Agenor de Toledo Fleury & Flávio Celso Trigo

Escola Politécnica da USP
Departmento de Engenharia Mecânica

2024

PME 3481 – Controle e aplicações

Compensadores utilizando o Lugar das Raízes

Introdução

No projeto de sistemas de controle, frequentemente não é possível atingir todas as especificações de projeto em uma primeira iteração. De modo geral, três delas são particularmente importantes:

- estabilidade (IMPRESCINDÍVEL);
- erro em estado estacionário *pequeno* ou nulo;
- desempenho satisfatório: *baixo* sobressinal e resposta *rápida*.

> Percebe-se, portanto, que há requisitos potencialmente conflitantes, cuja solução de compromisso pode requerer diversas iterações.
> O método do Lugar das Raízes fornece uma maneira para efetuar tanto o projeto inicial do controlador quanto as iterações posteriores.

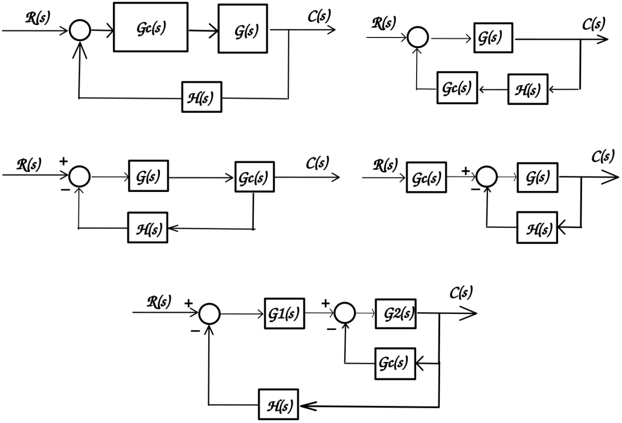
Projeto inicial pelo método do Lugar das Raízes

- Conforme vimos na aula passada, o método do lugar das Raízes permite obter as características de resposta de uma planta em malha fechada a partir da FTMA através do reajuste de um ganho proporcional K;
- caso as especificações não sejam atendidas na primeira iteração, uma das maneiras de melhorar o desempenho é utilizar os chamados *compensadores* de *avanço*, *atraso* ou *avanço-atraso*.

Arquiteturas possíveis para a utilização de compensadores em sistemas *EUSU* incluem:

- em série ou cascata;
- em retroação;
- na saída;
- na entrada;
- interna, em paralelo.

Arquiteturas de compensadores



> Um compensador é um componente ou circuito adiconal que é inserido em um sistema de controle com o objetivo de atenuar ou eliminar uma deficiência de desempenho.

Projeto de compensadores

A estrutura geral de um compensador pode ser descrita pela função de transferência

$$G_c(s) = K_c \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \tag{1}$$

Os zeros z_i, polos p_j e o ganho K_c do compensador são selecionados de modo a ajustar o ganho total do sistema em malha fechada para atender às especificações de projeto.

Projeto de compensadores de 1a. ordem

Os compensadores mais simples são os de primeira ordem, ou seja,

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)} \tag{2}$$

Dependendo da relação entre os módulos de z_c e de p_c, são construídos compensadores por avanço ou atraso de fase.

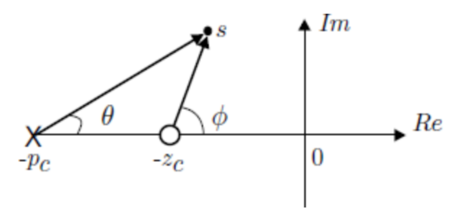
$$\text{se} \quad \frac{|z_c|}{|p_c|} < 1 \Rightarrow \text{avanço de fase}$$

$$\text{se} \quad \frac{|z_c|}{|p_c|} > 1 \Rightarrow \text{atraso de fase}$$

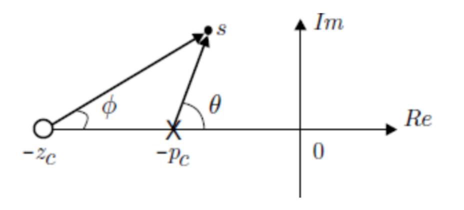
A figura a seguir apresenta os dois casos:

Projeto de compensadores de 1a. ordem

Avanço de fase: $\forall s \in \mathbb{R} < 0,\ \mathbf{I}m > 0 \Rightarrow \angle G_c(s) = \phi - \theta > 0$



Atraso de fase: $\forall s \in \mathbb{R} < 0,\ \mathbf{I}m > 0 \Rightarrow \angle G_c(s) = \phi - \theta < 0$



Projeto de compensadores: formas alternativas das FT

Compensador por avanço de fase

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} = \frac{1}{\alpha}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\alpha}\frac{s+z_c}{s+p_c} \quad \text{com} \quad 0<\alpha<1 \tag{3}$$

Compensador por atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\beta Ts} = \frac{1}{\beta}\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\beta}\frac{s+z_g}{s+p_g} \quad \text{com} \quad \beta>1 \tag{4}$$

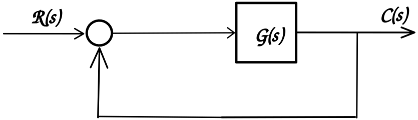
Compensadores por avanço de fase: metodologia básica

Objetivo: tentar alocar o zero e o polo do compensador de modo a fazer com que o lugar das raízes fique tão próximo quanto possível dos polos dominantes do sistema

1. determinar os polos em malha fechada que satisfaçam às condições de estabilidade, erro em estado estacionário e desempenho;
2. efetuer a análise do lugar das raízes e verifique se, apenas pelo ajuste do ganho, os polos de malha fechada desejados podem ser obtidos;
3. fixando-se a posição do zero do compensador, a posição do polo pode ser obtida pela condição de fase;
4. utilizar a condição de módulo para obter o ganho K_c.

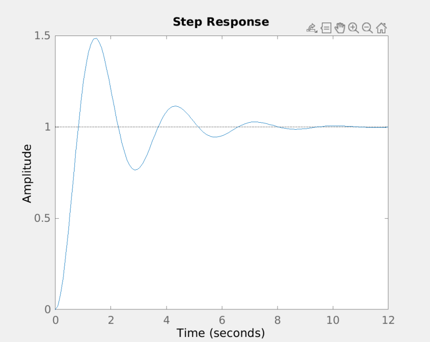
Compensadores por avanço de fase: exemplo

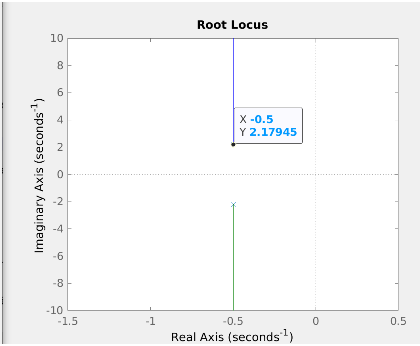
Considere o sistema em que a FTMA $= \frac{5}{s(s+1)}$ e a FTMF sem compensador é $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+s+5} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, cujos parâmetros são $\omega_n = \sqrt{5}\, rad/s$, e $\zeta = 1/2\sqrt(5) \approx 0,224$ o coeficiente de amortecimento.



Compensadores por avanço de fase: exemplo

A resposta do sistema em malha fechada com realimentação unitária a uma entrada em degrau unitário é dada por:





Verifica-se que

- o sobressinal $M_p = e^{(-\zeta\pi)/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 48,6\%$;
- o tempo de acomodação, pelo critério de 2% é $t_a \approx 4/(\zeta\omega_n) \approx 8s$

Compensadores por avanço de fase: exemplo

Objetivo: projetar um compensador G_c a ser colocado em cascata no ramo direto tal que em malha fechada tenha-se $\zeta = 0,5$ ($M_p \approx 16\%$) e $t_a(2\%) = 2\ s \Rightarrow \omega_n \approx 4\ rad/s$

Para que essas condições sejam satisfeitas, os polos em malha fechada devem situar-se em $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j = -2 \pm 2\sqrt{3}j$.

1. pelo diagrama do lugar das raízes, percebe-se que a adoção apenas de um ganho não fará com que os polos dominantes sejam os acima calculados;
2. faz-se, portanto, a adoção do compensador por avanço de fase, que irá deslocar os polos atuais para a esquerda no diagrama;
3. adota-se o zero do compensador de modo a posicionar a parte real dos polos de MF no local especificado: $z_c = 2$
4. calcula-se o polo do compensador pela condição de fase: $\angle s + p_c = \angle s + 2 - \angle s - \angle s + 1 + 180^o$

Compensadores por avanço de fase: exemplo

- calcula-se o polo do compensador pela condição de fase:
  $\angle s + p_c = \angle s + 2 - \angle s - \angle s + 1 + 180^o$
- para $s = -2 \pm 2\sqrt{3}j$ tem-se:

$$tg^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{p_c - 2}\right) = 90^o - 120^o - 106,1^o + 180^o \simeq 43,9^o$$

$$\Rightarrow p_c \approx 5,6$$

- calcula-se K_c pela condição de módulo:

$$\left|\frac{K_c(s+2)}{s+5,6}\frac{5}{s(s+1)}\right| = 1$$

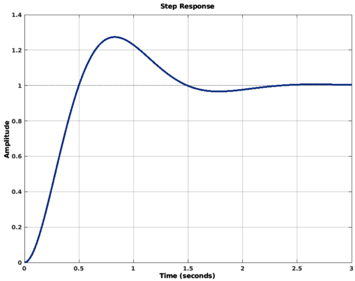
em $s = -2 \pm 2\sqrt{3}j, \Rightarrow K_c \approx 4,16$

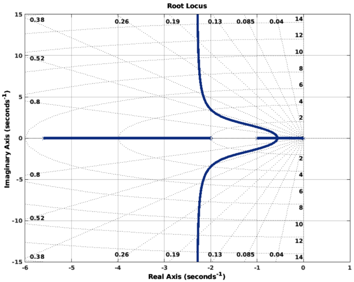
- finalmente, a função de transferência do compensador por avanço de fase é dada por

$$G_c(s) = 4,16\frac{s+2}{s+5,6}$$

Compensadores por avanço de fase: exemplo

O sistema, simulado sob as mesmas condições de entrada e com a inclusão do compensador apresenta o desempenho mostrado abaixo:





Verifica-se que as especificações foram atendidas.