15. (Moises cap 1 E 10) (a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água próxima de 0 °C. Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera? (b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água na piscina sobe, desce ou não se altera? (Três físicos famosos a quem este problema foi proposto erraram a resposta. Veja se você acerta!)

A)

Situação inicial:

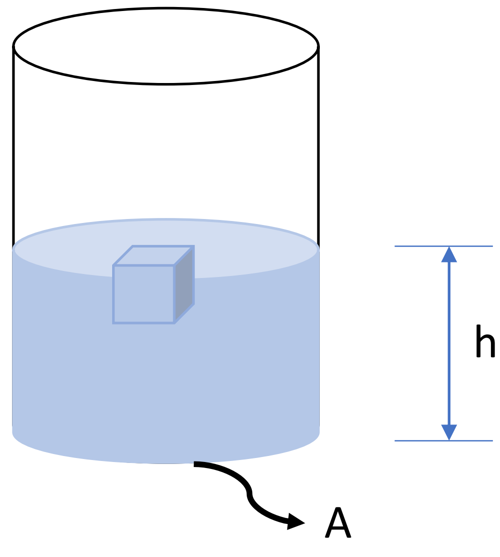
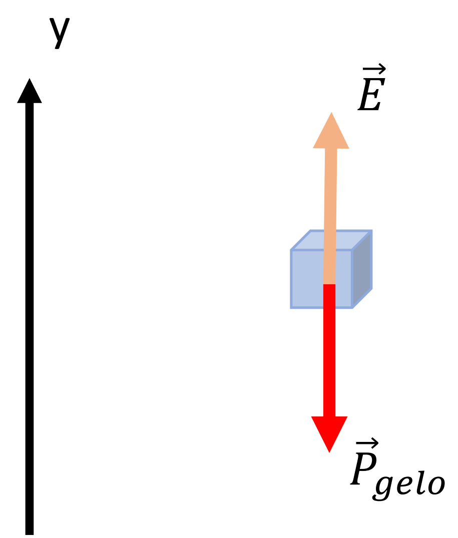


Diagrama de corpo livre para o cubo de gelo:



Inicialmente, o gelo flutua sobre a água, o que significa que ele está em equilíbrio, e portanto temos que o empuxo, $\vec{E}$ = E$\hat{j}$ é igual ao peso do cubo de gelo,$\vec{P}$=-mg $\hat{j}$.
Desse modo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{E} + \vec{P}_{gelo} = \vec{0}$$

$$E\hat{j} + (-\, m_{gelo}.g)\ \hat{j} = 0\hat{j}$$

Além disso, sabemos que:

$$\begin{cases} |\vec{P}_{gelo}| = m_g \, g \\ |\vec{E}| = \rho_{água} V_{sub,i} g \end{cases}$$

$$m_{gelo} . g = \rho_{água} . V_{sub,i} . g$$
$$m_g = \rho_{água} . V_{sub,i}$$

Mas, a massa de gelo pode ser escrita como:

$$m_g = \rho_{gelo} . V_{gelo}$$

Então:

$$V_{sub,i} = \frac{\rho_{gelo}}{\rho_{água}} V_{gelo}$$

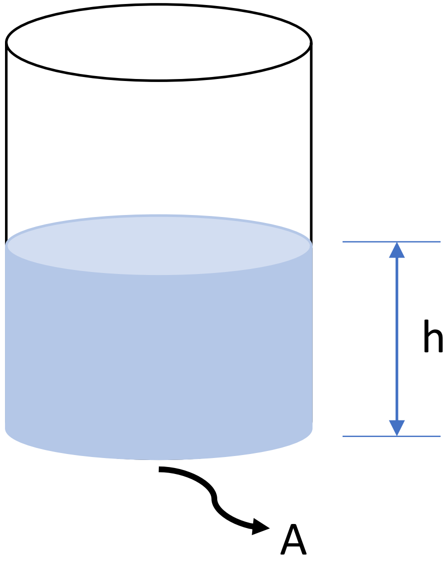
Como ρ_{gelo} = 0,920 g/cm³ e $\rho_{água}$ = 1,000 g/cm³, temos:

$$V_{sub,i} = 0{,}92 \, V_{gelo}$$

Vamos considerar no instante inicial, t_0, que o volume total, V_T, é igual ao volume do cubo de gelo (parte submersa + parte não submersa) somado com o volume da água no copo, $V_{água,copo}$:

Assim, $$\boldsymbol{V_T(t_0) = V_{sub,i} + V_{água,copo} + V_{não\ sub,i} = A . h + V_{não\ sub,i}}$$

Situação final



Agora, todo o cubo de gelo foi derretido, pois mudou de fase à temperatura constante. Assim, a massa de gelo que tinha densidade ρ_{gelo} agora é massa de água com densidade $\rho_{água}$. Vamos denominar a massa de água que era gelo por: $m_{gelo\rightarrow água}$. Além disso, como a massa se conserva, a massa de gelo é igual a massa de água que era gelo. Assim, temos:

$$m_{gelo} = m_{gelo\rightarrow água}$$

$$\rho_{gelo}\, V_{gelo} = \rho_{água}\, V_{gelo\rightarrow água}$$

$$V_{gelo\rightarrow água} = \frac{\rho_{gelo}}{\rho_{água}} V_{gelo}$$

Logo,

$$V_{gelo\rightarrow água} = 0{,}92.\, V_{gelo} = V_{sub,i}$$

Ou seja, algo importante é para se notar: a massa de gelo ao se liquefazer e virar massa de água, reduz o seu volume em 8% e acaba possuindo um volume final igual ao volume submerso inicial. Ou seja, há uma contração na mudança de fase.

Assim, no instante final, t_f, o volume total, V_T, é igual ao volume do cubo de gelo derretido ($V_{gelo \to água}$) somado com o volume da água no copo ($V_{água,copo}$):

$$V_T\ (t_f) = V_{gelo \to água} + V_{água,copo}$$

$$V_T\ (t_f) = 0{,}92.V_{gelo} + V_{água,copo}$$

Ou

$$\boldsymbol{V_T\ (t_f) = V_{sub,i} + V_{água,copo} = A.h'}$$

O volume inicial total era dado por:

$$\boldsymbol{V_T(t_0) = V_{sub,i} + V_{água,copo} + V_{não\ sub,i} = A.h + V_{não\ sub,i}}$$

Ou seja,

$$\boldsymbol{V_T\ (t_f) + V_{não\ sub,i} = V_T(t_0)}$$

Assim,

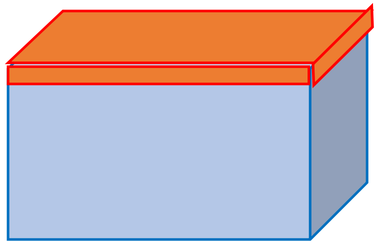
$$A.h' + \boldsymbol{V_{não\ sub,i}} = A.h + \boldsymbol{V_{não\ sub,i}}$$

$$A.h' = A.h$$

$$\boldsymbol{h = h'}$$

Portanto, a altura final do volume de água é igual a altura inicial do volume de água, ou seja, o nível da água permanece o mesmo.

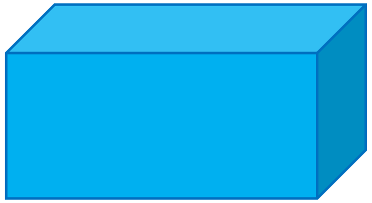
Antes da mudança de fase (sólido):



Parte do gelo fora da água: 0,08 V_{gelo}

Parte do gelo submersa: 0,92 V_{gelo}

Após a mudança de fase (líquido):



Água com volume de 0,92 V_{gelo}

O gelo ao mudar de fase do estado sólido para o estado líquido altera sua densidade.

Sua densidade é aumentada quando vai para o estado líquido.

Os 0,08 V_{gelo} que não estavam submersos, ou seja, fora da água se encontra, após a liquefação, nos 0,92 V_{gelo}, pois as moléculas estão mais compactadas.

15. (Moises cap 1 E 10) (a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água próxima de 0 °C. Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera? (b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água na piscina sobe, desce ou não se altera? (Três físicos famosos a quem este problema foi proposto erraram a resposta. Veja se você acerta!)

B)

Situação inicial:

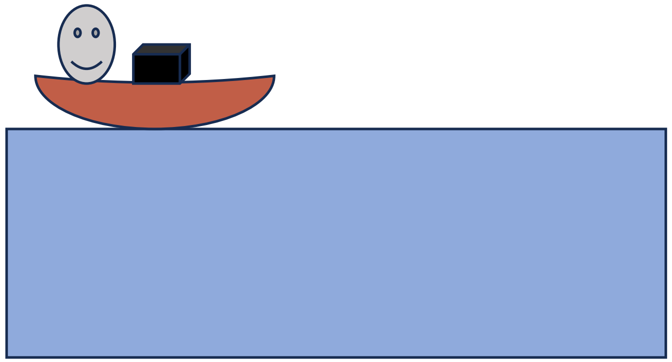
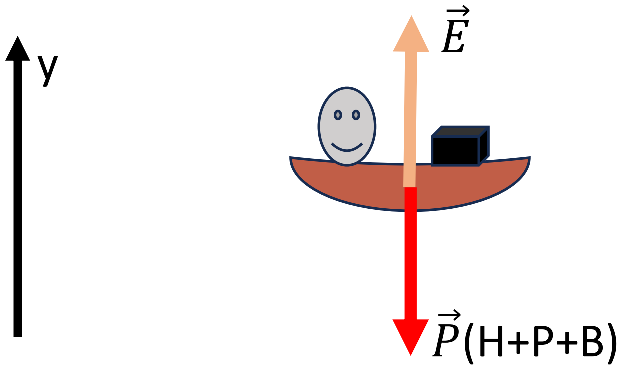


Diagrama de corpo livre para o sistema (Homem+ Pedra+Barco):



Inicialmente, tanto o homem quanto a pedra estão no barco, em situação de equilíbrio, o que implica que o empuxo, $\vec{E}$ = E$\hat{\jmath}$ é igual ao peso do sistema , $\vec{P}$(H+P+B)= - g(mH+mP+mB) $\hat{\jmath}$. Desse modo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{E} + \vec{P}(H+P+B) = \vec{0}$$

$$E\hat{\jmath} + [- g(mH+mP+mB)\ \hat{\jmath}] = 0$$

Mas sabemos que: E = ρVg

Onde V_0 é o volume submerso inicial do barco. Deste modo:

$$\rho\ V_0\ g\ \vec{j} = g\ (mH+mP+mB)\ \hat{\jmath}$$

$$mP + (mH + mB) = \rho\ V_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Situação final:

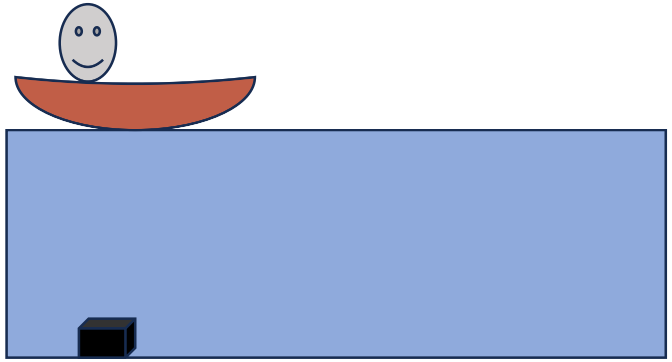
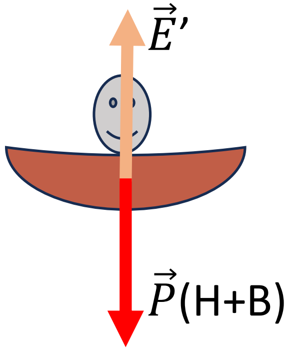


Diagrama de corpo livre para o sistema (Homem+Barco):



Agora o homem atira a pedra na piscina, apenas o homem se encontra no barco, em situação de equilíbrio, o que implica que o empuxo, $\vec{E}'$ = E$\hat{j}$ é igual ao peso do sistema , $\vec{P}$(H+B)= - g(mH+mB) $\hat{j}$. Desse modo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{E}' + \vec{P}(H+B) = \vec{0}$$

$$E\hat{j} + [- g(mH+mB)\,\hat{j}] = 0$$

Mas sabemos que: E = ρVg

Onde V_f é o volume submerso final do barco. Deste modo: $\rho\, V_f\, g\, \vec{j} = g\,(mH+mB)\,\hat{j}$

$$(mH+mB) = \rho\, V_f \qquad \textbf{(2)}$$

Então temos duas condições:

$$mP+(mH+mB) = \rho\, V_0 \quad \textbf{(1)}$$

$$(mH+mB) = \rho\, V_f \quad \textbf{(2)}$$

Isolando a massa da pedra, mP, temos:

$$mP = \rho\, V_0 - \rho\, V_f$$

$$mP = \rho\,(V_0 - V_f)$$

Mas como a massa da pedra é igual a sua densidade multiplicada pelo seu volume, temos que:

$$\rho\,(V_0 - V_f) = \rho_{pedra}\, V_{pedra}$$

Isolando o volume da pedra:

$$V_{pedra} = \frac{\rho}{\rho_{pedra}}(V_0 - V_f)$$

$$\frac{V_{pedra}}{(V_0 - V_f)} = \frac{\rho}{\rho_{pedra}}$$

Como a densidade da pedra é muito maior que a densidade da água, temos: $\frac{V_{pedra}}{(V_0 - V_f)} < 1$

$$V_0 > V_{pedra} + V_f$$

O volume submerso inicial é maior que a soma do volume da pedra com o volume final. Isso prova que o volume inicial do sistema é superior ao volume final, o que implica que o nível da água desce.

Então temos duas condições:

$$mP+(mH+mB) = \rho V_0 \quad \textbf{(1)}$$

$$(mH+mB) = \rho V_f \quad \textbf{(2)}$$

Isolando a massa da pedra, mP, temos:

$$mP = \rho V_0 - \rho V_f$$

$$mP = \rho (V_0 - V_f)$$

Mas como a massa da pedra é igual a sua densidade multiplicada pelo seu volume, temos que:

$$\rho (V_0 - V_f) = \rho_{pedra} V_{pedra}$$

Isolando o volume da pedra: $$V_{pedra} = \frac{\rho}{\rho_{pedra}} (V_0 - V_f)$$

$$\frac{V_{pedra}}{(V_0 - V_f)} = \frac{\rho}{\rho_{pedra}}$$

Como a densidade da pedra é muito maior que a densidade da água, temos: $\frac{V_{pedra}}{(V_0 - V_f)} < 1$

$$V_0 > V_{pedra} + V_f$$

O volume submerso inicial é maior que a soma do volume da pedra com o volume final. Isso prova que o volume inicial do sistema é superior ao volume final, o que implica que o nível da água desce.