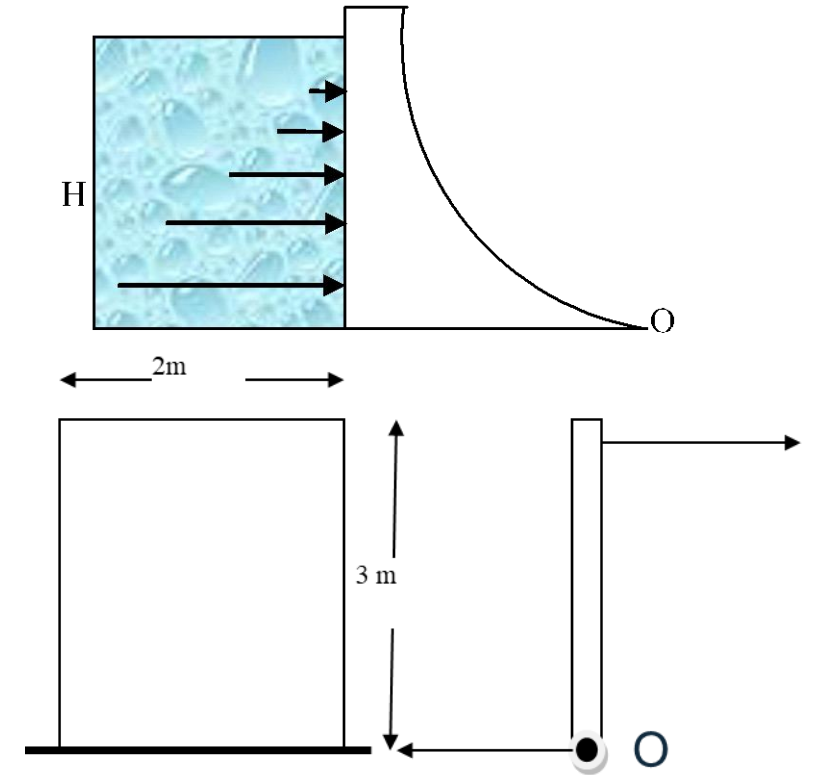
06/06/2024



(Moises cap 1 E 10) (a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água próxima de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera? (b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água na piscina sobe, desce ou não se altera? (Três físicos famosos a quem este problema foi proposto erraram a resposta. Veja se você acerta!)



Forças sobre barragens

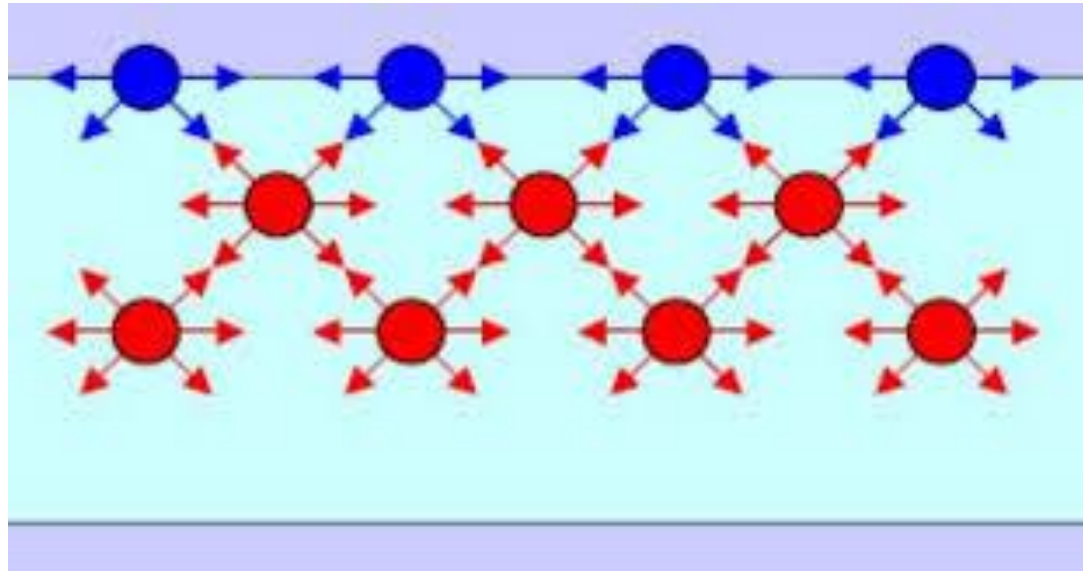


$$\tau_{tot} = \frac{1}{6} \rho g L H^3 = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \times \bar{H} \quad \therefore \bar{H} = \frac{1}{3} H$$

Tensão superficial

Um líquido que escoar de um conta-gotas não o faz continuamente, emerge em forma de gotas, em pingos sucessivos.

A interface entre um líquido e um gás (ou entre dois líquidos imiscíveis) existe por causa das forças superficiais. Estas forças fazem com que a superfície livre do líquido se comporte como uma membrana esticada sobre a massa fluída. Apesar dessa membrana não existir, a analogia conceitual nos permite explicar muitos fenômenos observados experimentalmente.

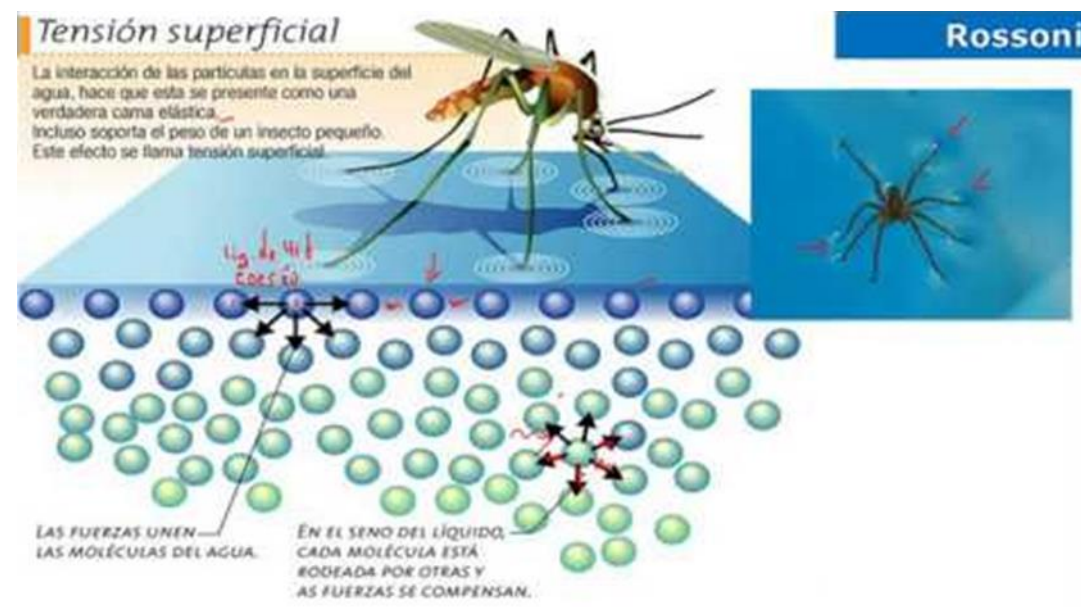
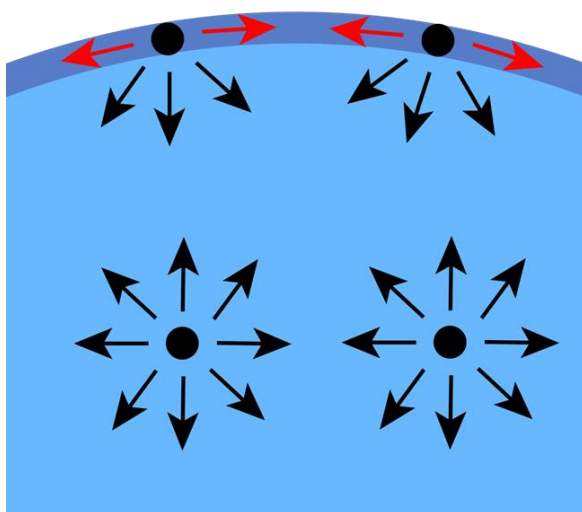


Exemplos.



Estes vários tipos de fenômenos superficiais são provocados pelo desbalanço das forças coesivas que atuam nas moléculas do líquido que estão próximas à superfície do fluido. As moléculas do interior do fluido estão envolvidas por outras moléculas do mesmo fluido que se atraem mutuamente e igualmente. Entretanto, as moléculas na região próxima à superfície estão sujeitas a forças líquidas que apontam para o interior.

Podemos considerar que a força de atração atua no plano da superfície e ao longo de qualquer linha da superfície. A intensidade da atração molecular por unidade de comprimento ao longo de qualquer linha na superfície é denominada **tensão superficial**, γ . γ é uma propriedade do líquido e depende da temperatura. Sua unidade é N/m.



Já ouviu falar na *tensão superficial* da água?

efeito físico que ocorre na *interface* entre duas fases químicas



arvoreagua.org

caí no ENEM

faz com que a *camada superficial* de um líquido se comporte como uma *membrana elástica*



Alguns valores em N/m

Álcool etílico: $2,28E-2$;

gasolina: $2,2E-2$;

glicerina: $6,33E-23$;

mercúrio: $4,66E-1$;

água do mar: $7,43E-2$;

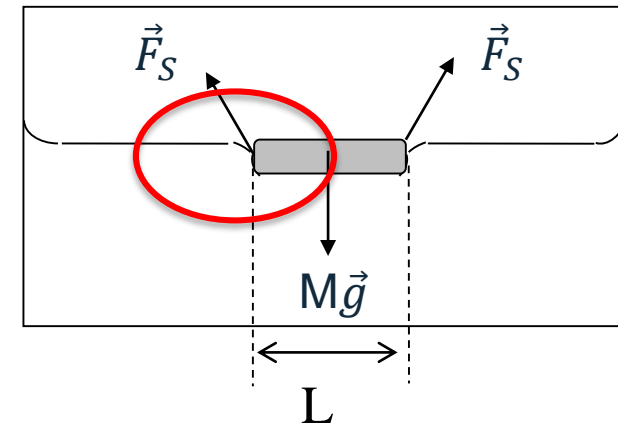
água: $7,34E-2$.



Vídeo capilar

Podem se observar que certos objetos flutuam sobre a superfície da água. Eles não estão parcialmente submersos na água e portanto, não estão sujeitos a uma força de empuxo como a estudada nas aulas anteriores. Neste caso, o objeto está totalmente fora da superfície – sobre a superfície-, nenhuma das suas partes está submersa. Quando um tubo de vidro (pipeta) é colocado na água, esta sobe pelo tubo, mas, se for colocada em mercúrio, este desce. Tais fenômenos e outros semelhantes associam-se a existência de uma superfície limítrofe entre um líquido e alguma outra substância.

O objeto é mantido flutuando pela *tensão superficial* do líquido. Se colocarmos uma agulha ou outro objeto sobre a superfície da água dentro de um copo, observaremos que por mais que não há justificativa para o aço flutuar, considerando o princípio de Arquimedes, já que sua densidade (massa específica) é maior do que a da água. Se submergirmos o objeto, vemos que ele afundará, conforme o previsto pelo princípio de Arquimedes.



[Video V1_5 Google drive](#)

Se após verificar essas condições de equilíbrio for adicionada à água um produto “surfactante” (tensoativo como um detergente). Poderemos verificar que o objeto afunda.

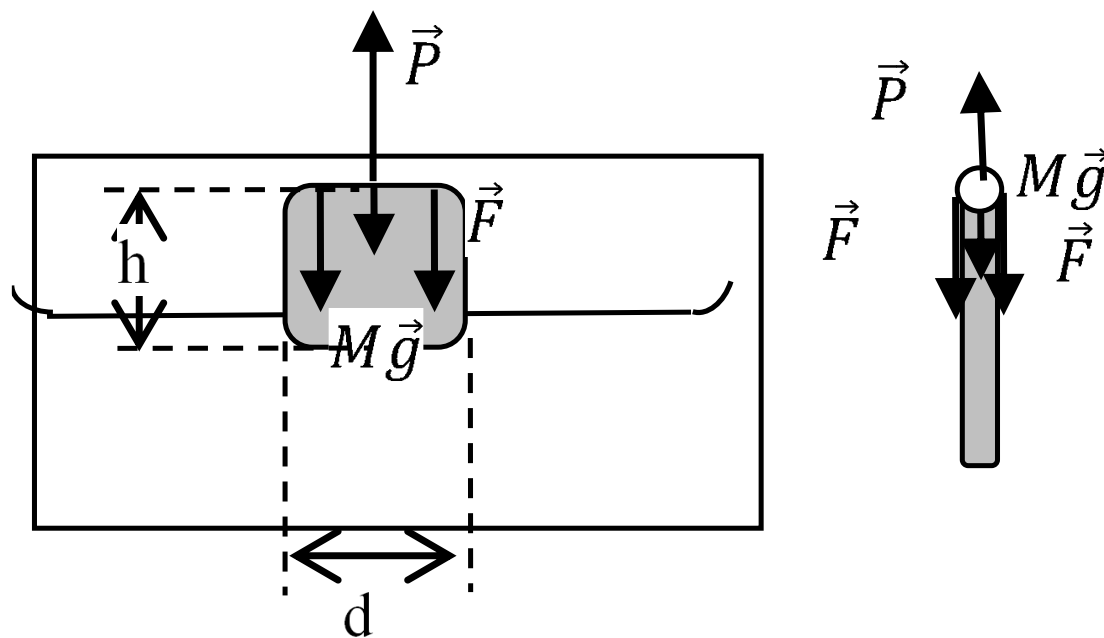
Um objeto flutuante causa uma ligeira depressão na camada superficial do fluido, tracionando esta camada que tende a aumentar sua energia potencial.

A maioria dos fenômenos associados com a física de superfícies podem ser descritos com a ajuda de uma única propriedade medível de uma superfície; ao modificar a forma do líquido de maneira que incremente a área da superfície, é necessária uma quantidade definida de trabalho por unidade de área para originar a nova superfície. Esse trabalho pode se recuperar quando a área diminui, de modo que, aparentemente a superfície é capaz de armazenar energia potencial.

As considerações energéticas permitem explicar de forma simples o fato que uma gota livre de um líquido adote a forma esférica. Um sistema se encontra em equilíbrio quando sua energia potencial é mínima. O estado de equilíbrio de um líquido é aquele que adota o menor valor, compatível com outras restrições, então, uma gota livre de um líquido toma a forma esférica por ser esta a superfície de área mínima para um volume dado.

O trabalho que se deve realizar para incrementar a superfície de um líquido resulta proporcional a esse incremento, e a constante de proporcionalidade, o trabalho por unidade de área, se denomina, **coeficiente de tensão superficial** do líquido, γ .

Uma maneira de medir a tensão superficial de um líquido é usar um fio deslizante de modo que quando ele é colocado a uma altura h sobre a superfície do fluido, é formada uma película cuja forma transversal é um retângulo.



Do diagrama de corpo livre ao lado, vemos que a tensão superficial tenderá a puxar para baixo o fio deslizante. A força externa P para cima é necessária para manter o fio em equilíbrio. Esta força P direcionada para cima deve equilibrar a força resultante para baixo atuando sobre o fio deslizante, que é igual a seu peso mais a força F da tensão superficial.

Experimentalmente, tem-se que a força F depende do comprimento d do fio, porém não depende da altura h do retângulo. Embora a camada superficial tenha sido idealizada como se fosse uma folha elástica sob tração sobre um líquido, a realidade mostra que essa concepção é incorreta.

A tensão superficial γ é definida como a *força superficial F por unidade de comprimento L , sobre a qual atua, isto é:*

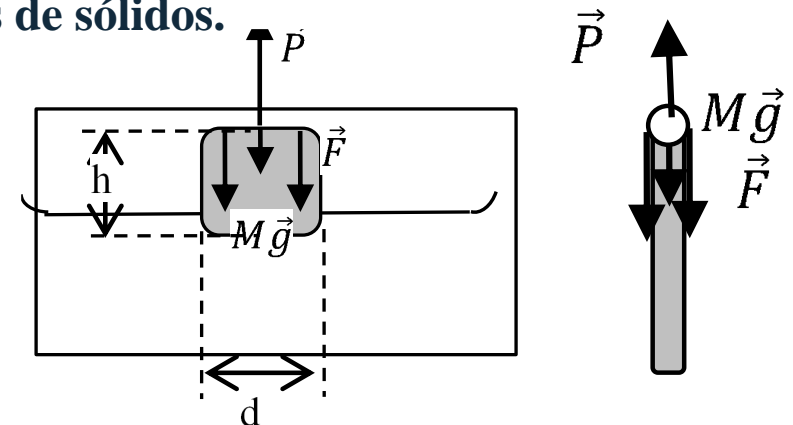
$$\gamma = \frac{F}{L}$$

γ não é uma força, é uma força por unidade de comprimento, que foi definido como tensão de deformação no caso de deformações de sólidos.

Para a película mostrada na figura, a força atua ao longo de um comprimento $L=2d$ porque existem duas camadas superficiais, cada uma com comprimento d .

Assim, a tensão superficial pode ser expressa como:

$$\gamma = \frac{F}{2d}$$



Analisaremos a tensão em função da energia.

Se o fio for deslizado para cima um deslocamento Δy .

O trabalho W realizado pela força superficial atuante para baixo vale: $-F\Delta y$.

Ao mover-se o fio para cima, a área da superfície aumenta de um valor $\Delta A = L\Delta y$.

A tensão superficial será, então :

$$\gamma = \frac{F}{L} = \frac{F \cdot \Delta y}{L \cdot \Delta y} = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Entende-se assim que a tensão superficial γ equivale a *energia potencial por unidade de área de superfície*.

Para a água na temperatura ambiente, o valor da tensão superficial é $\gamma = 0,073 \text{ N/m}$.

A adição de sabão reduz a tensão a $0,025 \text{ N/m}$.

Os líquidos orgânicos e as soluções aquosas possuem, tipicamente, tensões nessa faixa. A tensão superficial de metais líquidos é tipicamente uma ordem acima que a da água, por exemplo: $\gamma_{\text{Hg}} = 0,487 \text{ N/m}$.

Entende-se que esses valores de tensão superficial maiores nos metais acontece pelo fato que os metais possuem forças de atração maiores entre as moléculas.



A tensão superficial de um líquido pode ser medida a partir da medida da sobre-pressão no interior de uma bolha de ar formada no interior desse líquido.

A pressão no interior e no exterior de uma bolha no momento em que se descola do líquido, pode ser calculada como:

Pressão exterior: $p_e = p_0 + \rho gh$

Pressão interior: $p_i = p_0 + \rho_m gh_m$

A pressão no interior da bolha é a soma da pressão atmosférica p_0 mais a correspondente à altura máxima h_m marcada pelo manômetro que contém um líquido (líquido manométrico) de densidade ρ_m .

A diferença de pressão no interior e no exterior de uma bolha devido a sua curvatura é: $p_i - p_e = \frac{2\gamma}{R}$

ou $p_0 = p - \frac{2\gamma}{r}$ que significa que a pressão sobre a superfície convexa de uma superfície esférica difere da pressão p sobre a superfície côncava na quantidade $2\gamma/r$

substituindo as pressões pelas expressões anteriores:

$$p_0 + \rho_m gh_m - p_0 - \rho gh = \frac{2\gamma}{R} \Rightarrow \frac{g(\rho_m h_m - \rho h)R}{2} = \gamma$$

Onde R é o raio da bolha ou do capilar. O fator 2 (dois) é devido a que a bolha no interior de um fluido só apresenta uma face (uma bolha de sabão possui duas fases).



Assim, a tensão superficial γ pode ser calculada como:

$$\gamma = \frac{Rg}{2} (\rho_m h_m - \rho h)$$

Young e Laplace deduziram de forma independente em 1805 a expressão da diferença de pressão entre o interior e o exterior de uma superfície esférica de raio R .

$$p_i - p_e = \frac{2\gamma}{R}$$

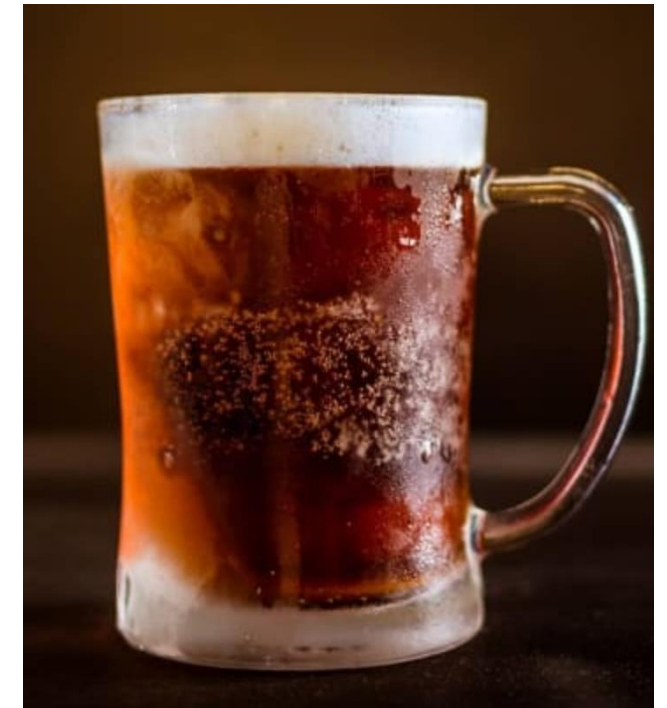
A fórmula de Young-Laplace demonstra que a pressão no interior de uma superfície esférica é sempre maior que no exterior, que a diferença de pressão aumenta quando diminui o raio dessa superfície, e que vai a zero quando a superfície é plana (raio infinito).

Os líquidos tendem a minimizar sua superfície. É por isso que as gotas têm forma esférica em ausência da gravidade. A tensão superficial tende a reduzir a área da superfície, portanto, o volume da gota. A diferença de pressão tende a incrementar o volume da gota, a condição de equilíbrio se alcança quando ambas tendências se compensam

Vídeos

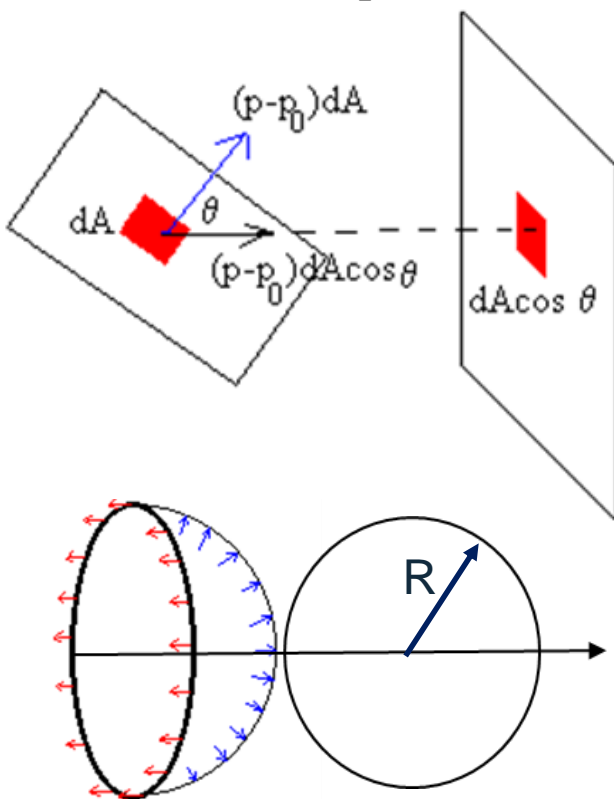
<https://www.youtube.com/watch?v=Svdv1cODIWw>

<https://www.youtube.com/watch?v=Bvl4m0PdL60>



Pressão produzida pela curvatura de uma superfície

Vamos a mostrar que no interior de uma gota ou de uma bolha em equilíbrio há uma pressão superior à exterior. Este excesso de pressão é devido à curvatura da superfície limite de separação.



A pressão exerce uma força normal à superfície.

Supondo que a pressão no interior da bolha seja p e no exterior p_0 , então a força sobre uma porção dA da lâmina é $(p-p_0)dA$, sua componente x , $(p-p_0)dA \cos \theta$. Mas, $dA \cos \theta$ é a projeção da área sobre um plano perpendicular ao eixo x .

A diferença de pressão entre o interior da bolha e o exterior origina forças sobre a superfície da bolha perpendiculares à superfície esférica, tal como indicam as setas da direita da **figura**. Sua projeção ao longo do eixo horizontal x , será o produto da diferença de pressão $(p-p_0)$ pela área projetada sobre um plano perpendicular ao eixo x (a projeção de uma semiesfera de raio R , sobre um plano é **um círculo de área πR^2**).

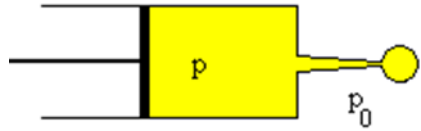
Uma bolha está formada por duas laminas superficiais esféricas muito próximas entre elas. Consideremos a metade da bolha e procuremos as forças que mantêm essa porção em equilíbrio.

- A força que origina a **diferença de pressão** é $F_1 = (p-p_0) \pi R^2$
- Força originada pela **tensão superficial**

A metade esquerda da bolha (não representada) exerce uma força para a esquerda igual a duas vezes a tensão superficial pelo perímetro (as setas da esquerda da figura) $F_2 = 2\gamma \cdot 2\pi R$

No equilíbrio $F_1 = F_2$. Assim, $p - p_0 = \frac{4\gamma}{R}$ a diferença de pressões é tanto maior quanto menor seja o raio R .

Esta expressão é um caso particular da denominada **lei de Laplace**. O fator quatro aparece porque uma bolha de sabão tem duas faces: interior e exterior. No caso de uma gota de água, só há uma face e assim a diferença de pressão se reduza metade



Supondo uma gota que se forma no extremo de uma seringa ao deslocar o embolo, tal como se indica na figura ao lado.

Seja p_0 a pressão exterior. Para formar a gota de raio r é necessário aplicar ao êmbolo uma pressão p maior que p_0 .

O trabalho realizado pelo embolo sobre o líquido a se deslocar é $W_{embolo} = F dx = p \cdot dV$, pois $p = \frac{F}{A}$.

Mas a gota realiza um trabalho $W_{gota} = p_0 \cdot dV$ sobre seu entorno já que desloca o ar ao incrementar seu volume dV . Ambos volumes são iguais devido ao fato do líquido ser incompressível.

O trabalho total sobre o líquido será $dW = W_{embolo} - W_{gota} = (p - p_0) \cdot dV$

Esse trabalho se emprega ao incrementar a superfície da gota, enquanto se mantém a temperatura e o volume do líquido constantes. $dW = \gamma dA$.

Lembrando que: $W = Fdx$ e $\gamma = \frac{F}{L}$ logo: $W = \gamma Ldy$, portanto $W = \gamma dA$

Igualando ambos trabalhos e considerando as fórmulas da área e do volume de uma superfície esférica.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad A = 4\pi r^2 \quad dV = 4\pi r^2 dr \quad \text{e} \quad dA = 8\pi r \cdot dr$$

$$(p - p_0)dV = \gamma dA$$
$$(p - p_0) 4\pi r^2 dr = \gamma 8\pi r dr$$

$$(p - p_0) = \frac{2\gamma}{r}$$

Problema 19, lista 7

Uma lata oca com um pequeno orifício de raio 0,1mm é mergulhada na água. A que profundidade começará a entrar a água na lata, através do orifício, sendo 0,073 N/m a tensão superficial?



$$(p - p_0) = \frac{2\gamma}{r}$$

$$p = \rho gh$$



A diferença de pressão numa superfície cilíndrica se obtém em forma análoga àquela para a gota. Suponhamos duas placas de vidro submergidas num líquido, como as da figura ao lado. A semicircunferência corresponde à seção reta de uma bolha de ar semicilíndrica.

A área da metade da superfície cilíndrica de raio R e geratriz L é: $A = \pi RL$

O incremento da área ao incrementar R é $dR \Rightarrow dA = \pi L dR$

E o trabalho para originar a nova superfície $dW = \pi \gamma L dR$ (1)

O trabalho realizado pelas forças de pressão é: $dW = (p - p_0) \pi R L dR$ (2)

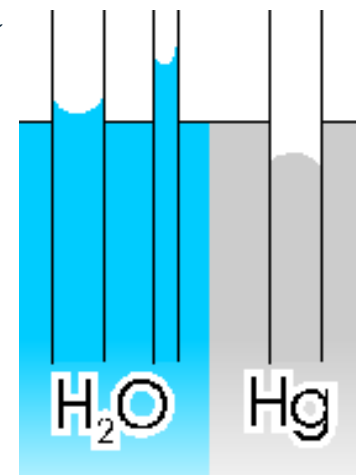
Igualando 1 e 2, vem: $(p - p_0) \pi R L dR = \pi \gamma L dR \Rightarrow (p - p_0) = \frac{\gamma}{R}$

A diferença de pressão é a metade da existente para uma superfície esférica do mesmo raio.

Vídeo capilar

Efeitos de capilaridade

O fenômeno de capilaridade é a propriedade que possui em tubo fino de sugar um líquido contra da força da gravidade. Esse efeito acontece quando as forças intermoleculares adesivas entre o líquido e o sólido são mais fortes que as intermoleculares coesivas do líquido. Isto causa um menisco côncavo ou convexo quando o líquido está em contato com a superfície vertical de, por exemplo, um tubo como o da figura acima. Este é o efeito que faz com que os materiais porosos absorvam líquidos. Um aparelho comum para demonstrar a capilaridade é o **tubo capilar**



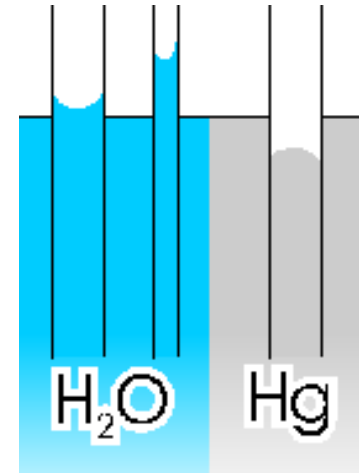
Quando a parte inferior de um tubo de vidro é colocado verticalmente num líquido como água, forma-se um **menisco convexo**. A tensão superficial suga a coluna líquida para cima até que o peso do líquido seja suficiente para que a força gravitacional, devido ao peso da coluna, seja igual às forças intermoleculares. O peso da coluna líquida é proporcional ao quadrado do diâmetro do tubo, assim, um tubo estreito sugará o líquido até uma altura maior que um tubo largo. Por exemplo, um tubo de vidro de 0,1 mm de diâmetro elevará 30 cm a coluna de água.

Em alguns materiais como o mercúrio e o vidro, as forças interatômicas no líquido excedem aquelas entre o líquido e o sólido, assim, forma-se um **menisco côncavo** e a capilaridade acontece em sentido inverso.

As plantas usam este fenômeno para sugar água, por mais que as plantas maiores precisam da transpiração para mover a quantidade necessária de água onde seja preciso.

Quanto menor é o diâmetro do tubo capilar maior será a pressão capilar e a altura do líquido. Em capilares de $1,0 \mu\text{m}$ de diâmetro com uma pressão de sucção de $1,5 \times 10^3 \text{ hPa}$ (1,5 atm), corresponde a uma altura de 15 m de coluna de água.

Duas placas de vidro separadas por uma película de água de $1 \mu\text{m}$ de espessura, podem se manter unidas por uma pressão de sucção de 1,5 atm. Por isso as placas de vidro “porta-objeto” umedecidos quebram quando se trata de separá-los.



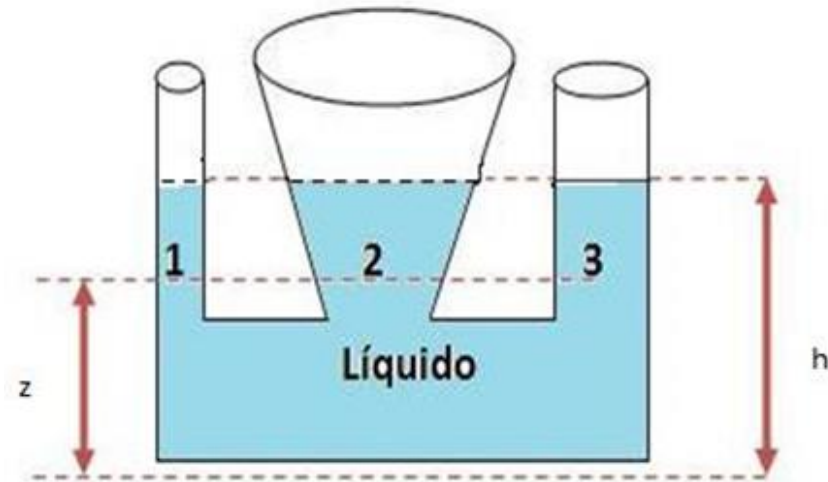
A altura h em metros de uma coluna líquida pode ser calculada como: $h = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{\rho g r}$

onde: γ_{LV} = tensão superficial interfacial (N/m); θ = ângulo de contato; ρ = densidade do líquido (kg/m³);
 g = aceleração da gravidade (m/s²); r = raio do tubo (m)

A altura da coluna do líquido, h , é função dos valores da tensão superficial, γ , **do peso específico do líquido**, ρ , e do ângulo de contato entre o fluído e o material do tubo, θ .

Analisando o diagrama de corpo livre é possível concluir que a força vertical provocada pela tensão superficial é igual a: $2\pi R \gamma \cos \theta$, e o peso da coluna é: $\rho g \pi R^2 h$

como estas duas forças devem ser equilibradas: $2\pi R \gamma \cos \theta = \rho g \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g R}$



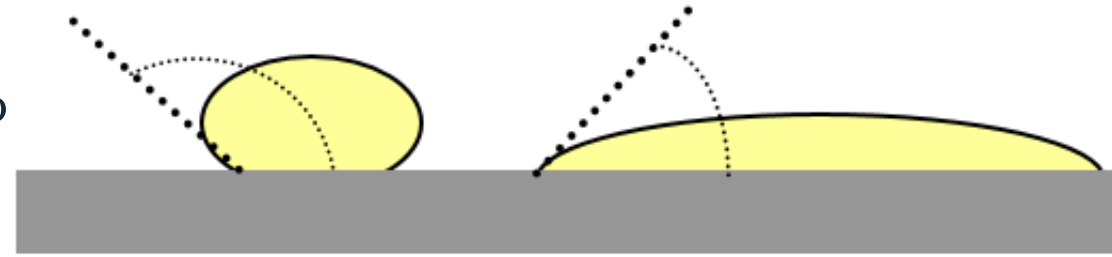
Exemplos:

Esponjas

Pano com uma ponta em um balde d'água

Tensão superficial

O efeito do detergente sobre uma gota de água em repouso sobre um material impermeável pode ser desenhado como:



O efeito de elevação mais conhecido é o da elevação de um líquido em um tubo aberto de pequena secção transversal.

O termo capilaridade é usado para definir tais efeitos. No caso do líquido que “molha o tubo, o ângulo de contato é menor que 90° e o líquido sobe até uma altura de equilíbrio y .

A superfície curva do líquido no tubo é chamada “menisco”.

Se o raio do tubo for r o líquido fará contato com o mesmo ao longo de uma linha de comprimento $2\pi r$. Quando se isola o cilindro de líquido de altura y e raio r , junto com seu filme líquido-vapor, a força total para cima é: $F = 2\pi r \gamma_{LV} \cos \theta$

A força para baixo é o peso w do cilindro de raio r e altura y , assim:

$$w = mg = \rho V g = \rho g \pi r^2 y$$

Como o cilindro está em equilíbrio,

$$\rho g \pi r^2 y = 2 \pi r \gamma_{LV} \cos \theta \Rightarrow y = \frac{2 \pi r \gamma_{LV} \cos \theta}{\rho g \pi r^2} = \frac{2 \gamma_{LV} \cos \theta}{\rho g r}$$

A mesma expressão vale para a depressão capilar.

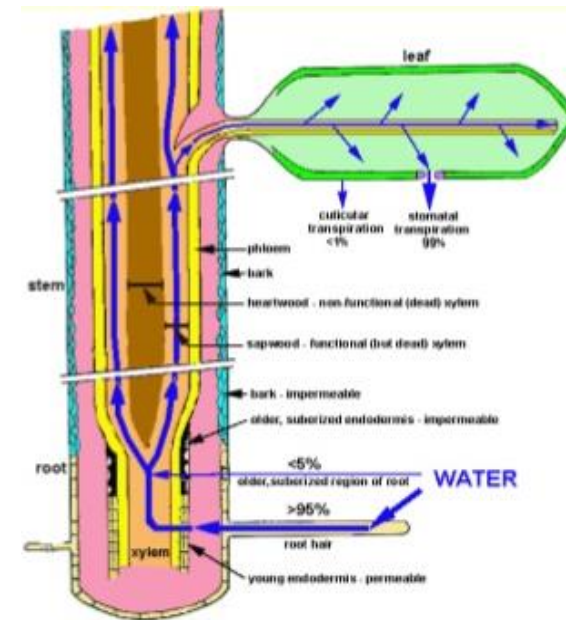
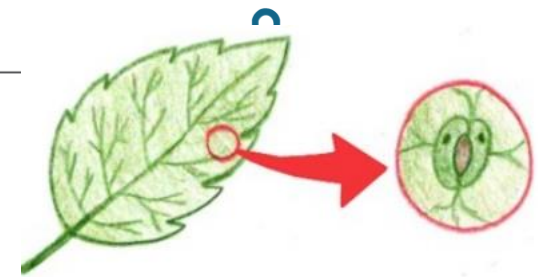
Deve-se a capilaridade, o efeito de absorção de água por uma esponja, a subida do fluido por um pavio de um isqueiro e outros fenômenos comuns.

A capilaridade é um fenômeno importante numa variedade de processos biológicos: elevação de água das raízes até a folhagem das plantas, condução da seiva e na circulação sanguínea periférica dos animais, etc.

A **transpiração vegetal** ocorre através dos estomas localizados fundamentalmente na epiderme. Uma árvore grande pode perder centenas de litros de água num dia seco e quente. O grau de evaporação da água por uma planta depende de fatores como temperatura, umidade relativa do ambiente, vento, luminosidade do subministro de água para a planta.

Estima-se que 90% da água que entra nas plantas pelas raízes é utilizada neste processo. As plantas extraem do solo grandes quantidades de água, que contêm sais minerais dissolvidos. Desta maneira, obtém do solo a água necessária para manter sua hidratação, além do nitrogênio, fósforo, potássio, enxofre e os cátions minerais necessários para sua nutrição autótropa. Desta maneira, quando uma planta, obrigada pela seca, fecha seus estomas e limita sua transpiração, para por sua vez de se alimentar.

A água transpirada permite o esfriamento da planta. A transpiração é uma maneira efetiva de trocar calor com o meio, por conta do elevado calor de vaporização da água (quando se evapora leva muitas calorias). As plantas de climas secos, semi-áridos ou desérticos têm desenvolvido na sua evolução mecanismos especiais, como agulhas, folhas grossas recobertas de uma cutícula de cera ou de tricoma, para reduzir esse processo de perda de água.



O xilema é um sistema de tubos capilares de uma planta que transporta nutrientes para as suas partes mais altas. Cada tubo tem raio aproximado de 0,01mm. A que altura a água ascenderá pela capilaridade num destes tubos, admitindo que seja nulo o ângulo de contato? A tensão superficial da água é da ordem de 0,073 N/m

Assim, aplicando a expressão:

$$h = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{\rho g r}$$

e substituindo os valores:

$$h = \frac{2 \cdot 0,073}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 0,01 \cdot 10^{-3}} = 1,49 = 1,5 \text{ m}$$

Problema 14, lista 7

(SSY, 12-46) Uma árvore de 50 m de altura tem tubos capilares, que conduzem a seiva, em forma de cilindros uniformes de 2×10^{-4} mm de raio. Se a tensão superficial e o ângulo de contato forem $0,05 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ e 45° , respectivamente, calcule a pressão mínima que deve existir nas raízes para que a seiva chegue ao topo da árvore.

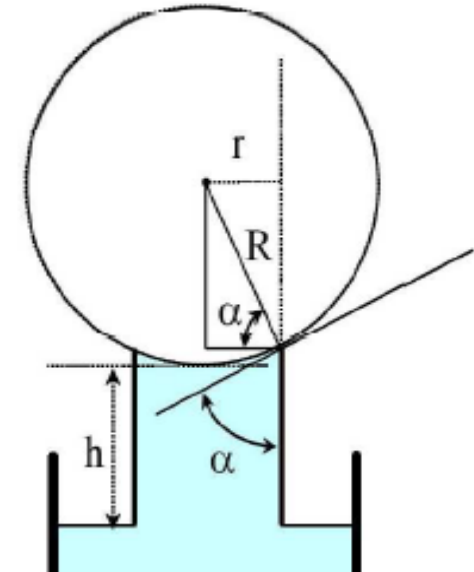
A pressão de Laplace que provêm da força vertical devida à tensão superficial é dada por:

$$P_l = \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{r}$$

O peso da coluna de água pode ser calculado como:

$$w = mg = \rho V g = \rho g \pi r^2 h$$

Dado que:
$$P_g = \frac{w}{A} = \frac{\rho g \pi r^2 h}{\pi r^2} = \rho g h$$



Como se trata de equilíbrio de forças, e como consequência de pressões: $F_l + F_r = w \therefore P_l + P_r = P_g \Rightarrow$

$$P_r = P_g - P_l = \rho g h - \frac{2\gamma_{LV} \cos \theta}{r} = 10^3 \cdot 10 \cdot 50 - \frac{2 \cdot 0,05 \cdot \cos \theta}{2 \times 10^{-7}} = 5 \times 10^5 - 3,53 \times 10^5 =$$

$$1,46 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Conceitos gerais do escoamento dos fluidos

Fluído é uma substância que se deforma continuamente sob a ação de um esforço (tensão) tangencial, não importando quão diminuto seja este esforço. Vimos que quando é aplicada uma força tangencial, o fluido escoa. Nessa definição não fizemos qualquer referência à sua estrutura molecular. Todos os fluidos compõem-se de moléculas em constante movimento. Entretanto, na maioria das aplicações da engenharia, interessa-nos a média ou os efeitos macroscópicos do conjunto de moléculas. São esses efeitos macroscópicos que podemos perceber e medir. Assim sendo, trataremos qualquer fluido como uma substância que pode ser dividida ao infinito, um *contínuo*, sem nos preocupar com o comportamento individual de suas moléculas.

Na mecânica clássica, o conceito de contínuo é válido para examinar o comportamento dos fluídos em condições normais, esta hipótese falha sempre que o curso médio livre de colisão entre moléculas torna-se da mesma ordem de grandeza da menor dimensão característica significativa do problema (normalmente para moléculas de gás). No comportamento de gases rarefeitos, se deve abandonar a hipótese do contínuo em favor dos pontos de vista microscópicos e estatísticos. Como consequência da hipótese do contínuo, qualquer propriedade de um fluído tem valor definido em cada ponto do espaço. Assim, as propriedades dos fluídos tais como densidade, temperatura, velocidade e outras são consideradas funções contínuas do espaço-tempo.

Para analisar o conceito de escoamento dos fluidos utilizaremos conceitos já conhecidos como as leis de Newton para o movimento e as condições de conservação da energia, além da utilização de variáveis como pressão e densidade.

O modelo de análise simplificado, da mesma forma que no início do estudo da mecânica, quando desprezávamos as forças dissipativas, será analisar o escoamento do fluido desprezando as forças dissipativas. No movimento dos fluidos reais essas forças dissipativas ou viscosas fazem com que os fenômenos observados sejam interessantes e incomuns.



Uma das formas de analisar o escoamento dos fluidos é considerar elementos de volume infinitesimais, que podem ser chamados *partículas fluidas* e seguir o movimento de cada partícula. Assim, basta identificar uma dada partícula na sua posição \vec{r}_0 no fluido num dado instante t_0 . Num instante posterior ela ocupará uma posição $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0, t_0)$.

Quando t varia, o vetor \vec{r} descreve a trajetória da partícula do fluido. Se soubermos calcular \vec{r} em função de t para qualquer partícula, teremos uma descrição do movimento do fluido. Se as forças atuantes em cada partícula fluida forem conhecidas, será possível resolver as equações que governam as posições e velocidades de cada partícula como funções do tempo, procedimento que é uma generalização direta da mecânica da partícula, inicialmente desenvolvido por Lagrange (1736-1813). Dado que o número de partículas num fluido é grande, pode resultar num trabalho relativamente grande.

Outro procedimento, desenvolvido por Euler (1707-1783), consiste em definir a trajetória de cada partícula fluida, calcula-se a massa específica (densidade) e a velocidade do fluido em cada ponto do espaço em cada instante de tempo. Desta maneira direcionamos o estudo à compreensão do que acontece em um ponto particular do espaço em um dado tempo e não o que ocorre com uma partícula específica do fluido. Para este método fixamos a atenção em cada ponto \vec{r} do fluido e descrevemos como varia com o tempo a velocidade \vec{v} nesse ponto fixo do fluido: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$

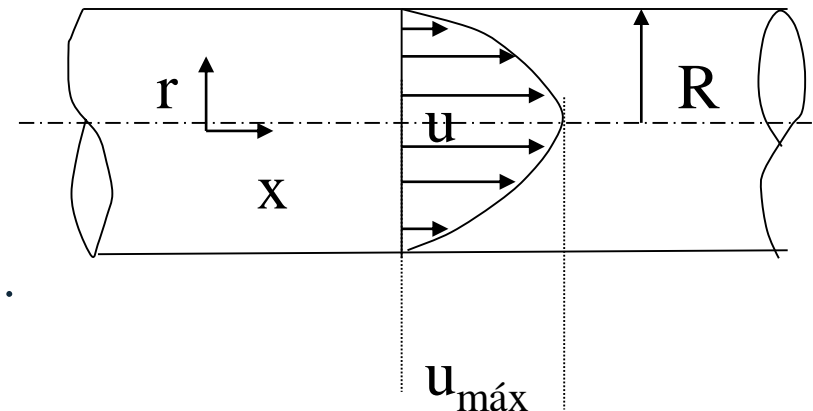
Em geral, a cada instante t , será uma partícula diferente do fluido que passará pela posição \vec{r} . Chama-se linha de corrente num dado instante uma linha tangente em cada ponto do vetor \vec{v} nesse ponto.

Os escoamentos podem ser classificados como uni-, bi- ou tri-dimensionais, de acordo com o número de coordenadas necessárias para definir seus campos de velocidades, por exemplo, a seguinte equação indica que o campo de velocidades pode ser função de 3 coordenadas e do tempo, $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$

Nem todos os campos de escoamento são tri-dimensionais. consideremos por exemplo o movimento permanente através de um longo conduto retilíneo de secção transversal constante. A partir de certa distância da secção de entrada desta tubulação, a velocidade pode ser descrita pela equação:

$$u = u_{m\acute{a}x} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

onde este campo só depende do raio do tubo .



1. estacionário ou não estacionário.

O escoamento é descrito em função das variáveis pressão, densidade e velocidade para todos os pontos do fluido. Por exemplo, o escoamento estacionário, acontece quando essas variáveis não dependem do tempo; chama-se estacionário ou em regime permanente quando o campo de velocidade do fluido não varia com o tempo. Isto quer dizer que diferentes partículas do fluido sempre passam pelo mesmo ponto com a mesma velocidade, embora v , possa variar de ponto a ponto.

Num escoamento estacionário, as linhas de corrente coincidem com as trajetórias das partículas do fluido. Duas linhas de corrente nunca podem se cruzar, porque num ponto de cruzamento, haveria uma ambigüidade na direção da velocidade, com duas direções diferentes no mesmo ponto. Assim, num escoamento estacionário, as partículas do fluido que estão num dado tubo de corrente num dado instante nunca podem atravessar as paredes desse tubo: permanecem dentro dele e o fluido escoar dentro do tubo como se as paredes fossem sólidas, constituindo uma canalização.

Exemplo deste tipo de escoamento é o que acontece a baixas velocidades como a de um riacho, ou o escoamento de água dentro de uma canalização ligada a um grande reservatório. Num escoamento não estacionário, as linhas de corrente variam a cada instante e não coincidem mais com as trajetórias, como no caso das marés. No caso extremo, encontramos o escoamento turbulento é o caso de cachoeiras, em que \vec{v} varia de forma extremamente rápida e irregular tanto com t como com \vec{r} .



2. *compressível ou incompressível.*

Se a densidade for constante, trata-se de um escoamento incompressível.

3. *viscoso ou não viscoso.*

A velocidade de um fluido é análoga ao movimento dos sólidos que depende do atrito – a energia cinética pode ser transformada em energia interna das partículas pelas forças viscosas quanto maior a viscosidade, maior será a força externa ou pressão a ser aplicada para manter o escoamento sob condições similares.

4. *rotacional ou irrotacional.*

No escoamento rotacional um elemento do fluido com centro num ponto possui momento angular em torno desse ponto, ou seja, gira ao mesmo tempo em que é transportado pelo movimento; no escoamento *irrotacional* o momento angular de cada partícula em torno do seu centro é nulo.

Podemos detectar a diferença colocando no interior do fluido uma pequena rodinha de pá: no escoamento rotacional, a rodinha gira enquanto é transportada; no escoamento irrotacional, a rodinha é transportada sem girar.

O escoamento pode ser turbulento ou não. Nesta disciplina só trabalharemos com escoamento de um fluido “ideal”, isto é, não turbulento. É o escoamento onde não há dissipação de energia mecânica.

Se admitirmos que o fluido é incompressível, a densidade é constante em qualquer ponto do fluido. Se tivermos um tubo de área de secção reta variável, e um fluido escoando por ele, a partícula fluída que “entra” na secção A_1 do tubo durante o intervalo de tempo Δt , é representado por:

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_1 \cdot x_1 = \Delta V$$

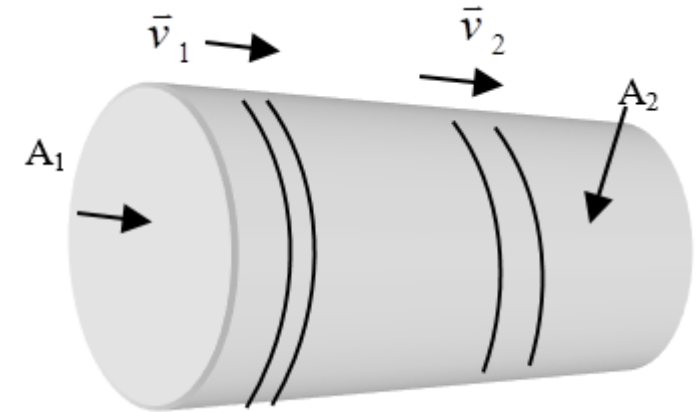
Como admitimos que o fluido é incompressível, uma partícula fluída igual deve “sair” no tubo pela área 2, A_2 . Portanto:

$$\Delta V = A_2 \cdot x_2 = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$

$$A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \Rightarrow A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = I_V = \text{constante}$$

***Equação da
continuidade***

Onde I_V é chamada *vazão* volumar também interpretada como $I_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}$



(Tipler Cap 13 E 49) O sangue circula a 30 cm/s numa aorta com 9 mm de raio.

a) Calcular a vazão do sangue em litros por minuto. b) Embora a área da seção reta de um capilar sanguíneo seja muito menor do que a da aorta há muitos capilares, de modo que a área total das seções retas do sistema de capilares é muito maior do que a da aorta. O sangue da aorta passa através dos capilares com uma velocidade de 1,0 mm/s. Estimar a área total das seções retas dos capilares.

a) Dado que 1ℓ equivale a 1000 cm³ deixaremos as unidades em cm. A área da aorta = $3,14 \cdot (0,9)^2 = 2,54 \text{ cm}^2$

Assim, a vazão do sangue em litros por minuto é:

$$vazão = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = A \cdot v =$$

$$= \pi r^2 \cdot v = \pi (0,9)^2 30 \cdot 60 = 2,54 \cdot 1800 = 4572 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} = 4,572 \frac{\text{l}}{\text{min}}$$

$$b) vazão = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow A = \frac{vazão}{v} = \frac{4572}{0,1 \cdot 60} = 763 \text{ cm}^2$$

Problema 4, lista 7

(Tipler Cap 13 E54) Um bombeiro segura uma mangueira de incêndio que tem uma curvatura, como está na figura abaixo. O raio da seção reta do jato de água no bocal é 1,5 cm e a velocidade da água é 30m/s. a) Que massa de água sai pelo bocal em 1s? b) Qual o momento horizontal dessa massa de água? c) Antes de chegar à curva da mangueira, o momento da água é dirigido na vertical para cima e depois está na direção horizontal. Desenhar o diagrama vetorial dos vetores momentos inicial e final e achar a variação do momento da água, na curva, em 1 s. Calcular então a força que a mangueira exerce sobre a água

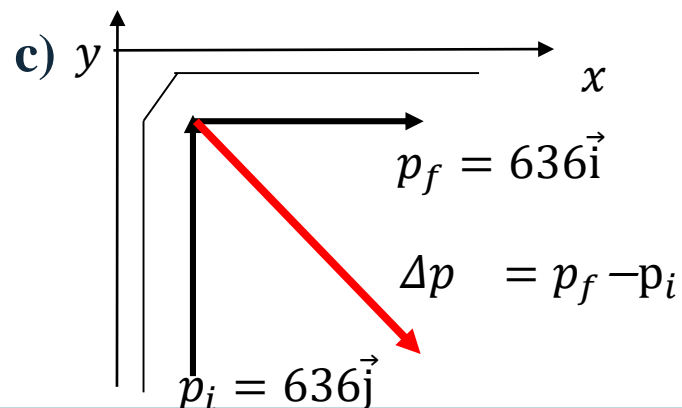


$$\rho_{agua} = \frac{m_{agua}}{V} \Rightarrow m_{agua} = \rho_{agua} \cdot V \quad (1)$$

$$V = vazão \cdot \Delta t = A \cdot v \cdot \Delta t = \pi r^2 \cdot v \cdot \Delta t = \pi (0,015)^2 \cdot 30 \cdot 1 = 0,0212 \text{ m}^3$$

a) de (1), $m_{agua} = \rho_{agua} \cdot V = 10^3 \cdot 0,0212 = 21,2 \text{ kg}$

b) $p = m \cdot v = 21,2 \cdot 30 = 636 \text{ kg.m/s}$



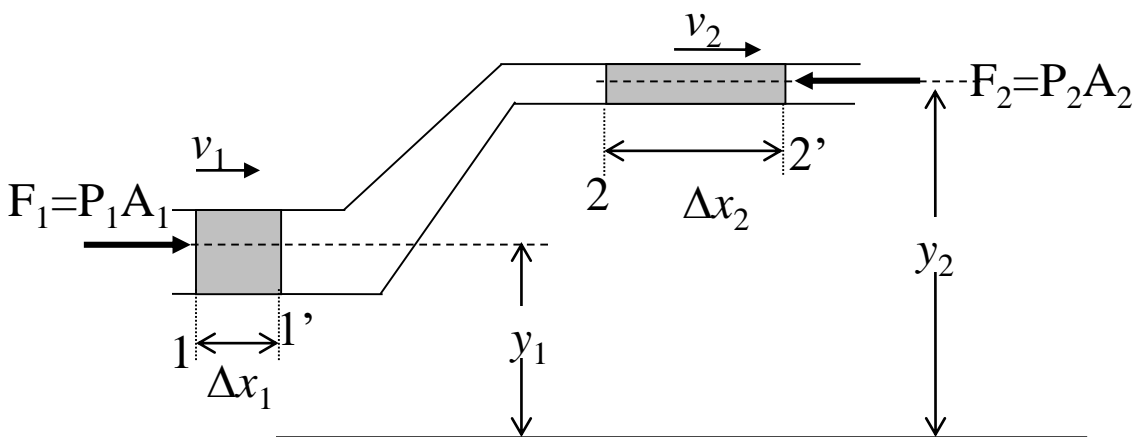
$$\Delta p = p_f - p_i = 636\vec{i} - 636\vec{j} \text{ em kg.m/s.}$$

$$|\Delta p| = \sqrt{2 \cdot 636^2} = \sqrt{809} = 899 \text{ kg.m/s.}$$

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{899}{1} = 899 \text{ kg.m/s}^2$$

Equação de Bernoulli

Esta equação relaciona a pressão, a elevação e a velocidade de um fluido incompressível num escoamento permanente. É consequência das leis de Newton e se deduz pela conservação de energia de um segmento do fluido ou de uma “partícula fluída”.



Quando o fluido se desloca durante o intervalo de tempo Δt a massa Δm pode ser elevada da altura y_1 para a altura y_2 e a velocidade ter passado de v_1 a v_2

Como o escoamento é estacionário, a porção do “filete” compreendida entre 1 e 2 não precisa ser levada em conta no balanço da energia, pois as condições permanecem as mesmas.

Consideremos um fluido em movimento num tubo cuja elevação e a área da secção reta sejam variáveis. Aplicaremos o teorema da conservação de energia ao fluido que está inicialmente entre os pontos 1 e 2. Depois de um intervalo de tempo Δt , o fluido se desloca no tubo e passa a ocupar a região entre os pontos 1' e 2'.

Vejamoss uma parte do fluido passa por 1 e 1'

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \quad (1)$$

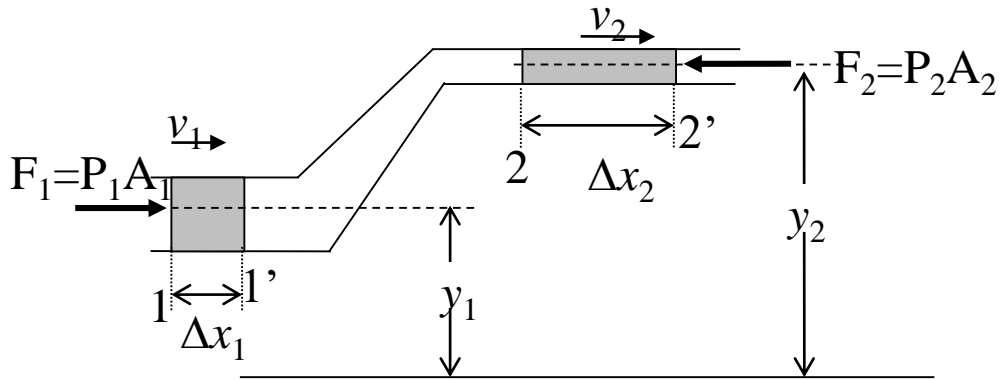
A variação de energia potencial no fluido é:

$$\Delta U = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 = \rho \Delta V g (y_2 - y_1) \quad (2)$$

após substituir Δm por $\rho \Delta V$ da expressão (1).

e a variação de energia cinética:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad (3)$$



Ao mesmo tempo, o fluido à direita do elemento de volume considerado exerce uma força $F_2 = P_2 A_2$, dirigida para a esquerda.

O trabalho resultante de ambas as forças é: $W_{total} = P_1 \Delta V - P_2 \Delta V = (P_1 - P_2) \Delta V$ (4)

Pela conservação da energia mecânica: $W_{total} = \Delta U + \Delta K$. (5)

Assim, de (5), (4), (3) e (2). $(P_1 - P_2) \Delta V = \rho g \Delta V (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad \div \Delta V,$

$$P_1 - P_2 = \rho g (y_2 - y_1) + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) \quad \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g y_2 - \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante} (*)$$

O fluido que está a esquerda do elemento de volume limitado pela área 1, exerce sobre o elemento de volume considerado uma força $F_1 = P_1 A_1$, sendo P_1 a pressão em 1.

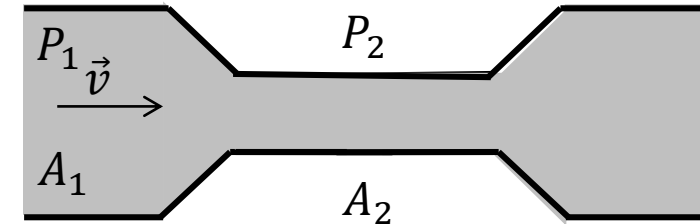
O trabalho dessa força é: $W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 \Delta V$

O trabalho desta força é negativo pois se opõe ao movimento: $W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 \Delta V$.

$$P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante} (*)$$

Em um fluido em repouso, $v_1 = v_2 = 0$. Se aplicarmos a expressão anterior (*), $P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h$, chegamos à lei de Stevin já analisada anteriormente.

Há casos em que o fluido escoar através de um tubo com uma secção estrangulada

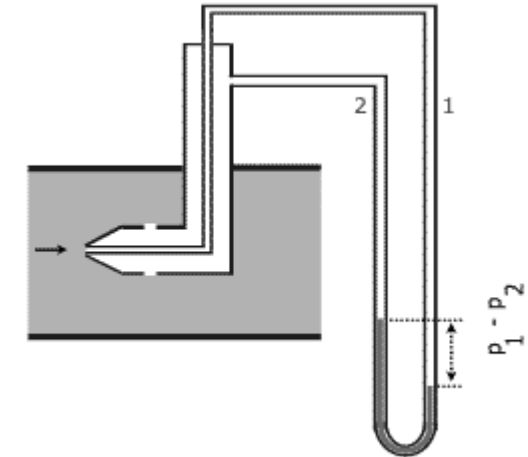
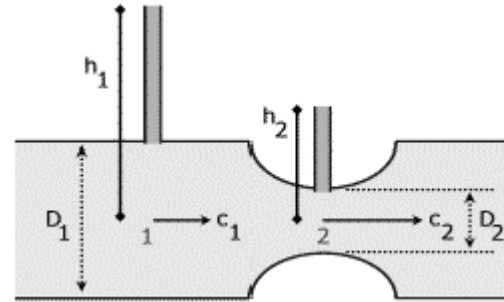
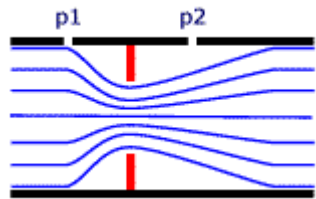


A altura das duas secções é a mesma, assim, na eq. (*)

$y_1 = y_2$. desta maneira a equação de Bernoulli fica: **$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$** .

Quando um fluido se move numa região estrangulada, a área A_2 se torna menor e a velocidade v_2 aumenta a fim que o produto Av permaneça constante. Porém, como $P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$, se a velocidade v aumenta, a pressão P deve diminuir. Então, a pressão na parte estrangulada fica reduzida.

Muitos tipos de dispositivos foram desenvolvidos, a partir da equação de Bernoulli, para medir a velocidade de escoamentos e vazões em massa. Um modo eficiente de medir a vazão em volume em tubos é instalar algum tipo de restrição no tubo e medir a diferença entre as pressões na região de baixa velocidade e alta pressão e alta velocidade e baixa pressão.



A equação de Bernoulli sofre uma séria restrição, pois não considera perdas de energia devido às tensões viscosas e turbulentas. Tais tensões se manifestam no interior do tubo de corrente gerando uma perda de energia que se degrada em calor. Na prática, esse calor terá dois destinos, em geral combinados em maior e ou menor intensidade: uma parte é liberada ao meio ambiente e outra aumenta a energia interna do fluido. Em termos de carga, essa perda de energia é chamada de *perda de carga*, ΔH . Assim, esta equação se aplica ao fluido fictício não viscoso chamado *fluido perfeito*. Sabemos que os fluidos da natureza e os fluidos sintéticos, os chamados *fluidos reais* têm todos viscosidade (que pode ser baixa, mas são sempre viscosos). Portanto, a perda de carga sempre existirá no escoamento de um fluido real. Porém, há certos casos em que a perda de carga é pequena quando comparada com as demais cargas, podendo, então, ser desprezada na prática.

Até a próxima aula