SME0121 Processos Estocásticos: Lista 5 – Cadeias de Markov em tempo contínuo

Thomas Peron

Não haverá provinha teórica sobre esta lista; utilize-a como treino para a P2.

1. Considere que haja duas máquinas que funcionam independentemente. Para cada uma delas existe uma pessoa dedicada exclusivamente a fazer reparos caso haja uma falha. Além disso, cada máquina trabalha por um período de tempo que segue uma distribuição exponencial de taxa μ – i.e. $\Pr\{T > t\} = e^{-\mu t}$ – e então falha. O tempo de reparo, por sua vez, é distribuído de acordo com uma distribuição exponencial de taxa λ, $\Pr\{T > t\} = e^{-\lambda t}$. Seja $\{X(t), t \geq 0\}$ o processo de Markov de tempo contínuo em que $X(t)$ é o número de máquinas que estão operantes até o instante t. Calcule:
   (a) O tempo médio durante o qual o processo permanece em cada estado.
   (b) Determine as probabilidades de transição entre os estados da cadeia de Markov embutida (*embedded Markov chain*).
   (c) Escreva as equações de Kolmogorov progressivas para as probabilidades $P_{ij}(t)$ (não é necessário resolvê-las).

2. Encontre as probabilidades de transição em função do tempo, $P_{ij}(t)$, do processo de nascimento e morte em que $\lambda_n = 0$ (taxa de nascimento) e $\mu_n = \mu$ (taxa de morte), para $n > 0$.

   (*Dica*: não é necessário utilizar as equações de Kolmogorov)

3. Considere uma cadeia de Markov em tempo contínua de dois estados, 0 e 1. Considere que os parâmetros de tempo de espera sejam dados por $\nu_0 = \nu_1 = \nu > 0$. Dito de outro modo, o tempo de espera do processo em cada estado é uma variável aleatória de distribuição exponencial com parâmetro ν. Com base nessas informações:
   (a) Desenhe o diagrama da cadeia de Markov embutida.
   (b) Encontre a matriz de probabilidades de transição $\mathbb{P}(t)$. Informações úteis:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4. Considere o modelo linear com imigração onde λ e μ são as taxas de nascimento e de morte, respectivamente, de cada indivíduo; e θ é a taxa de imigração. Para uma população de n indivíduos, as taxas totais serão dadas, então, por $\lambda_n = n\lambda + \theta$ e $\mu_n = n\mu$. Seja $X(t)$ a população no instante t e que $X(0) = i$. Calcule o valor esperado do número de indivíduos ao longo do tempo, $M(t) = \mathbb{E}[X(t)]$.

5. (Distribuição estacionária da fila $M/M/1$) Suponha que os clientes cheguem de acordo com um processo de Poisson com taxa λ em um centro de serviços que possui um único servidor. Os clientes são atendidos um de cada vez na ordem de chegada. Os tempos de para a conclusão do serviço são variáveis aleatórias exponenciais i.i.d, de parâmetro μ [$T \sim \mathrm{Exp}(\mu)$] e independentes do processo de chegada. Após serem atendidos, os clientes deixam o sistema. Seja $X(t)$ o número de clientes no sistema no tempo t, então o espaço de estados é $S = \{0, 1, 2, ...\}$. Suponha $i > 0$. Se o

sistema está no estado i no tempo t, então o próximo estado seria $i+1$ (se um novo cliente chegar) ou estado $i-1$ (se um cliente sair). Considerando que $\lambda < \mu$, encontre a distribuição limite

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} \Pr\{X(t) = j | X(0) = i\}.$$

(*Dica*: Utilize o resultado comentado em aula: $\vec{\pi}\mathbf{R} = 0$, onde $\mathbf{R}$ é a matriz geradora da cadeia $X(t)$.)