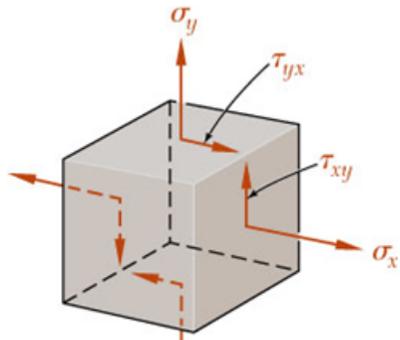




Tensões principais, círculo de Mohr e critérios de resistência

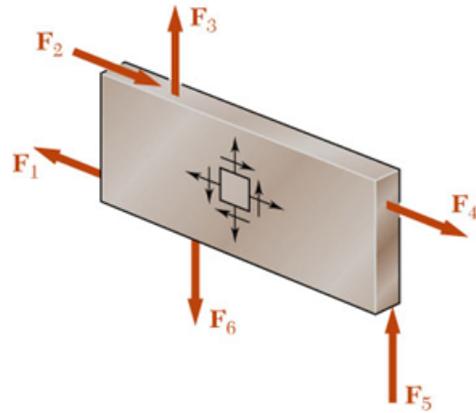
Valério S. Almeida
Julho/2021

Introdução

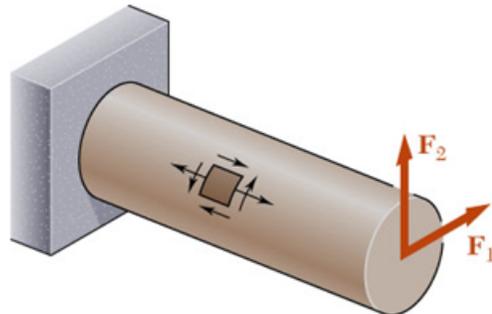


- *Plano de tensão* - estado de tensão em que duas faces do elemento de volume estão livres de qualquer tensão. Para o exemplo ilustrado, o estado de tensão é definido por

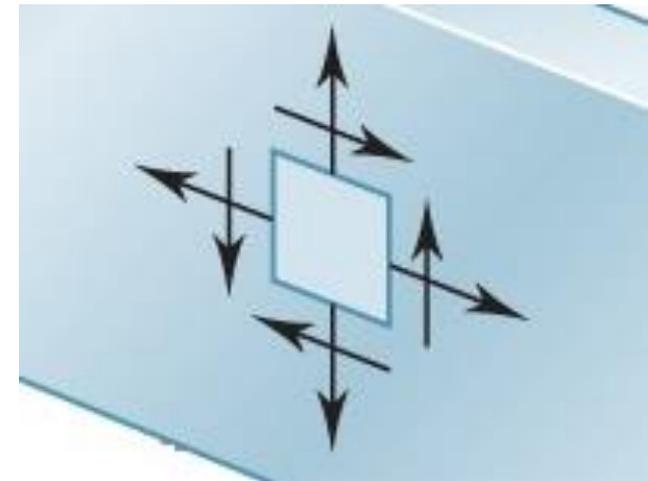
$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$



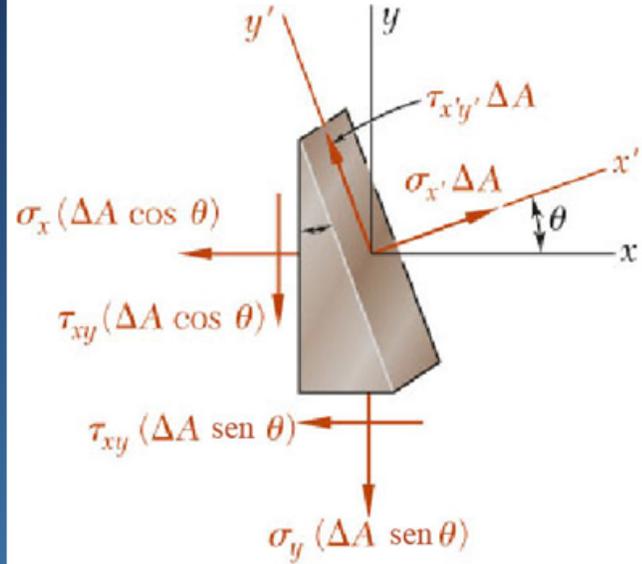
- Estado plano de tensão ocorre em uma placa fina submetida a forças que atuam no plano médio da espessura da placa.



- Estado plano de tensão também ocorre na superfície livre de um elemento estrutural ou componente de máquina, ou seja, em qualquer ponto da superfície que não esteja submetido a uma força externa.



Transformação do Estado Plano de Tensão



- Considerar as condições para o equilíbrio de um elemento prismático com faces perpendicular aos eixos x , y , e x' .

$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \text{sen} \theta - \sigma_y (\Delta A \text{sen} \theta) \text{sen} \theta - \tau_{xy} (\Delta A \text{sen} \theta) \cos \theta$$

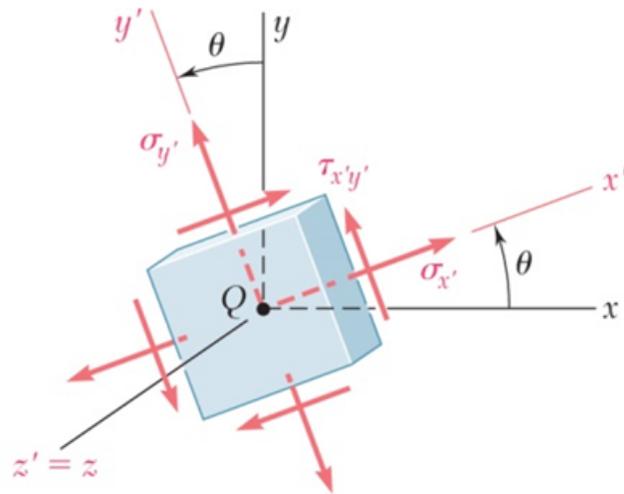
$$\sum F_y = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \text{sen} \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \text{sen} \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \text{sen} \theta) \text{sen} \theta$$

As equações podem ser reescritas para produzir

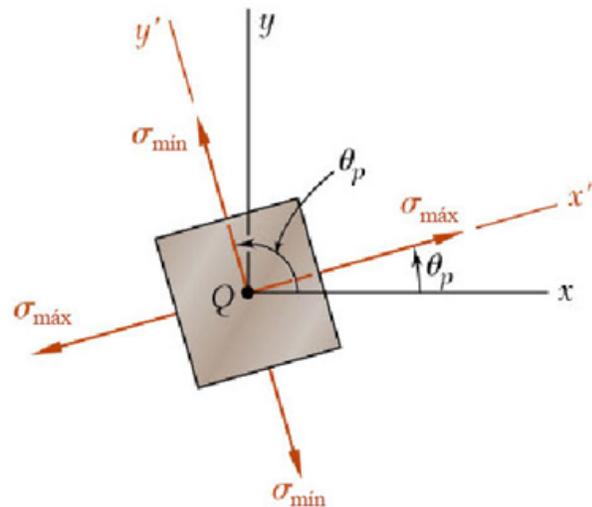
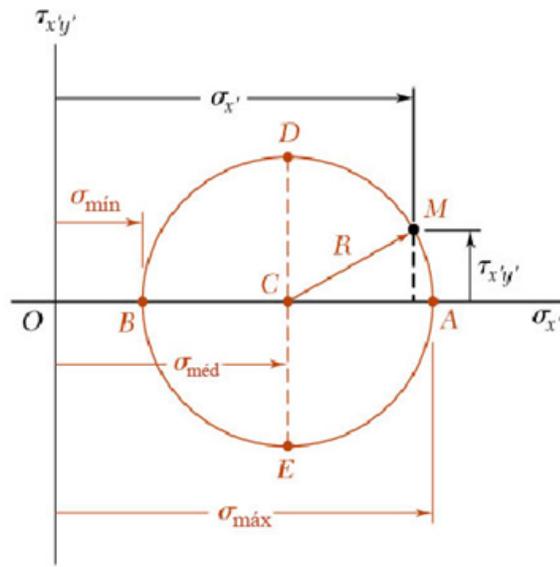
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \text{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \text{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \text{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



Tensões Principais



- As equações anteriores são combinadas para produzir equações paramétricas de um círculo,

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{méd})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

onde

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Tensões principais* ocorrem nos *planos principais de tensões* onde o cisalhamento é zero.

$$\sigma_{máx, mín} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Note : define dois ângulos defasados por 90°

Tensões principais

$$\sigma_{m\acute{a}x / m\acute{i}n} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

São os valores extremos das tensões normais do elemento

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

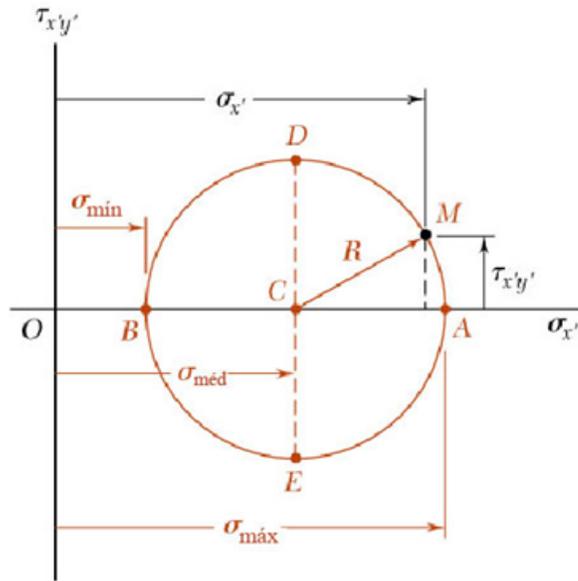
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

O ângulo que indica a tensão máxima (σ_1) é dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Convenção: $\sigma_1 \geq \sigma_2$

Tensão de Cisalhamento Máxima



Tensão de cisalhamento máxima ocorre para

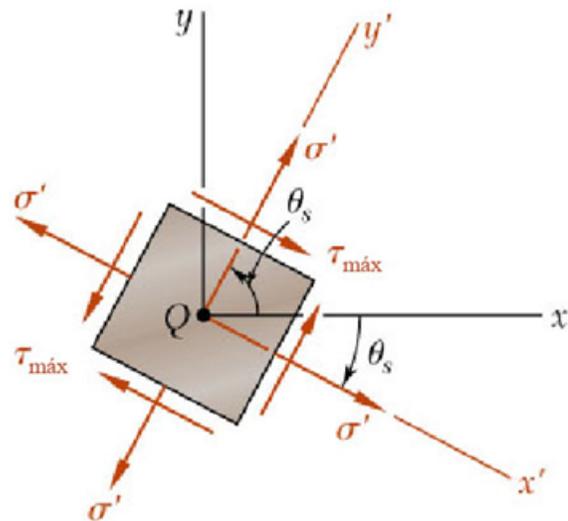
$$\sigma_{x'} = \sigma_{méd}$$

$$\tau_{máx} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

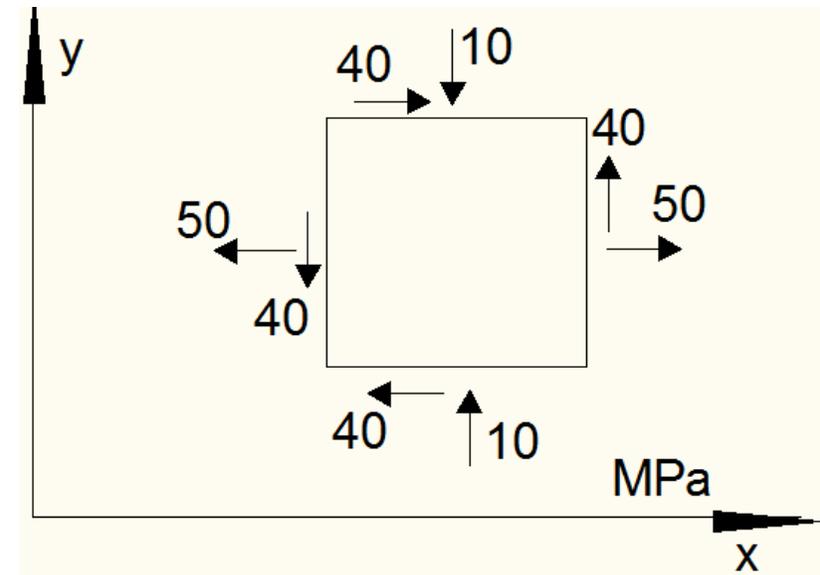
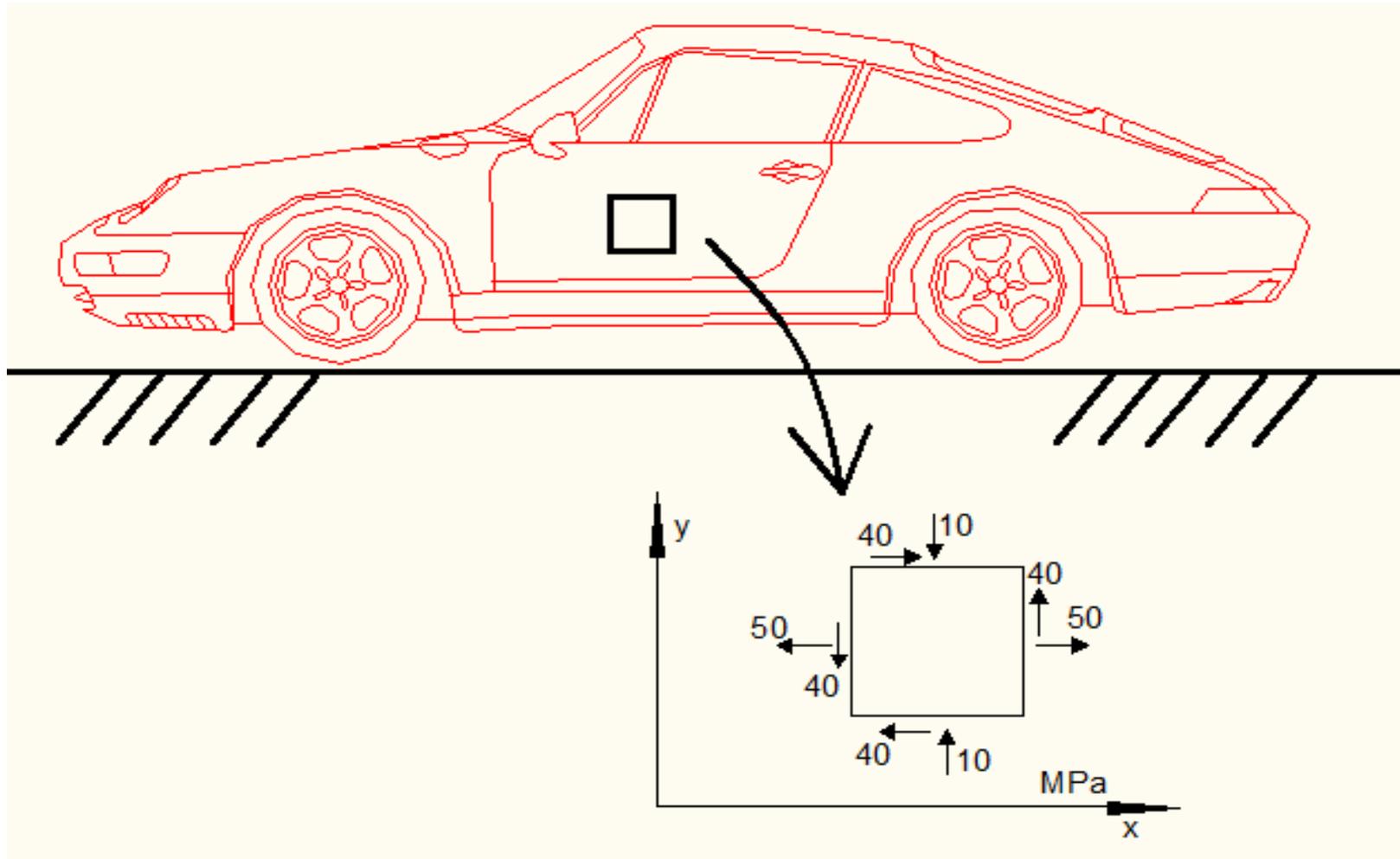
$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

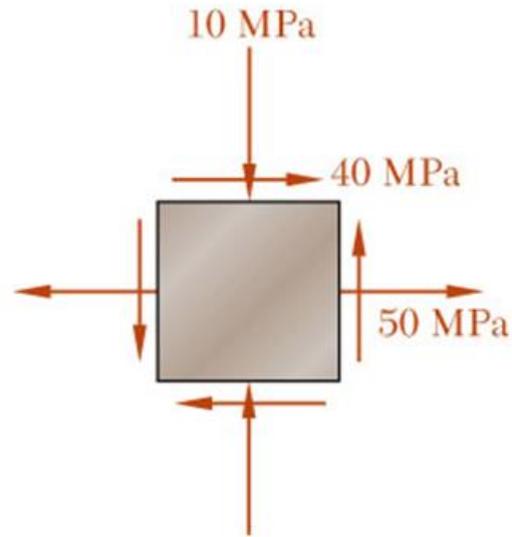
Note : define dois ângulos defasados por 90° e defasados dos planos principais por 45°



$$\sigma' = \sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

EXEMPLO

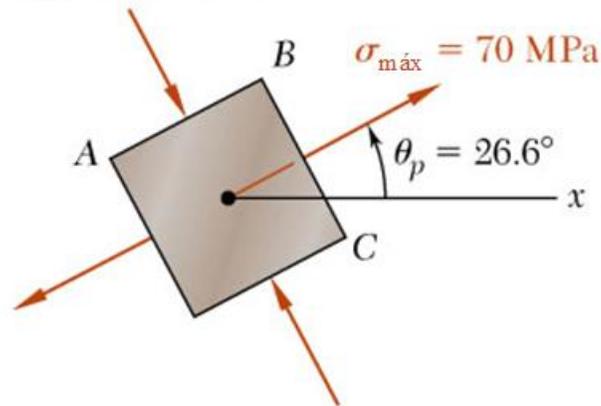




$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = 30 \text{ MPa}$$



SOLUÇÃO:

- Encontrar a orientação do elemento para as tensões principais de

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = \frac{80}{60}$$

$$2\theta_p = 53,1^\circ \text{ e } 233,1^\circ$$

$$\theta_p = 26,6^\circ \text{ e } 116,6^\circ$$

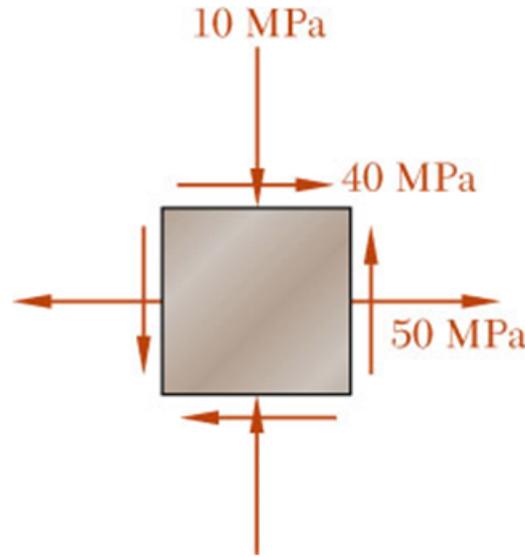
- Determine as tensões principais

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 70 \text{ MPa}$$

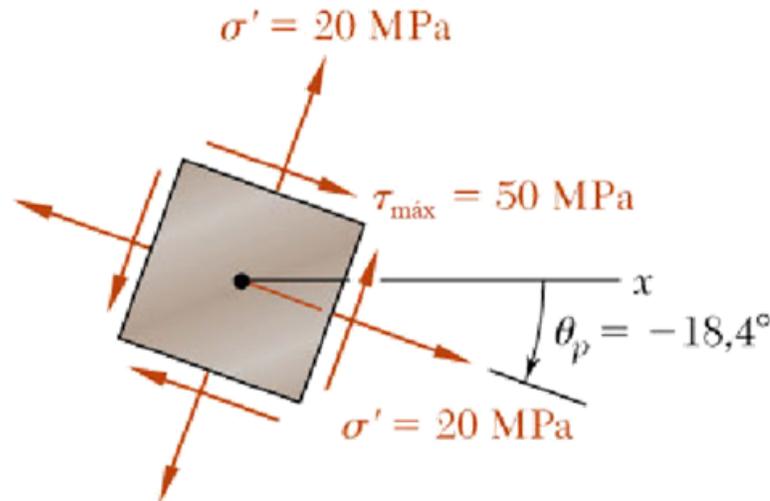
$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = -30 \text{ MPa}$$

ESTÁTICA E MECÂNICA DOS MATERIAIS



$$\sigma_x = +50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$



- Calcule a tensão de cisalhamento máxima com

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{70_1 - (-30)}{2} = 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{máx}} = 50 \text{ MPa}$$

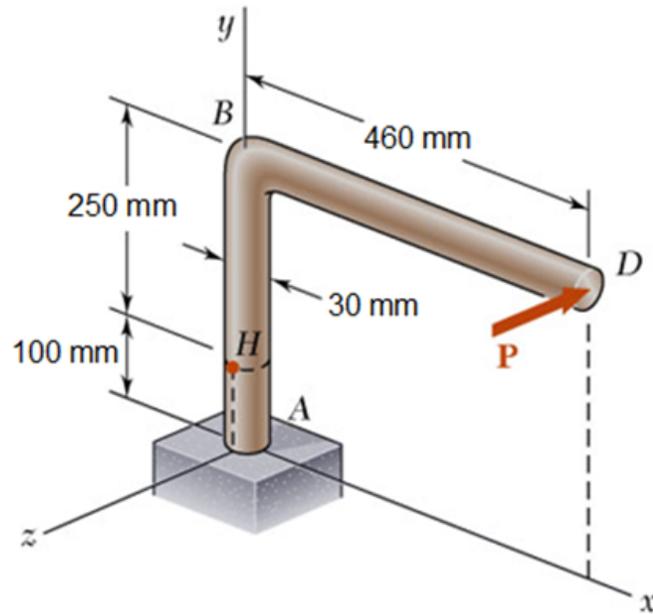
$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} = \frac{-10 - 50}{2 \cdot 40} = -0,75 \rightarrow$$

$$\theta_s = -18,4^\circ \text{ e } 71,6^\circ$$

- A tensão normal correspondente é

$$\sigma' = \sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2}$$

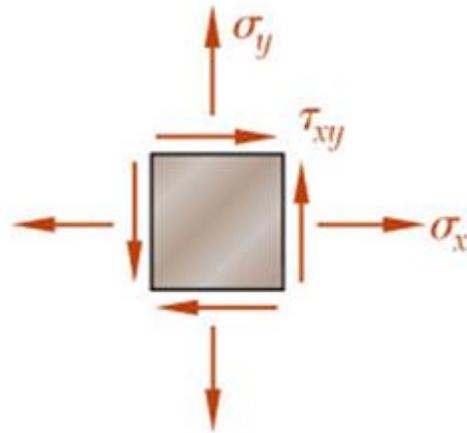
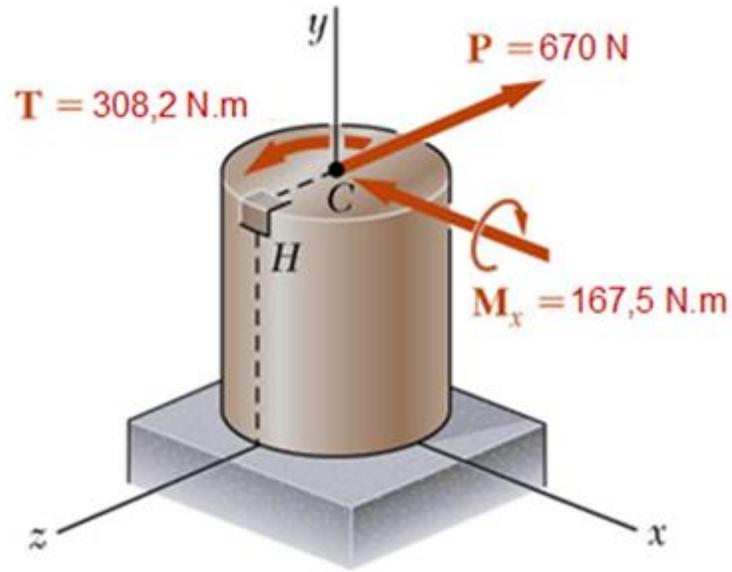
$$\sigma' = 20 \text{ MPa}$$



Uma única força horizontal P de 670 N de magnitude é aplicada a extremidade D da alavanca ABD . Determine (a) as tensões normal e de cisalhamento em um elemento no ponto H com lados paralelos aos eixos x e y , (b) os planos e tensões principais no ponto H .

SOLUÇÃO:

- Determine um sistema de força e momento equivalentes no centro da seção transversal que passa por H .
- Avaliar as tensões normais e de cisalhamento em H .
- Determinar os planos principais e calcular as tensões principais.



SOLUÇÃO:

- Determine um sistema de força e momento equivalentes no centro da seção transversal que passa por H .

$$P = 670 \text{ N}$$

$$T = (670 \text{ N})(0,46 \text{ m}) = 308,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_x = (670 \text{ N})(0,25 \text{ m}) = 167,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

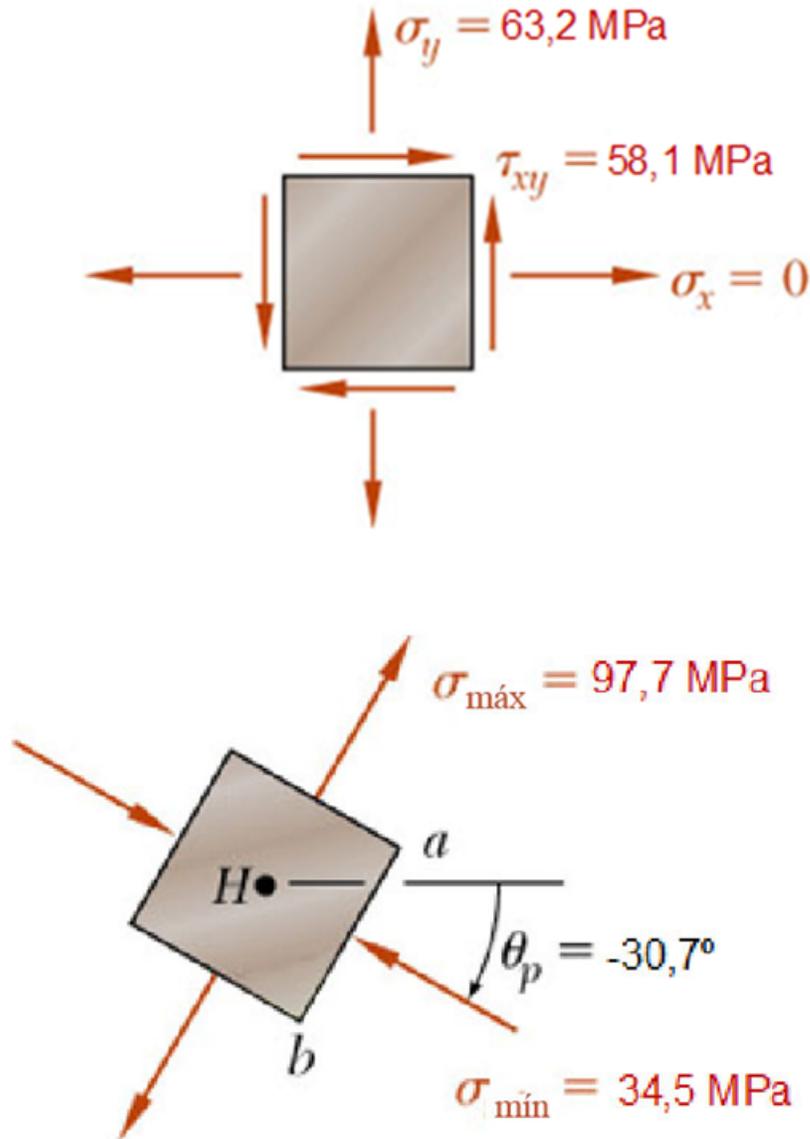
- Avaliar as tensões normais e de cisalhamento em H .

$$\sigma_y = + \frac{Mc}{I} = + \frac{(167,5 \text{ N} \cdot \text{m})(0,015 \text{ m})}{\frac{1}{4} \pi (0,015 \text{ m})^4}$$

$$\tau_{xy} = + \frac{Tc}{J} = + \frac{(308,2 \text{ N} \cdot \text{m})(0,015 \text{ m})}{\frac{1}{2} \pi (0,015 \text{ m})^4}$$

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 63,2 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 58,1 \text{ MPa}$$

ESTÁTICA E MECÂNICA DOS MATERIAIS



- Determinar os planos principais e calcular as tensões principais.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(58,1)}{0 - 63,2} = -1,84$$

$$2\theta_p = -61,5^\circ \text{ e } 118,5^\circ$$

$$\theta_p = -30,7^\circ \text{ e } 59,3^\circ$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{máx},\text{mín}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{0 + 63,2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 63,2}{2}\right)^2 + (58,1)^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = +97,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = -34,5 \text{ MPa}$$

Estado duplo de deformações

Plano de deformação - estado de *deformação* em que duas faces do elemento de volume estão livres de qualquer deformação. Para o exemplo ilustrado, o estado de *deformação* é definido por

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$$

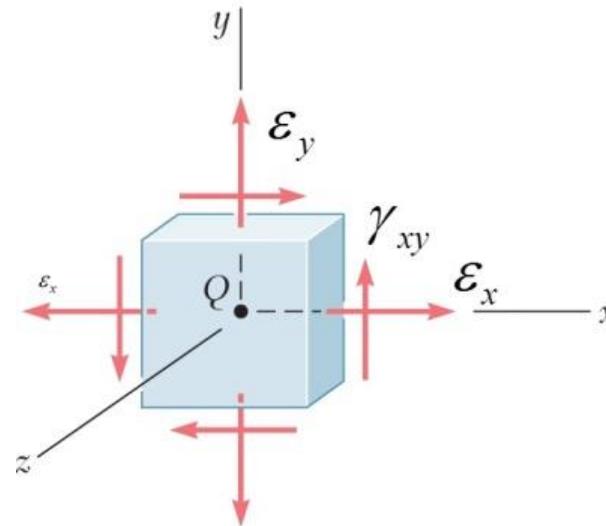
Com

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$$

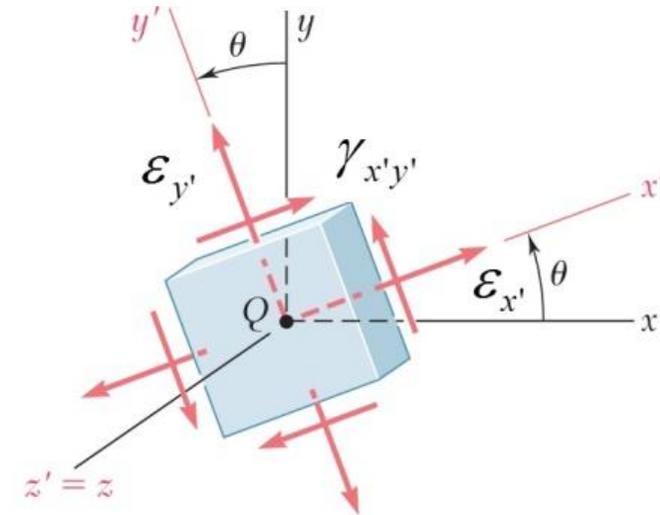
$$\varepsilon_{\text{máx, min}} = \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Note: define dois ângulos defasados por 90°



(a)



(b)

Estado duplo de deformações

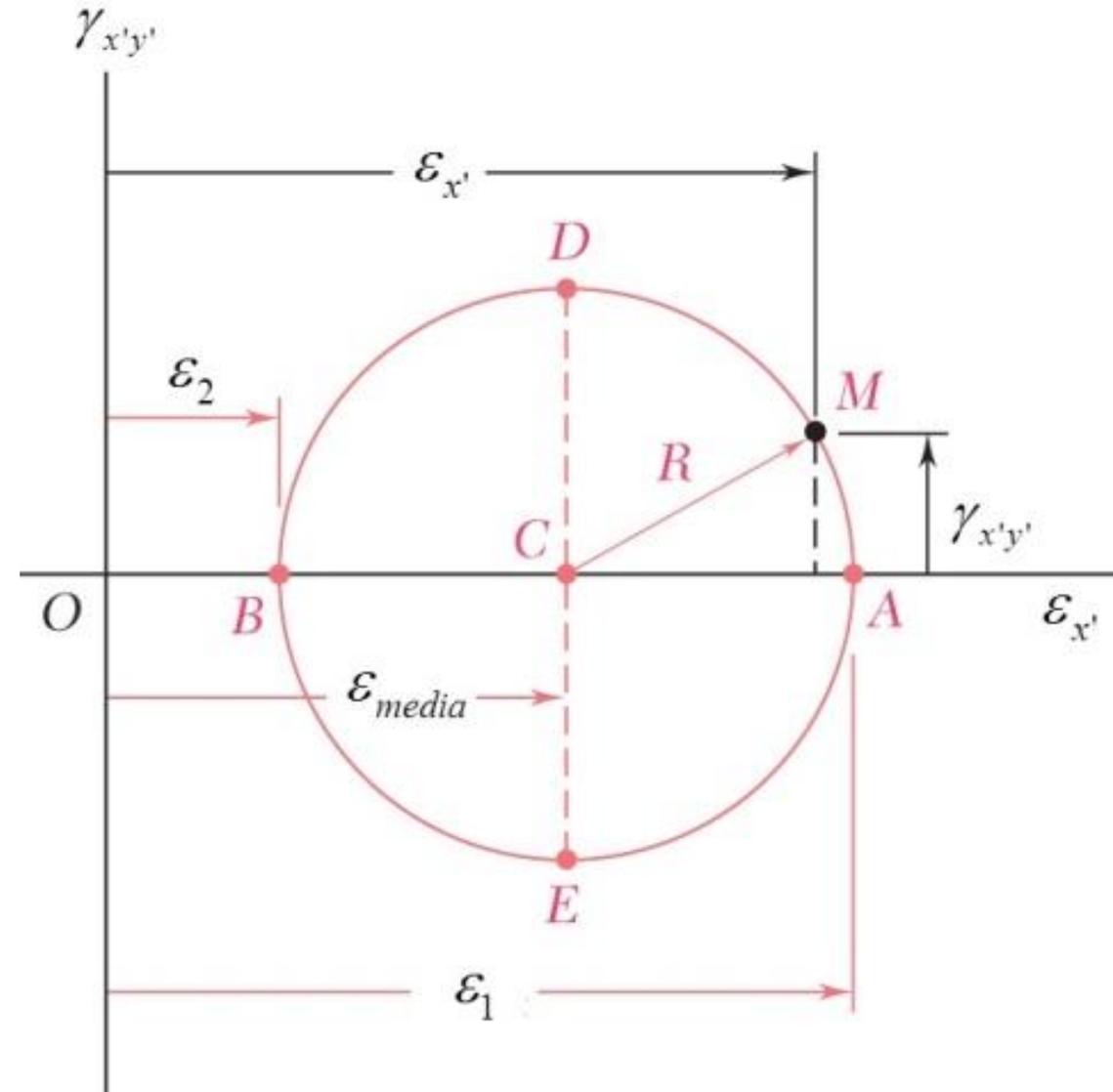
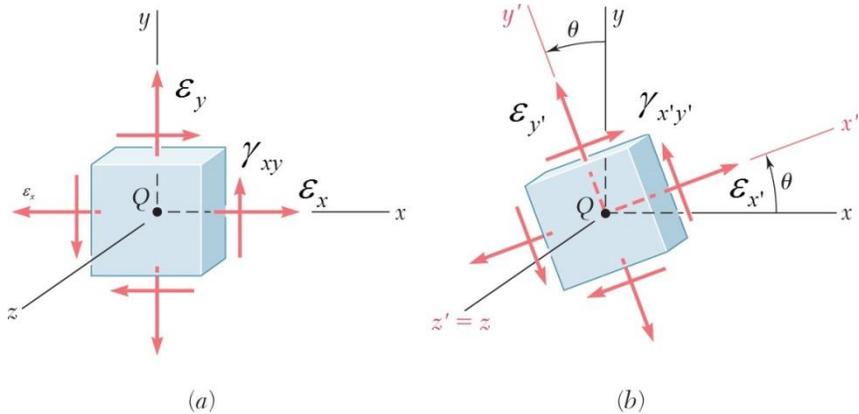
$$\gamma_{\text{máx}} = R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

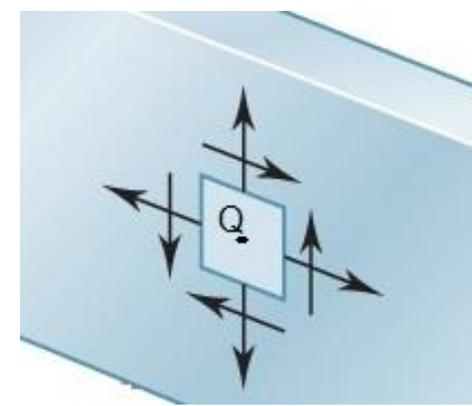
$$\tan 2\theta_s = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{2\gamma_{xy}}$$

Note: define dois ângulos defasados por 90° e defasados dos planos principais por 45°

$$\gamma' = \gamma_{\text{méd}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$$



CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

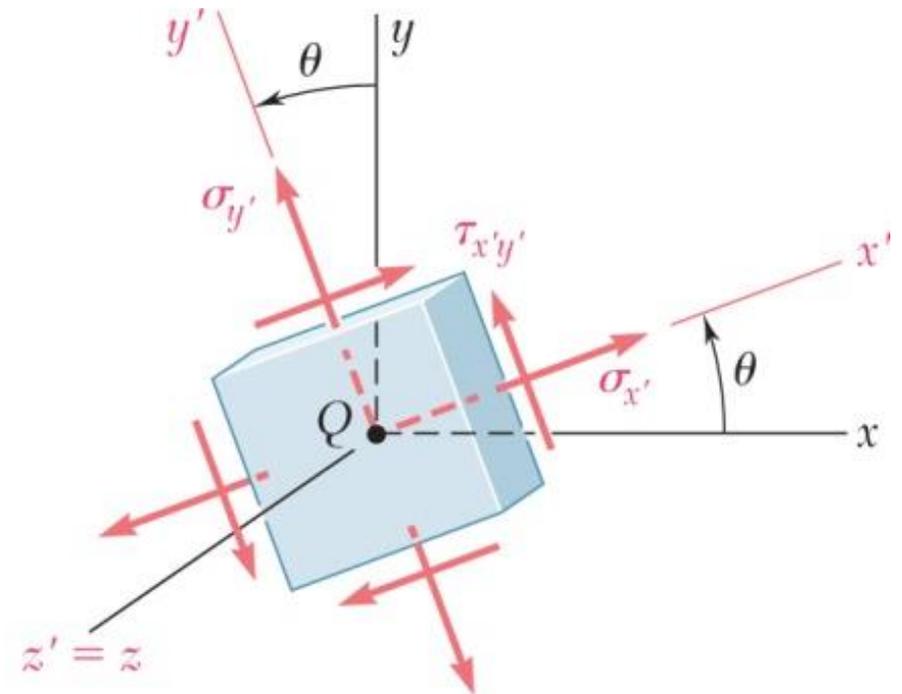


- Eng. alemão Otto Mohr (1835-1918)
- Representação gráfica da variação das tensões
- Não precisa empregar as equações deduzidas:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

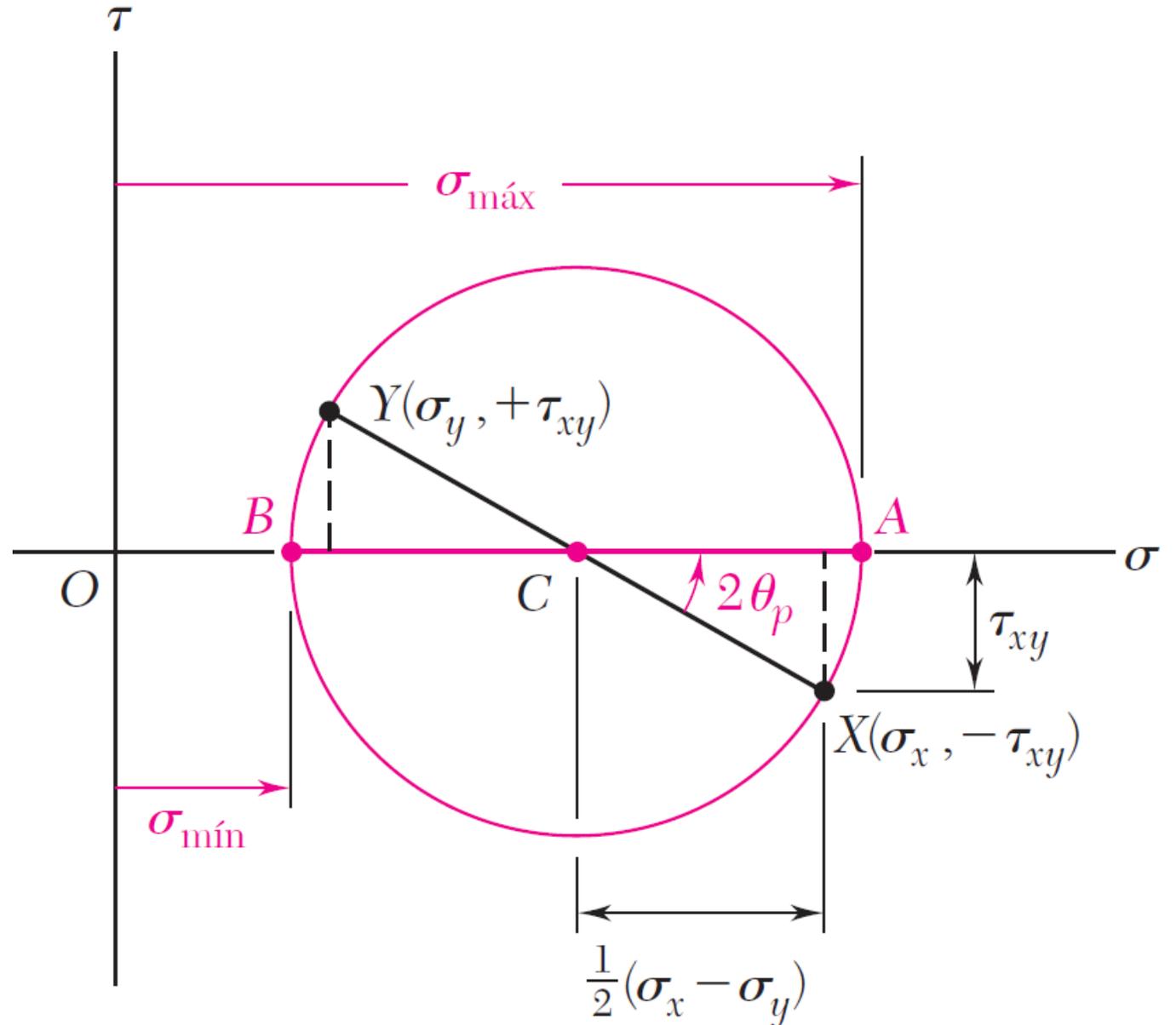
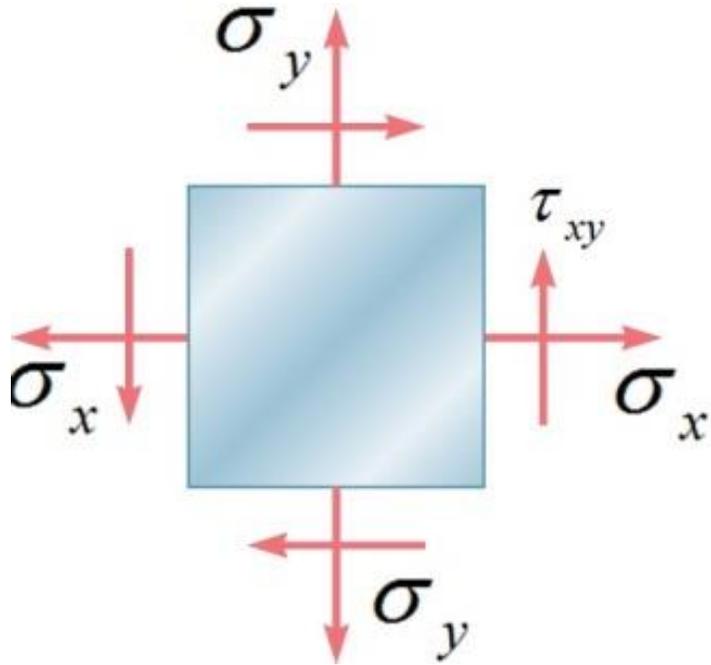
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

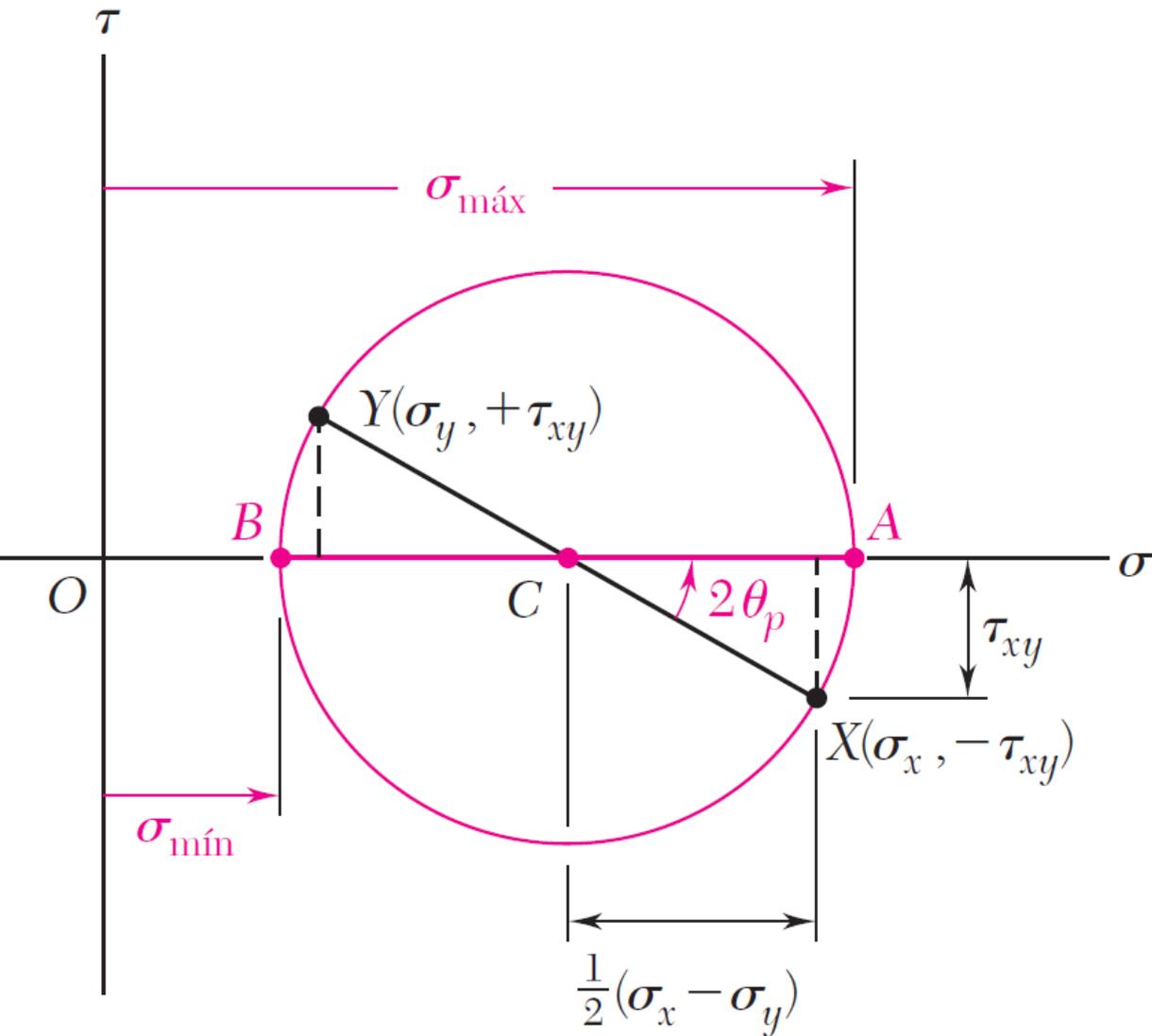


CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

- Eng. alemão Otto Mohr (1835-1918)



CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO



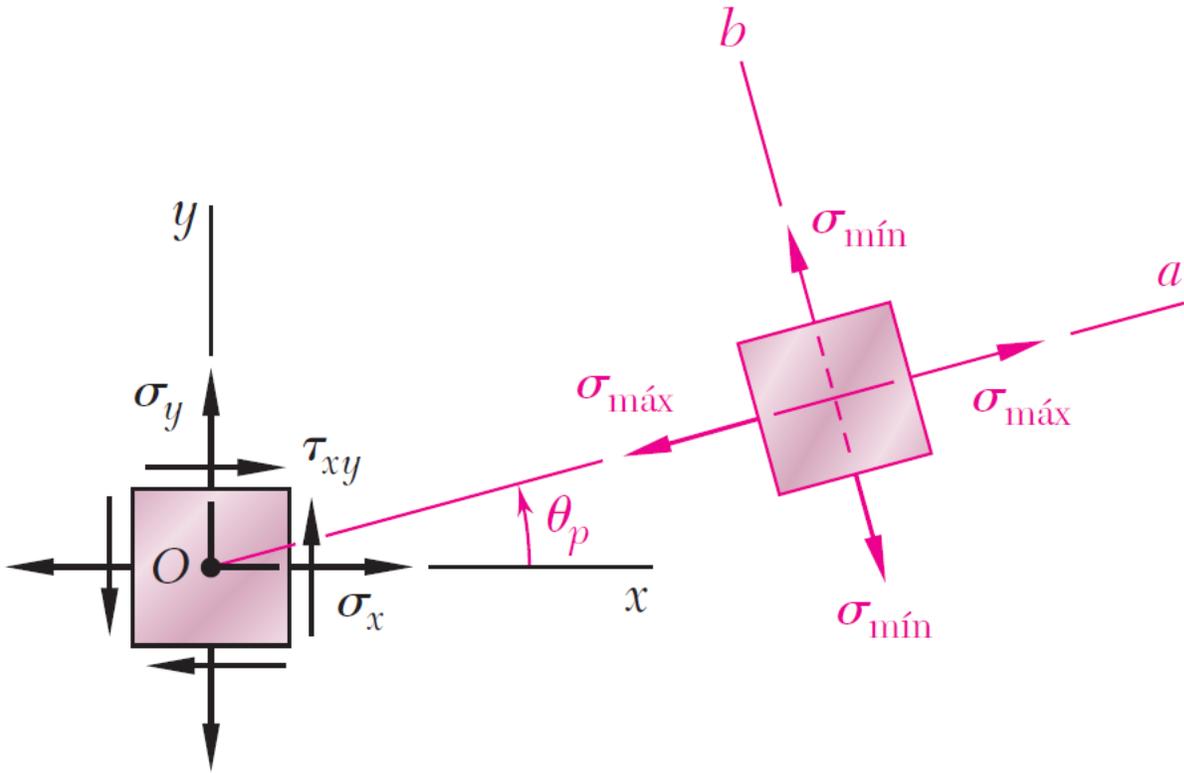
$$\sigma_{med} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{med} \pm R$$

$$\sigma_1 = \sigma_{med} + R$$

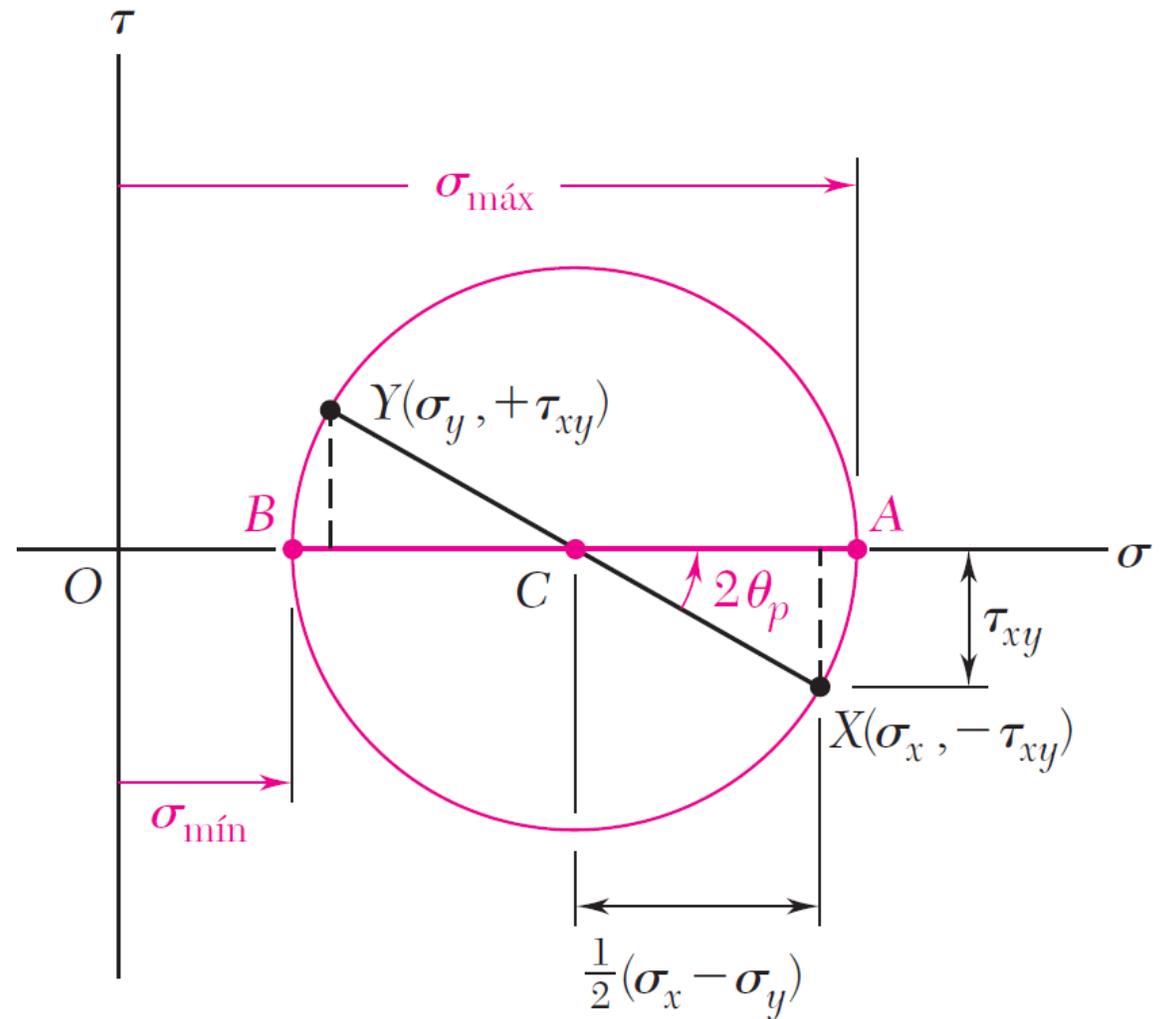
$$\sigma_2 = \sigma_{med} - R$$

CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

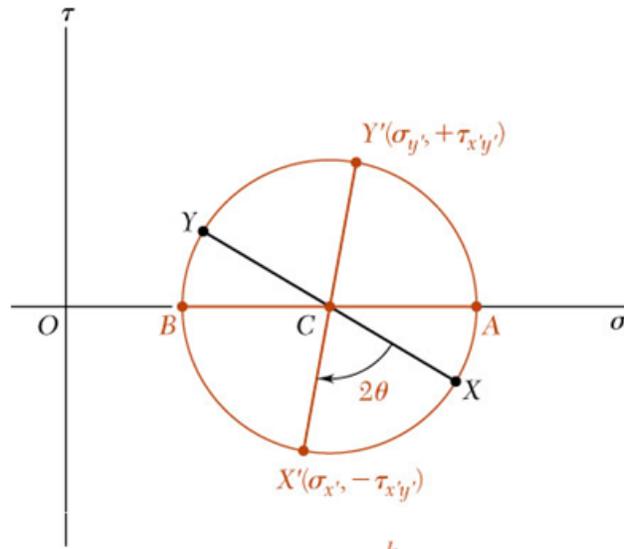


$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

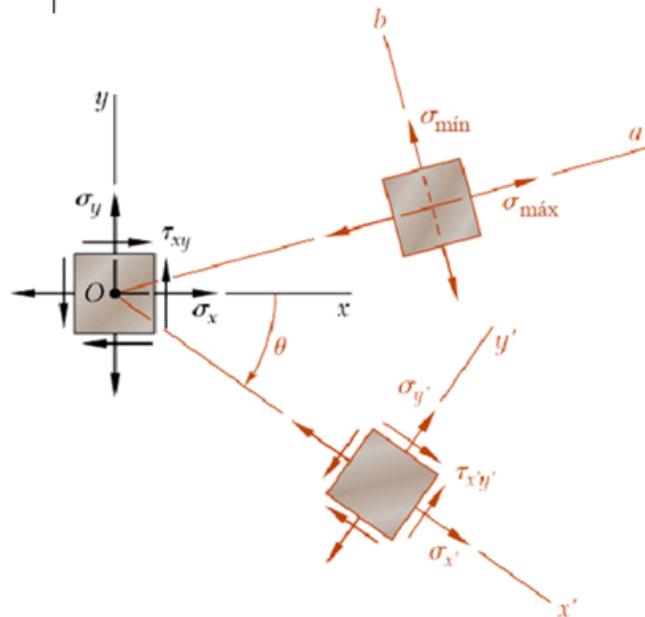
O sentido de rotação de Ox para Oa é o mesmo que CX para CA .



Círculo de Mohr para o Estado Plano de Tensão

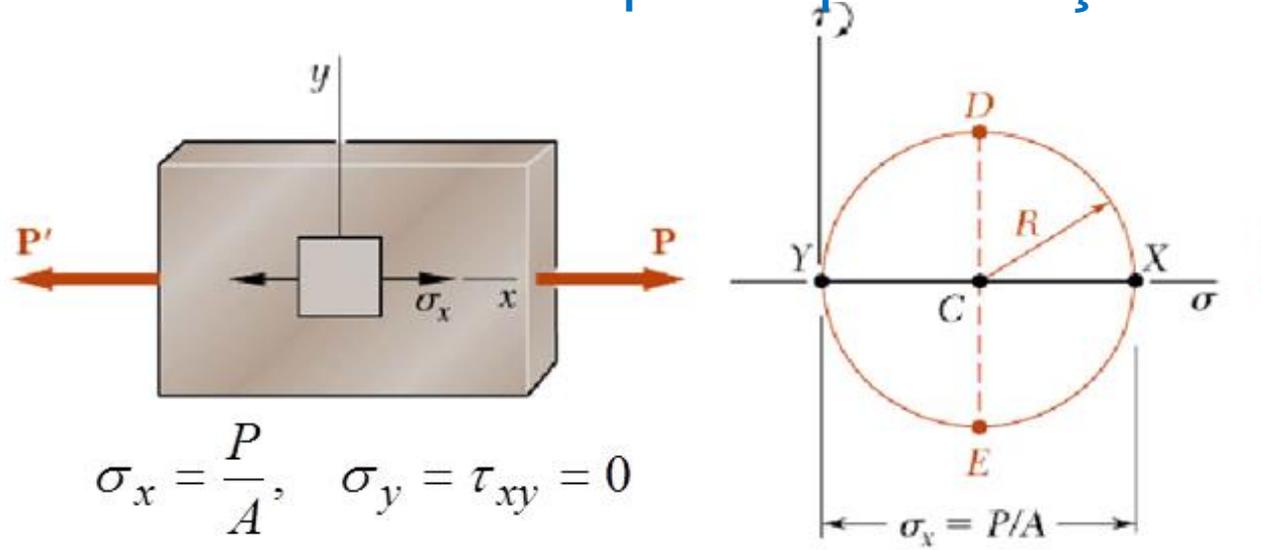


- Com o círculo de Mohr definido, o estado de tensão em outras orientações de eixos pode ser descrita.
- Para o estado de tensões em um ângulo θ com relação aos eixos xy , construir um novo diâmetro $X'Y'$ em um ângulo de 2θ com relação a XY .
- Tensões normais e de cisalhamento são obtidas a partir das coordenadas $X'Y'$.



CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

1. Círculo de Mohr para apenas ação de carga axial centrada



$$\sigma_{m\acute{a}x / m\acute{i}n} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = 0$$

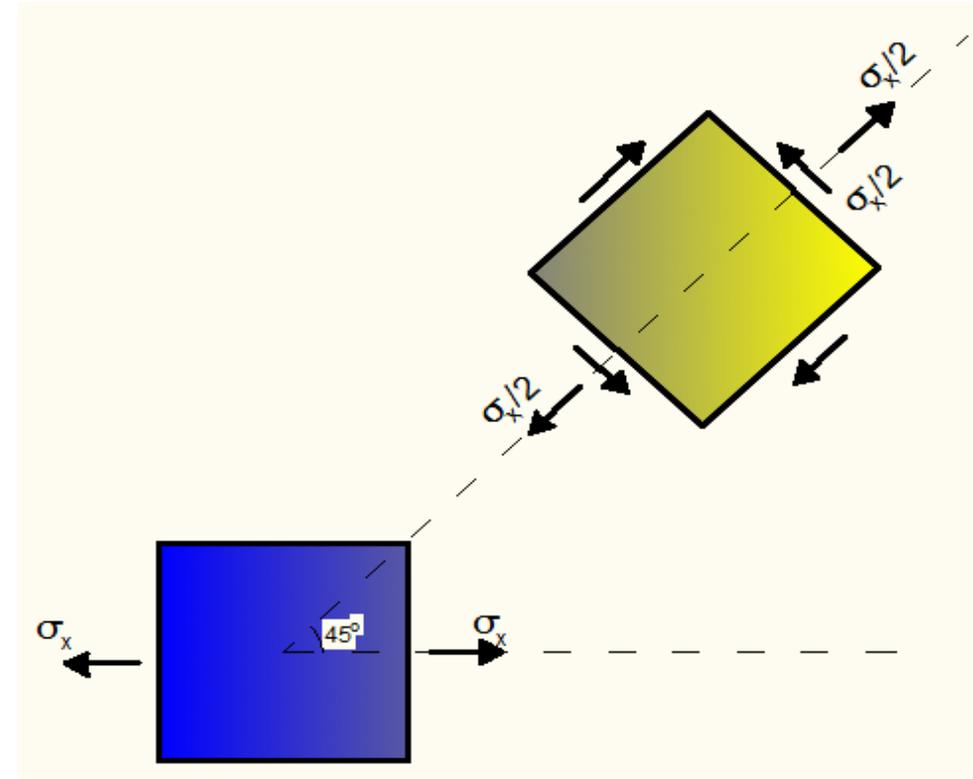
$$\theta_p = 0$$

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tan 2\theta_s = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$

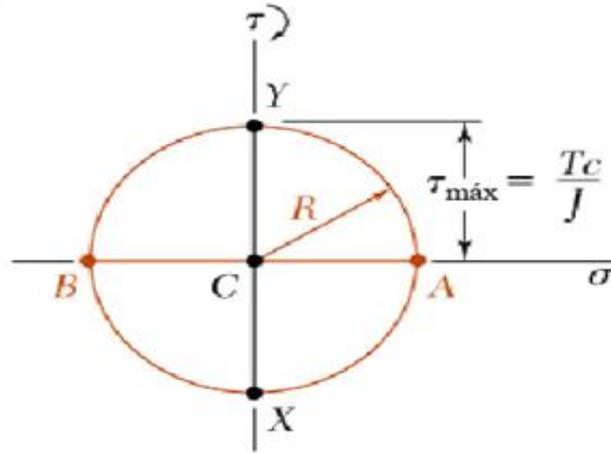
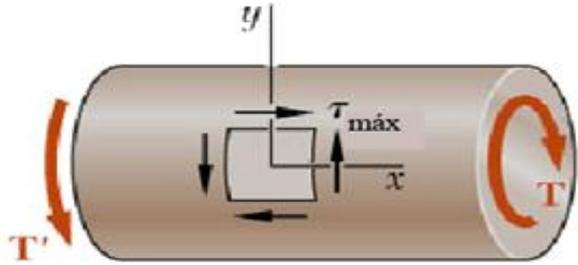
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\theta_s = 45^\circ$$



CÍRCULO DE MOHR – ESTADO PLANO

2. Círculo de Mohr para apenas ação de torção



$$\sigma_x = \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$$

The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

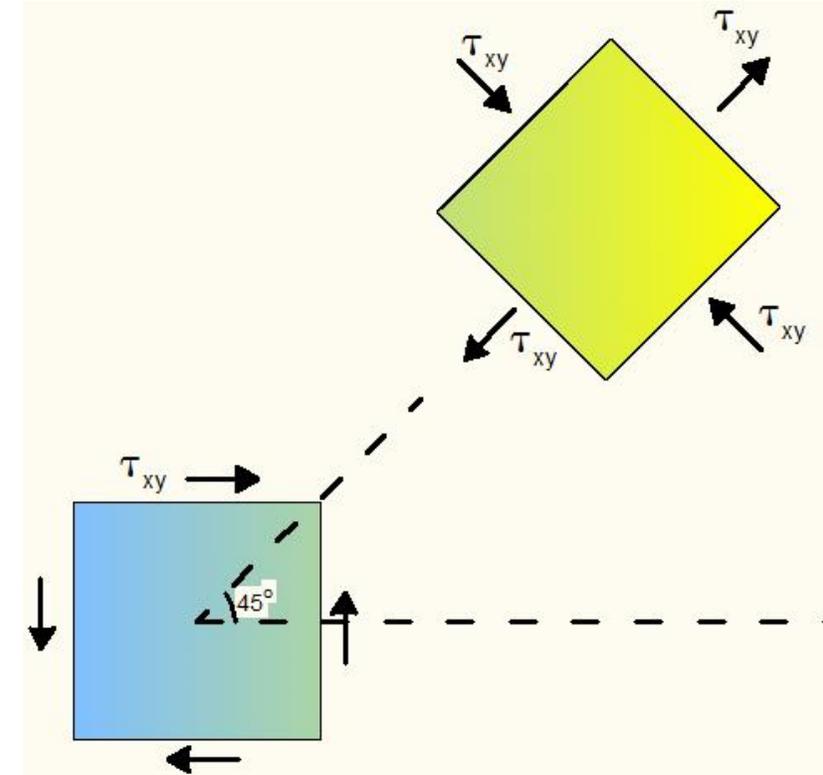
$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

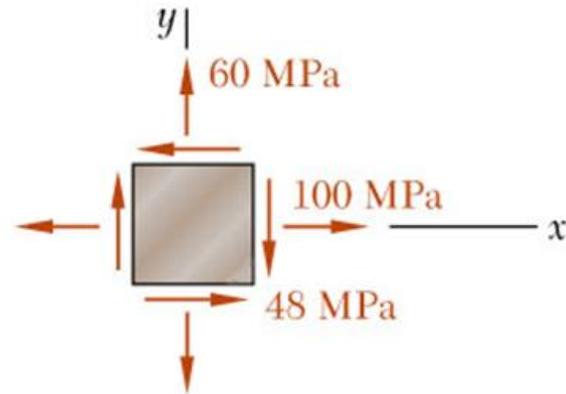
$$\theta_p = 45^\circ$$

$$\tau_{\max} = \tau_{xy}$$

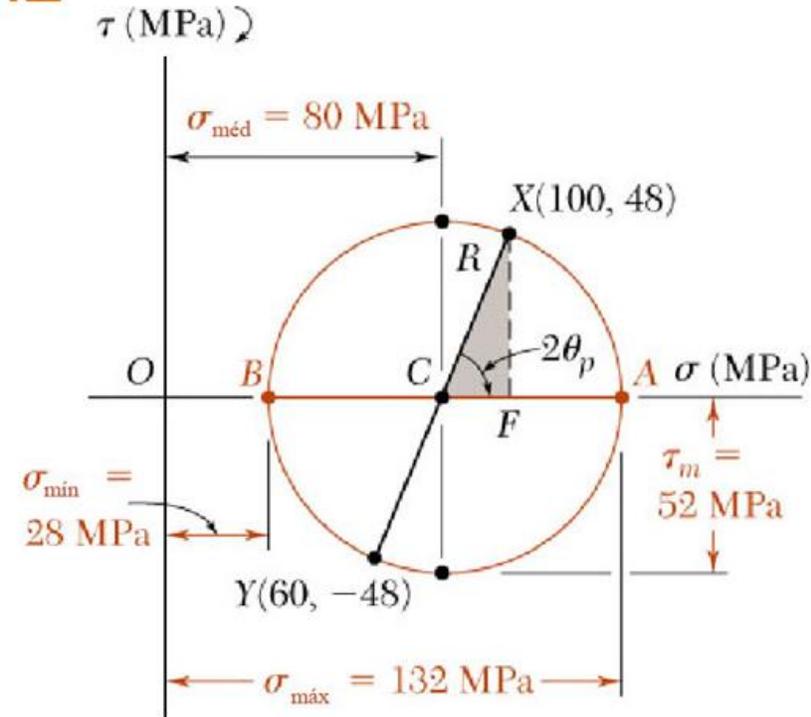
$$\theta_s = 0$$



Problema Resolvido 14.2



Para o estado plano de tensão mostrado, determine (a) os planos principais e as tensões principais, (b) as componentes de tensão exercida sobre o elemento obtido pela rotação do elemento dado sentido anti-horário de 30° .



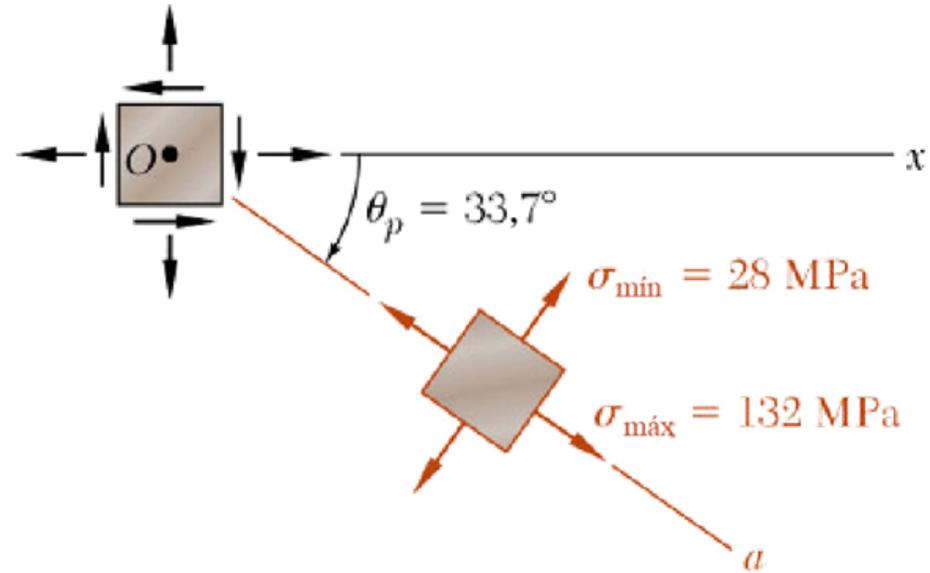
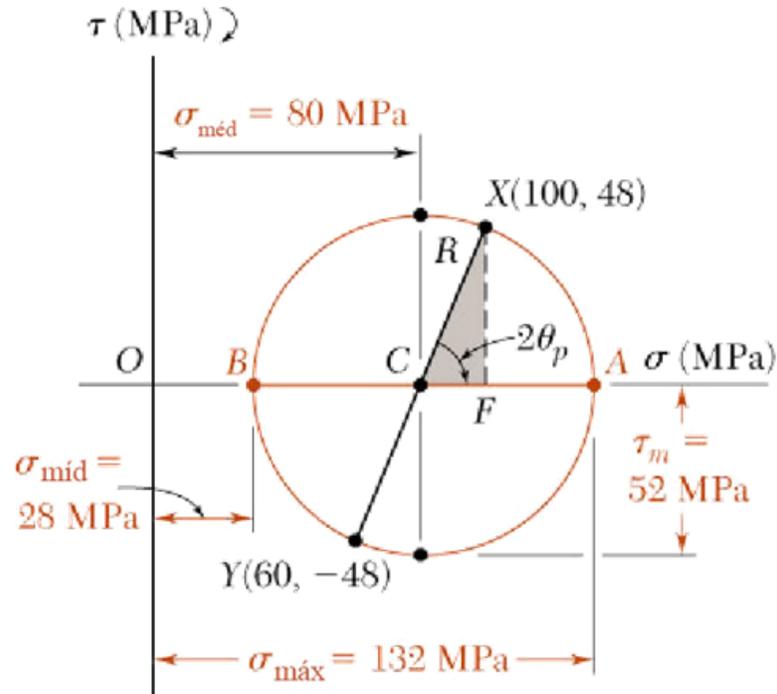
SOLUÇÃO:

- Construir o círculo de Mohr

$$\sigma_{méd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + 60}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2} = \sqrt{(20)^2 + (48)^2} = 52 \text{ MPa}$$

Problema Resolvido 14.2



- Planos e Tensões principais

$$\tan 2\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{48}{20} = 2.4$$

$$2\theta_p = 67,4^\circ$$

$$\theta_p = 33,7^\circ \text{ horário}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = OA = OC + CA$$

$$= 80 + 52$$

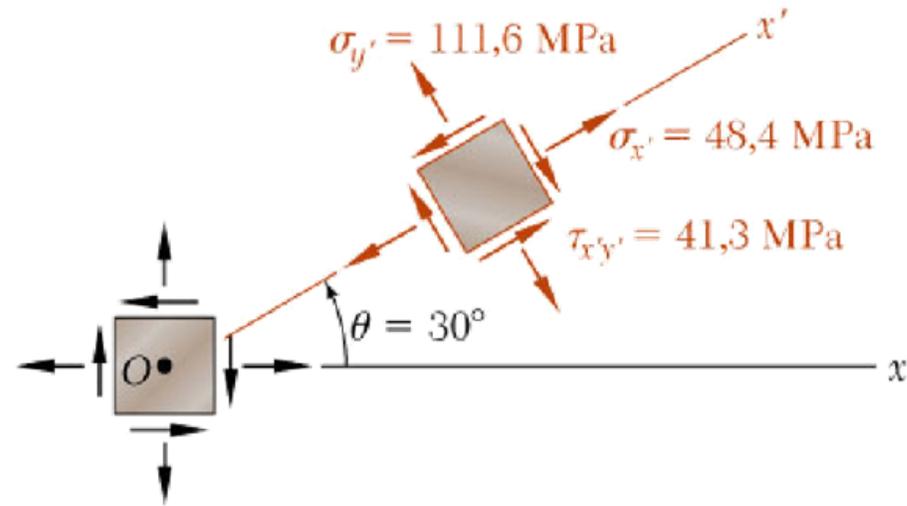
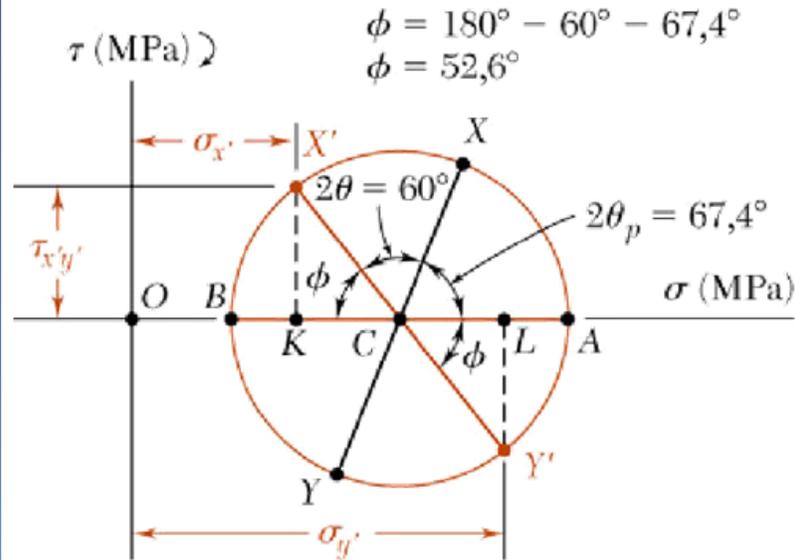
$$\sigma_{\text{máx}} = +132 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{mín}} = OA = OC - BC$$

$$= 80 - 52$$

$$\sigma_{\text{mín}} = +28 \text{ MPa}$$

Problema Resolvido 14.2



- Componentes de tensão após a rotação de 30°

Pontos X' e Y' no círculo de Mohr que correspondem às componentes de tensão no elemento girado são obtidos através da rotação anti-horário através de XY $2\theta = 60^\circ$

$$\phi = 180^\circ - 60^\circ - 67,4^\circ = 52,6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = 80 - 52 \cos 52,6^\circ$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = 80 + 52 \cos 52,6^\circ$$

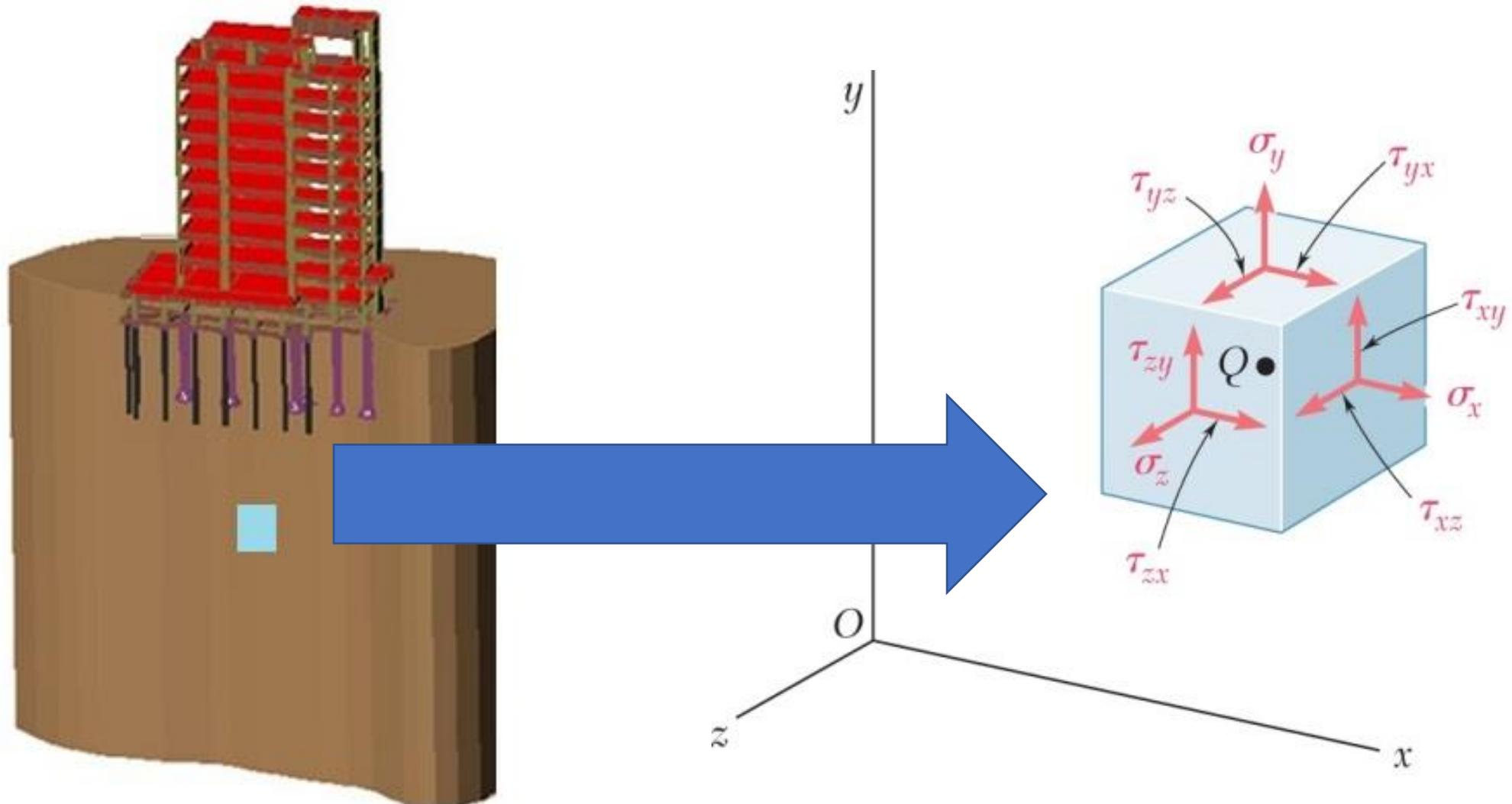
$$\tau_{x'y'} = KX' = 52 \sin 52,6^\circ$$

$$\sigma_{x'} = +48,4 \text{ MPa}$$

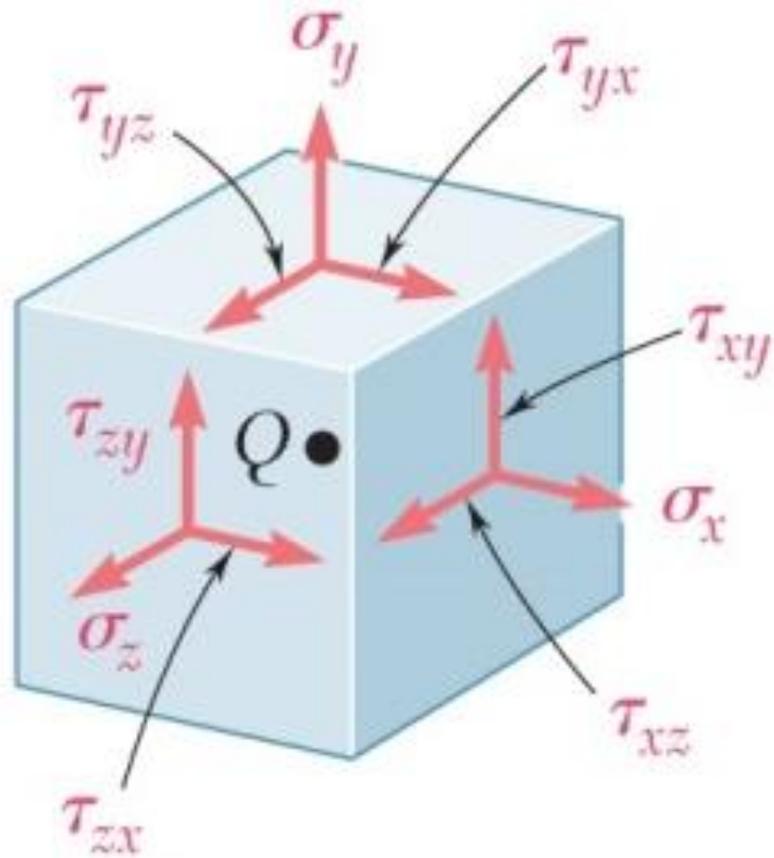
$$\sigma_{y'} = +111,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = 41,3 \text{ MPa}$$

Estado Triplo de Tensões

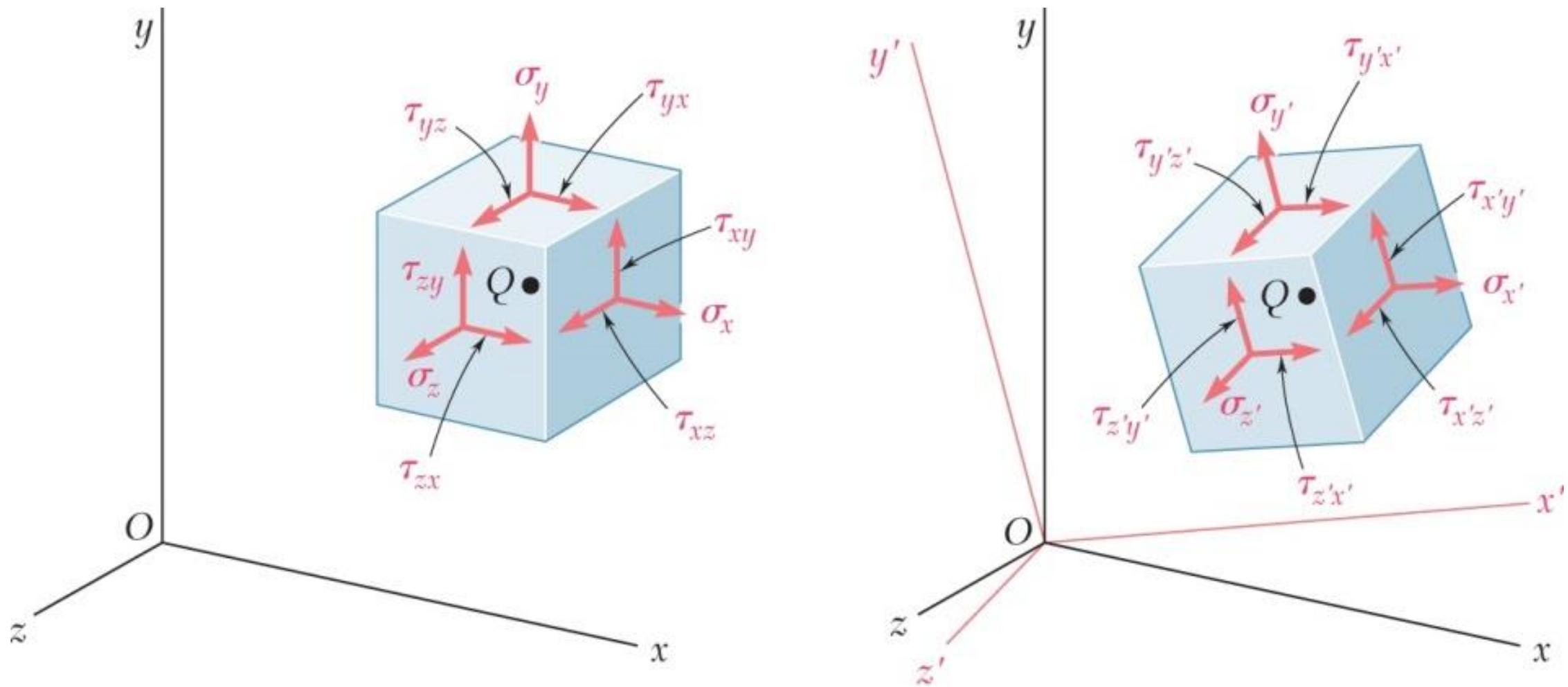


Estado Triplo de Tensões



$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

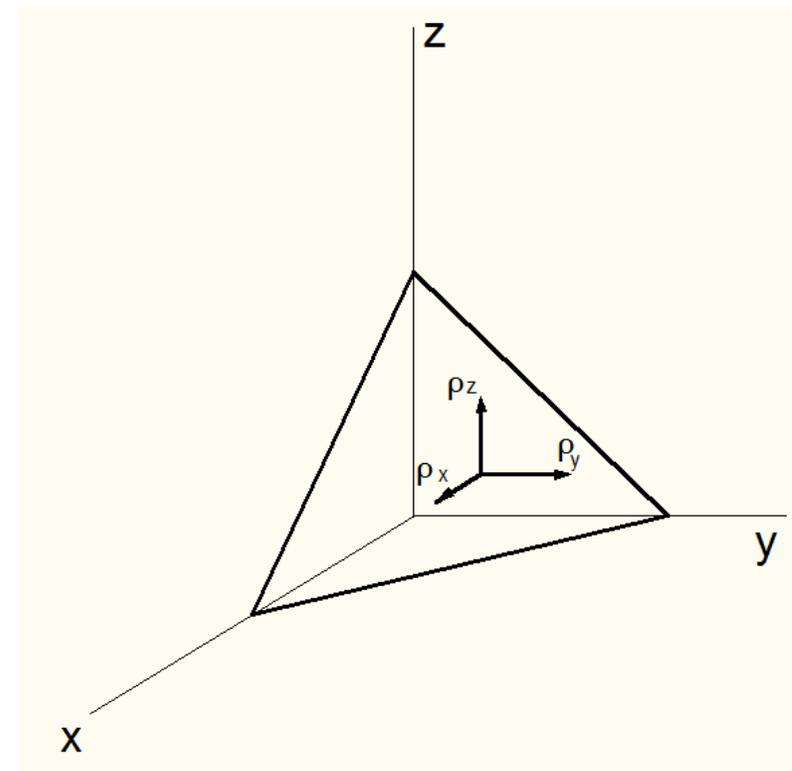
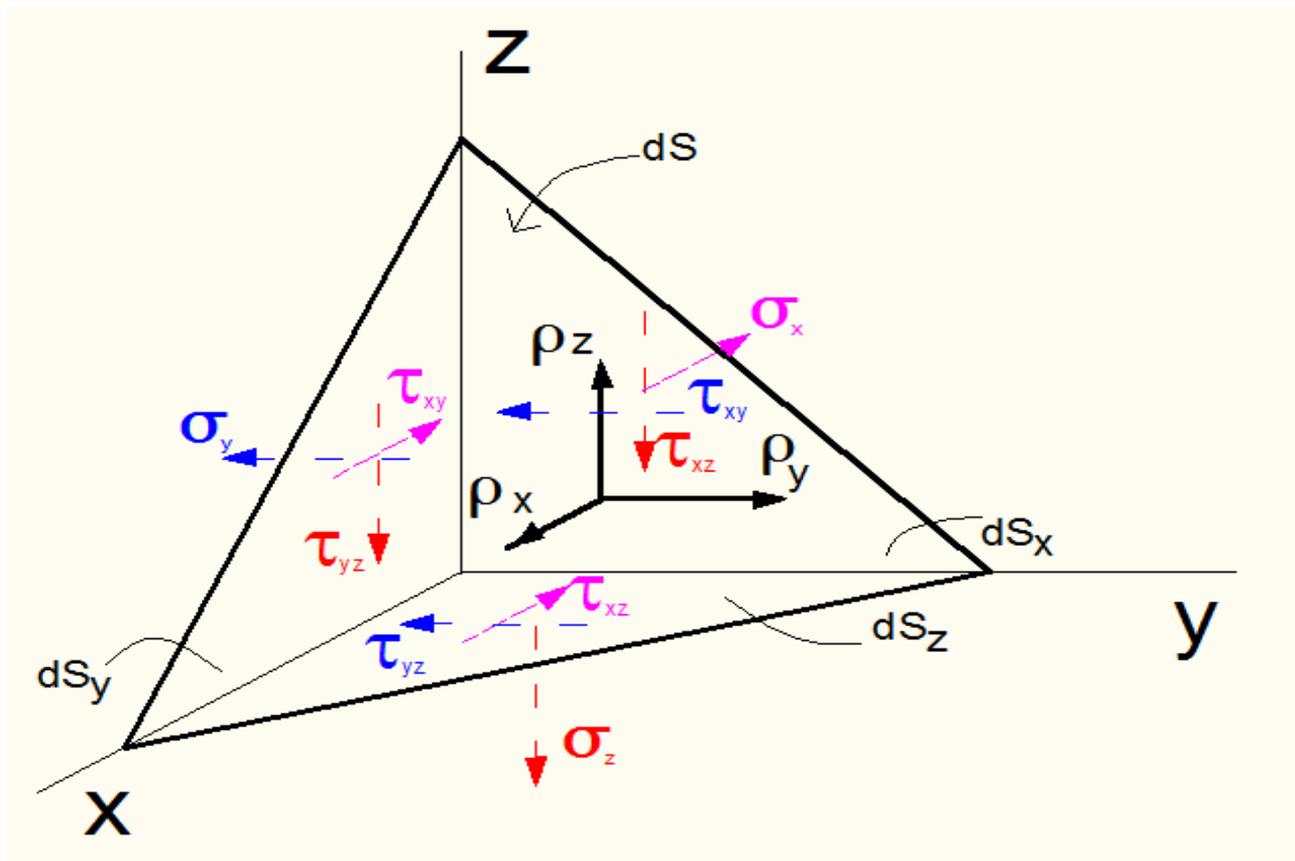
Estado Triplo de Tensões



Estado Triplo de Tensões

Fazer um corte no cubo, em um plano qualquer.

Aplicar as 3 equações de equilíbrio de força no tetraedro gerado



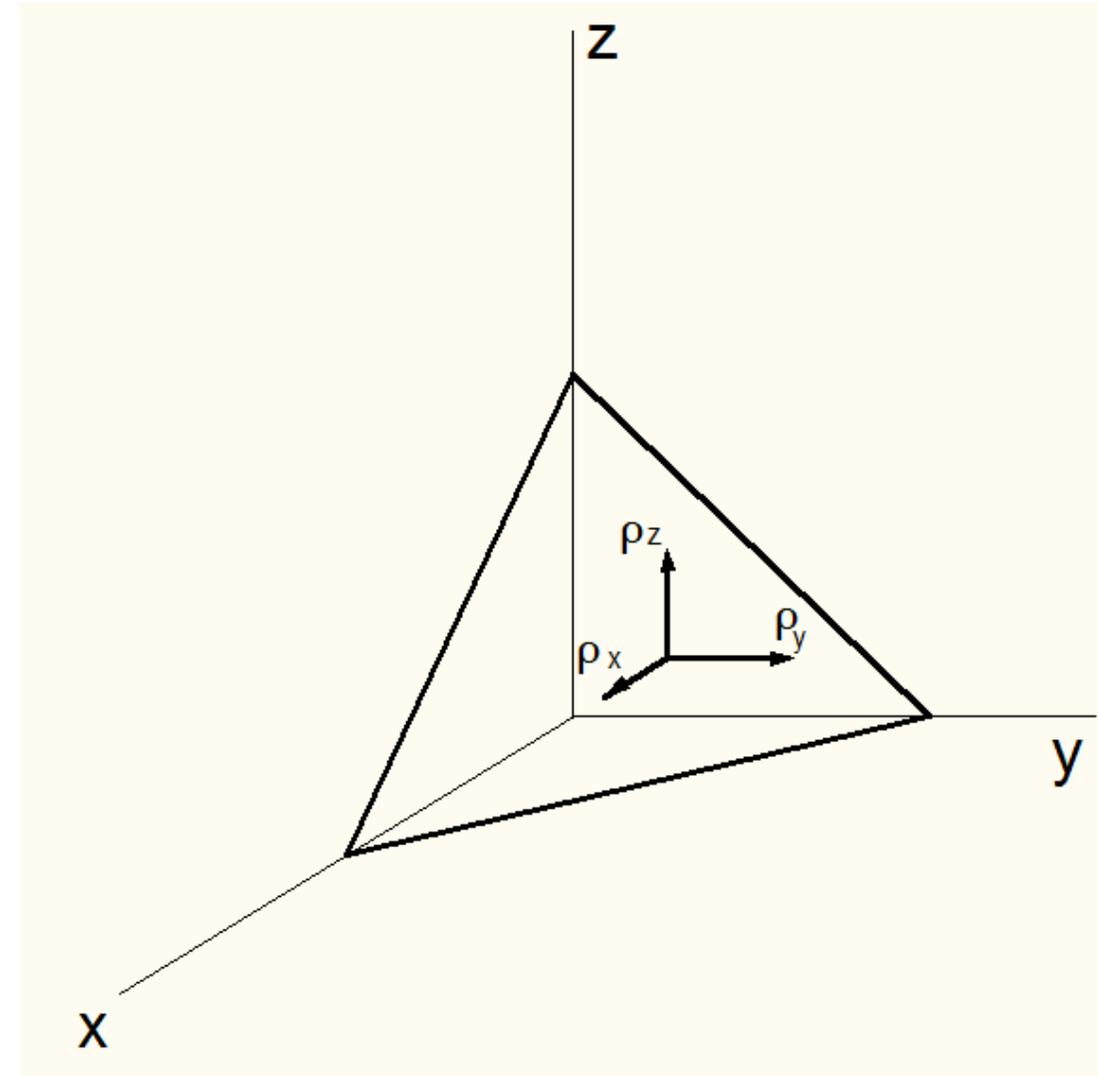
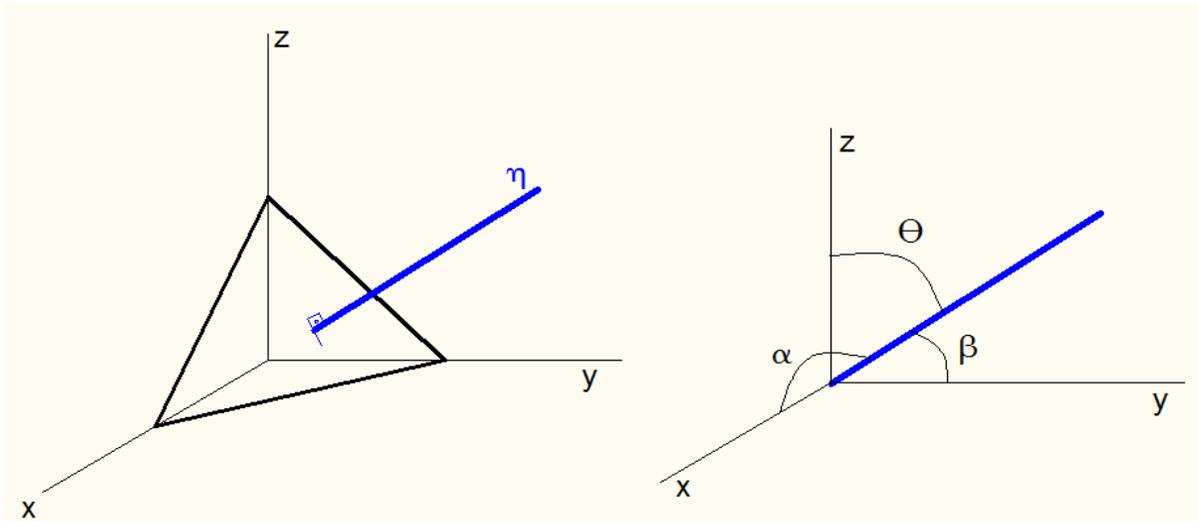
Estado Triplo de Tensões

As tensões que surgem no plano:

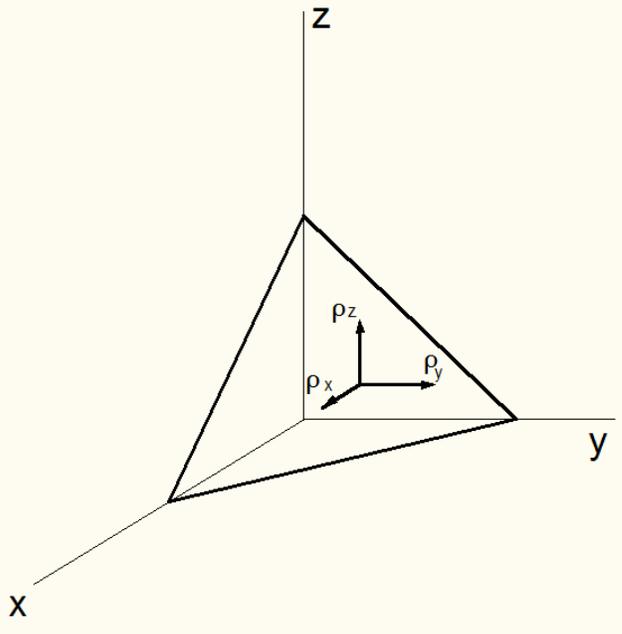
$$\rho_x = \sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos\beta + \tau_{xz} \cdot \cos\theta$$

$$\rho_y = \sigma_y \cdot \cos\beta + \tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \tau_{yz} \cdot \cos\theta$$

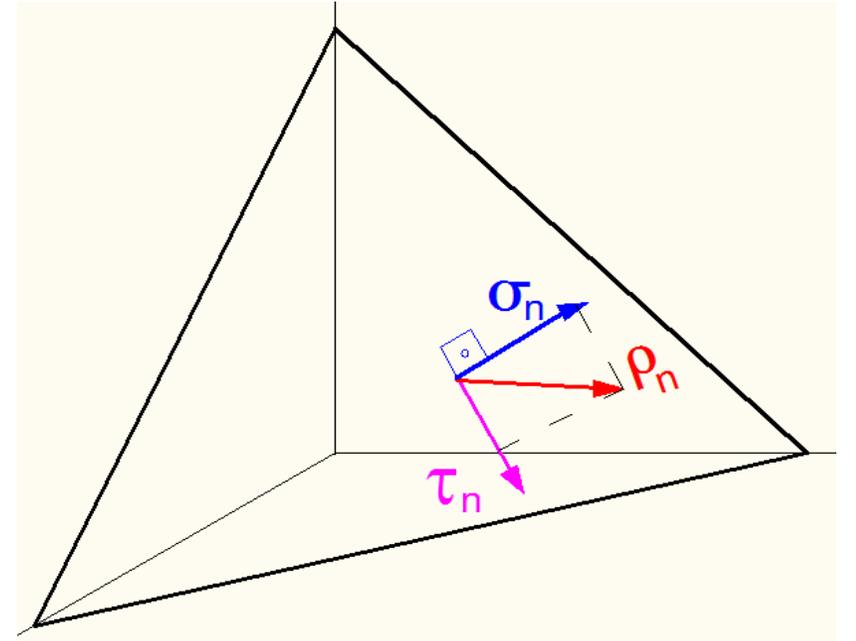
$$\rho_z = \sigma_z \cdot \cos\theta + \tau_{yz} \cdot \cos\beta + \tau_{xz} \cdot \cos\alpha$$



Estado Triplo de Tensões



$$\rho_n = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}$$



Projetando sobre a normal η o vetor ρ de tensão

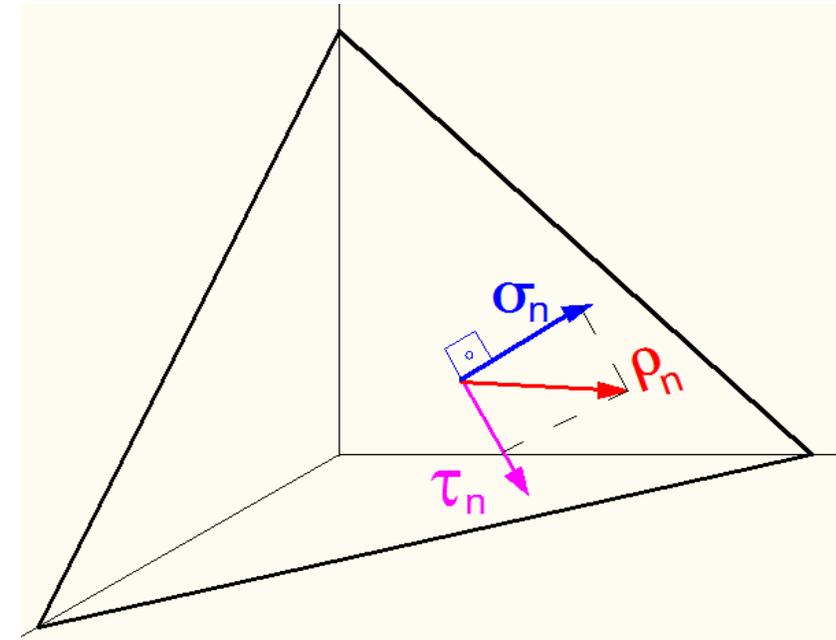
$$\sigma_N = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \theta + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 2 \cdot \tau_{xz} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta + 2 \cdot \tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta$$

Estado Triplo de Tensões

$$\rho_n = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}$$

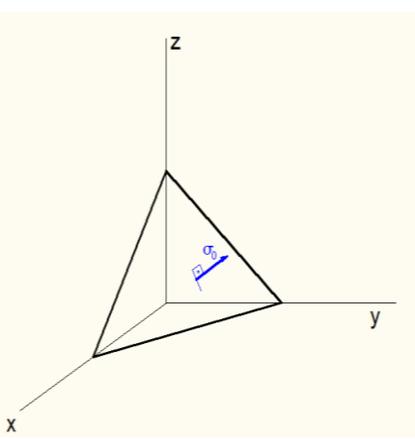
$$\sigma_N = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \sigma_z \cdot \cos^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta + 2\tau_{xz} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \theta + 2\tau_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \theta$$

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2}$$



DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

Resolvendo o polinômio de 3º: Cardano-Tartaglia, raízes são:



$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi)$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi - 120^\circ)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi - 240^\circ) \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES PRINCIPAIS

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi)$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi - 120^\circ)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi - 240^\circ)$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{xz} \cdot \tau_{yz}$$

$$\phi = \frac{1}{3} \cdot \arccos \left(\frac{2 \cdot I_1^3 - 9 \cdot I_1 \cdot I_2 + 27 \cdot I_3}{2 \cdot (I_1^2 - 3 \cdot I_2)^{3/2}} \right)$$

I_1, I_2, I_3 são os invariantes de tensão

A tensão cisalhante máxima fica: $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Para as deformações principais, basta substituir σ por ϵ

DETERMINAÇÃO DAS DIREÇÕES PRINCIPAIS

Com cada uma dessas tensões principais, obtém sua direção:

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi) \longrightarrow$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi - 120^\circ)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \right) \cos(\phi - 240^\circ)$$

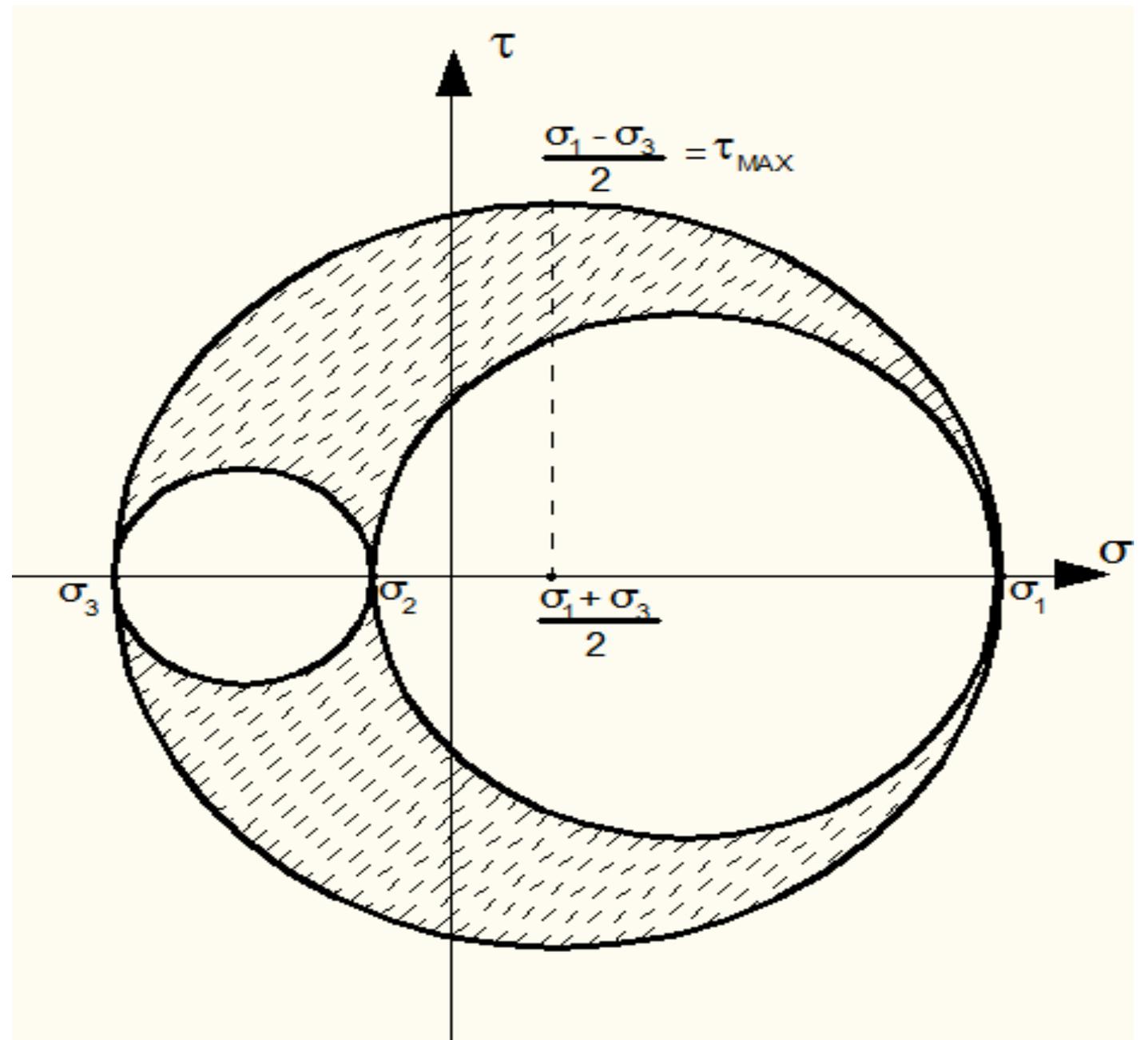
$$(\sigma_x - \sigma_1) \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \theta = 0$$

$$(\sigma_y - \sigma_1) \cdot \cos \beta + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \tau_{xz} \cdot \cos \theta = 0$$

$$(\sigma_z - \sigma_1) \cdot \cos \theta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \alpha = 0$$

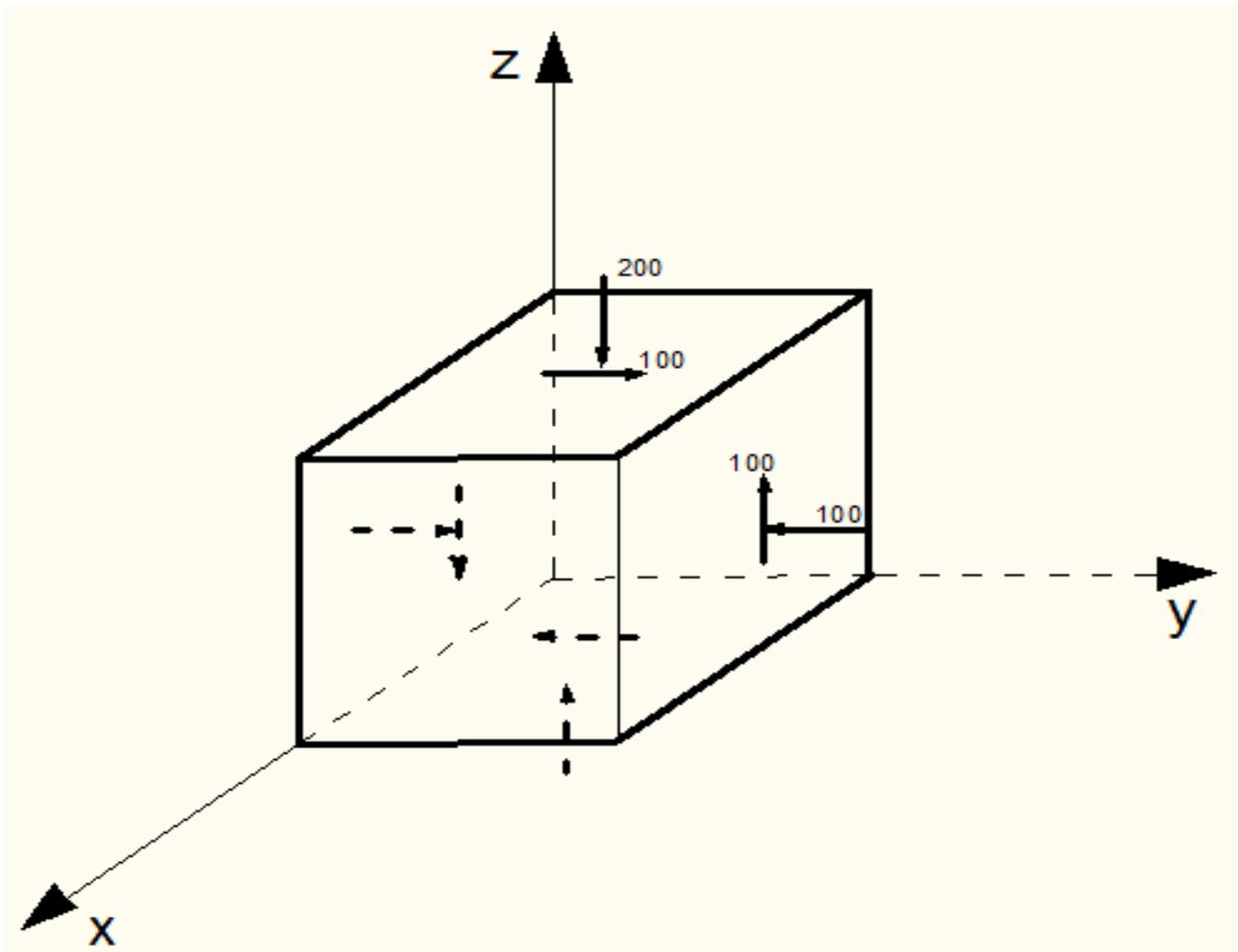
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\text{Relação de Euler})$$

CÍRCULO DE MOHR



EXEMPLO

Obtenha as tensões principais, unidades em MPa.



Resolução:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

$$\sigma_y = -100$$

$$\sigma_z = -200$$

$$\tau_{yz} = 100$$

EXEMPLO

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_y \cdot \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2 - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{xz} \cdot \tau_{yz}$$

$$\phi = \frac{1}{3} \cdot \arccos \left(\frac{2 \cdot I_1^3 - 9 \cdot I_1 \cdot I_2 + 27 \cdot I_3}{2 \cdot (I_1^2 - 3 \cdot I_2)^{3/2}} \right)$$

$$I_1 = 0 + (-100) + (-200) = -300$$

$$I_2 = 0 + 0 + (-100) \cdot (-200) - 100^2 = 10.000$$

$$I_3 = 0$$

$$\phi = \frac{1}{3} \cdot \arccos \left(\frac{2 \cdot (-300)^3 - 9 \cdot (-300) \cdot (10.000) + 27 \cdot 0}{2 \cdot ((-300)^2 - 3 \cdot 10.000)^{3/2}} \right) = 52,24^\circ$$

EXEMPLO

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi)$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi - 120^\circ)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} + \frac{2}{3} \left(\sqrt{I_1^2 - 3.I_2} \right) \cos(\phi - 240^\circ)$$

$$\sigma_1 = \frac{-300}{3} + \frac{2}{3} (163,3) \cdot \cos(52,24) = 0$$

$$\sigma_2 = \frac{-300}{3} + \frac{2}{3} (163,3) \cdot \cos(52,24 - 120) = -38,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{-300}{3} + \frac{2}{3} (163,3) \cdot \cos(52,24 - 240) = -262 \text{ MPa}$$

EXEMPLO

Para σ_1

$$(0-0) \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \theta = 0$$

$$(-100-0) \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \alpha + 100 \cdot \cos \theta = 0 \rightarrow \cos \beta = \cos \theta \quad (1)$$

$$(-200 - \sigma_{10}) \cdot \cos \theta + 100 \cdot \cos \beta + 0 \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow 2 \cdot \cos \theta = \cos \beta \quad (2)$$

Equação (1) com (2): $\cos \theta = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \cos \beta = 0 \rightarrow \beta = 90^\circ$

$$\cos^2 \alpha + 0 + 0 = 1 \rightarrow \cos \alpha = \pm 1 \rightarrow \alpha \rightarrow \theta = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ$$

$$(\sigma_x - \sigma_1) \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \theta = 0$$

$$(\sigma_y - \sigma_1) \cdot \cos \beta + \tau_{xy} \cdot \cos \alpha + \tau_{xz} \cdot \cos \theta = 0$$

$$(\sigma_z - \sigma_1) \cdot \cos \theta + \tau_{yz} \cdot \cos \beta + \tau_{xz} \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\text{Relação de Euler})$$

Para σ_2

$$\cos \alpha = 0; \quad \cos \beta = \pm 0,86 \rightarrow \beta = 31^\circ \text{ ou } 149^\circ$$

$$\cos \theta = \pm 0,53 \rightarrow \theta = 59^\circ \text{ ou } 121^\circ$$

Classificação dos materiais de engenharia

DÚCTEIS: rompem c/ níveis **alto** de deformação

FRÁGEIS: rompem c/ níveis **baixo** de deformação

Classificação limitada:

Afetados por

Defeitos intrínsecos
Efeito de escala

Heterogeneidade do meio

Influencia a resposta mecânica e
depende da solicitação

Concreto: material composto

Frágil p/ tração
Dúctil p/ compressão

Metais: homogêneo

Boa deformabilidade em diferentes tipos de
solicitações

Capacidade Resistente dos materiais:

Resultado de combinação de efeitos

Identificar solicitações q / excedam sua capacidade resistente

Objetiva projetos **Seguros e Econômicos**

Busca-se critérios p / avaliar a segurança

CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Formas simples e plausíveis p/ identificar situações limites da resistência dos materiais

Dependendo do tipo de material:

Postula-se limite à tensão (função do tipo de ruptura)

Normal

Cisalhamento

CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Envolve componentes de tensão q / quantifica intensidade do estado local de sollicitação

Resistências responsáveis pela ruptura

Ensaio de laboratório
uniaxiais

Tração/compressão

Cisalhamento simples

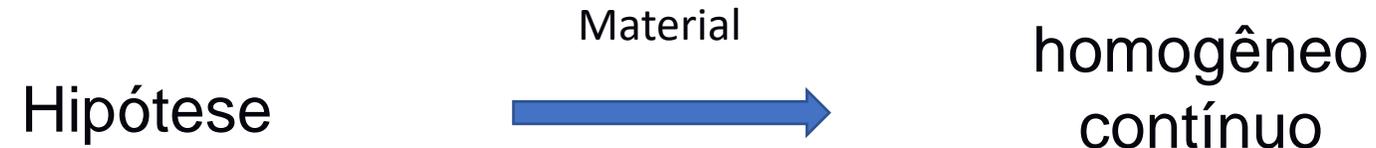
Sollicitação

compara-se



Tensões admissíveis,
Ruptura do material

CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA



CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA (Critérios de ruptura)

Estados limites de tensão que possam violar capac.
resistente do material

Desconsidera-se deformações residuais

CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA

Materiais com alta deformações residuais



Tensões de referencia com critérios de plastificação

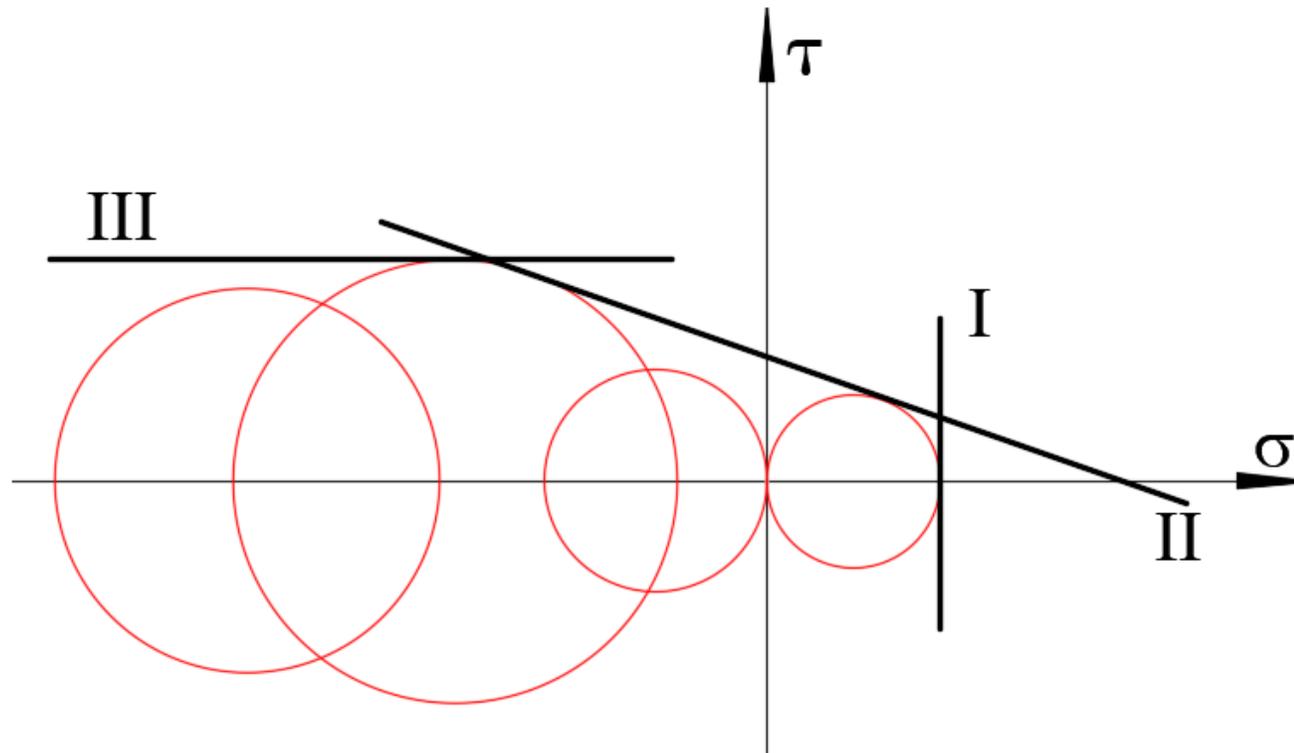
Exemplos:

Aços e Ligas

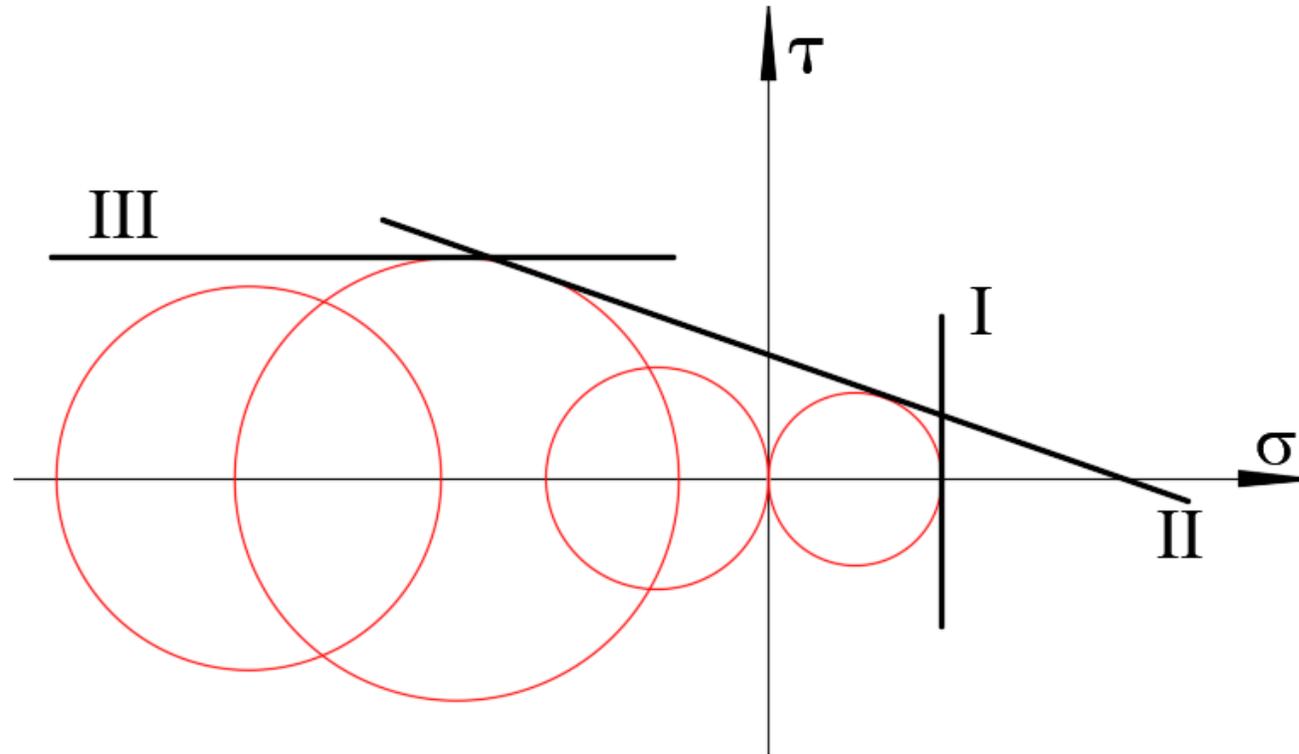
ENVOLTÓRIA DE MOHR

Visualização das combinações que levam a ruptura (Círculo de Mohr)

Diversas situações de solicitações limites:
tração/compressão, cisalhamento simples, estados duplos ou triplos



ENVOLTÓRIA DE MOHR



Ruptura devido a

I: tração (giz/concreto)

II: combinação linear de σ e τ (material granular, concreto)

III: cisalhamento máximo

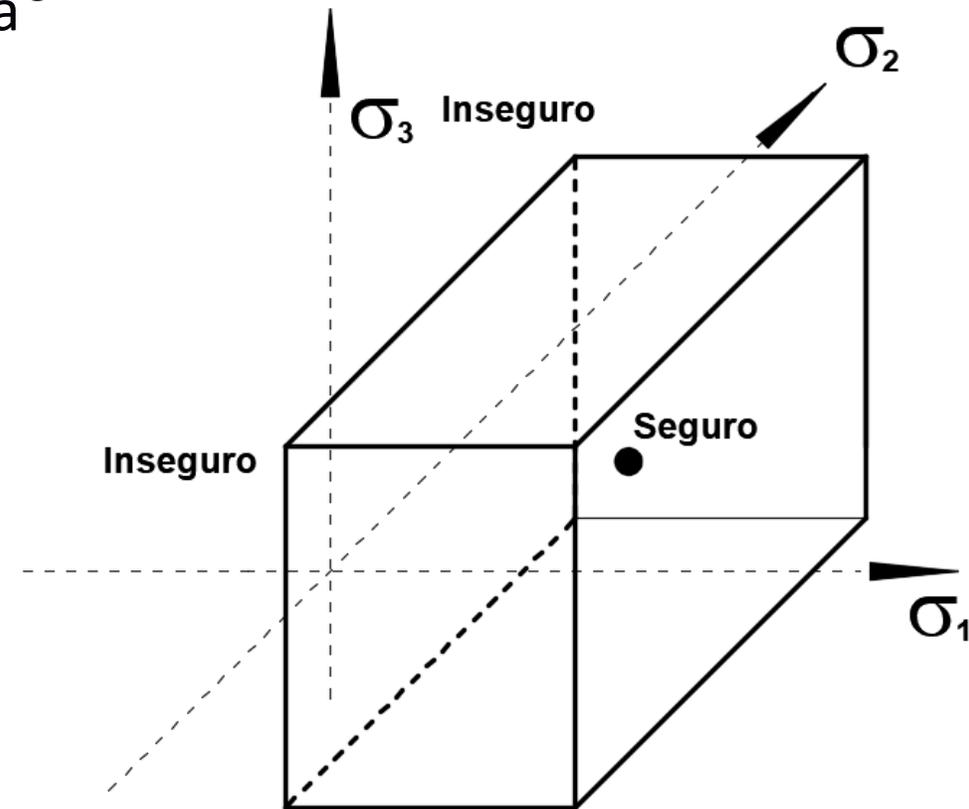
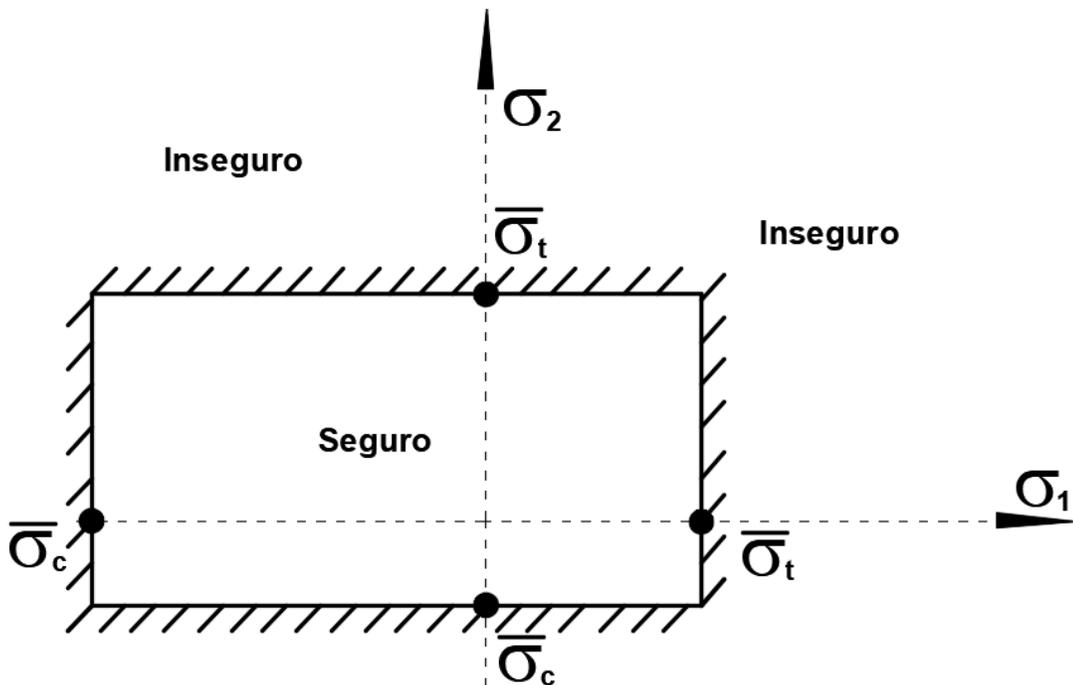
Critério da máxima tensão normal - Rankine

Trecho I: limitado pela tensão adm. de tração/compressão

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t$$

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_3 \leq \bar{\sigma}_t$$

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_2 \leq \bar{\sigma}_t$$



Materiais frágeis é usual:

$$|\bar{\sigma}_t| < |\bar{\sigma}_c|$$

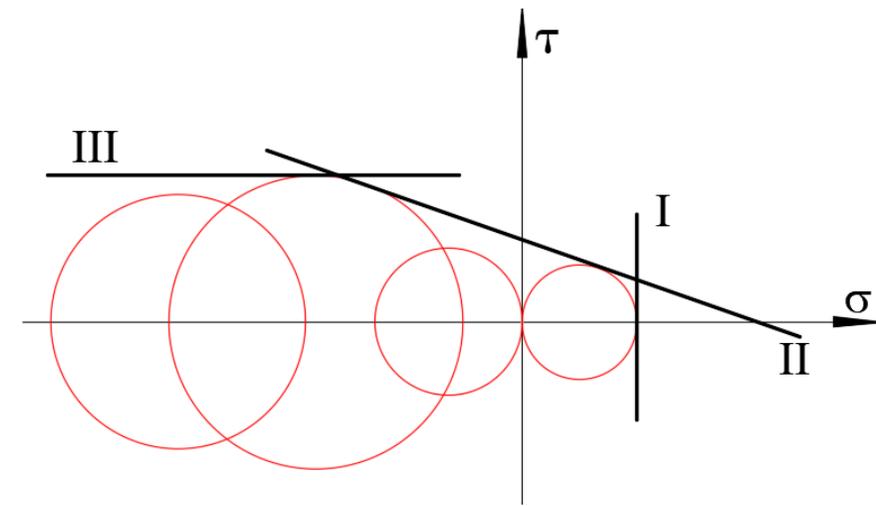
$\bar{\sigma}_c, \bar{\sigma}_t$: resistência a compressão/tração (ensaio uniaxial)

Critério de Tresca - Máxima tensão cisalhante

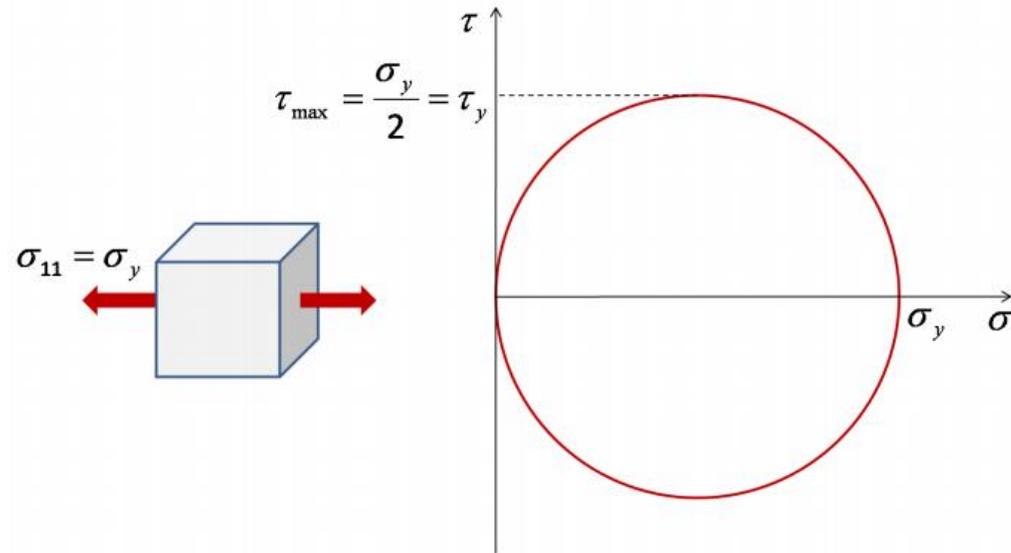
Materiais dúcteis: escoamento provocado pelo deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas, principalmente, devido ao cisalhamento

Trecho III: limitado pela tensão adm. de cisalhamento máximo

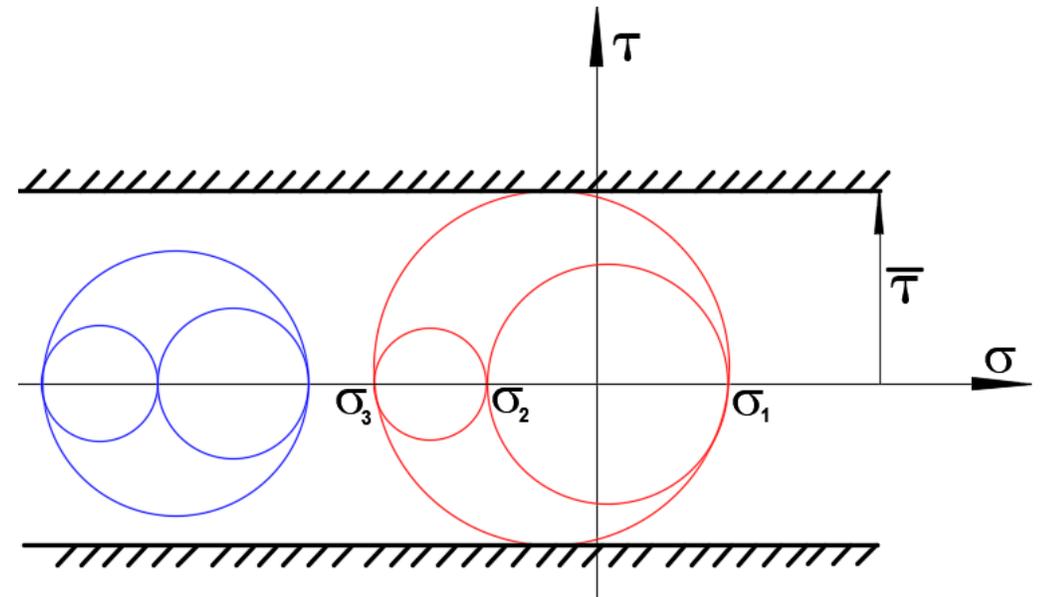
Ruptura provocada por cisalhamento ou desvios dessas



Critério de Tresca - Máxima tensão cisalhante



Círculo de Mohr para ensaio de tração simples:



Critério de Tresca:

$$|\tau_{max}| = \max \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \right] \leq \bar{\tau} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

$\bar{\sigma}, \sigma_y$: resistência a tração/compressão (ensaio uniaxial)

Critério de Tresca - Máxima tensão cisalhante

p/ viga a flexão:

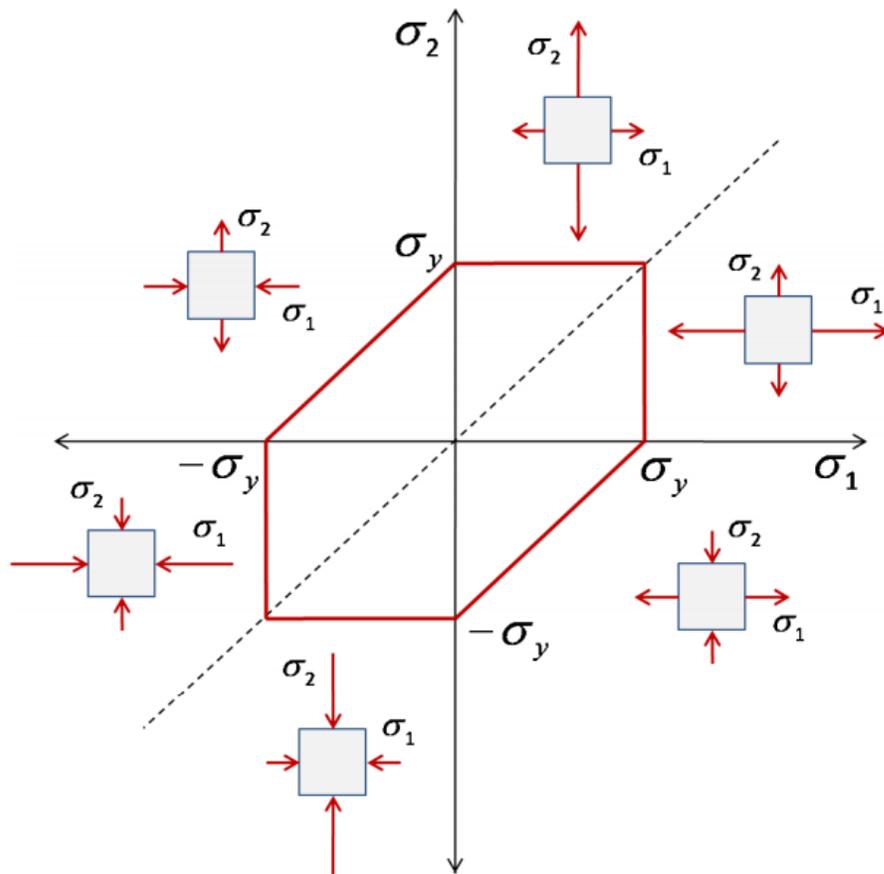
$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq \bar{\tau} = \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow |\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_y$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]} = \frac{\sigma_x}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_x^2}}\right)$$

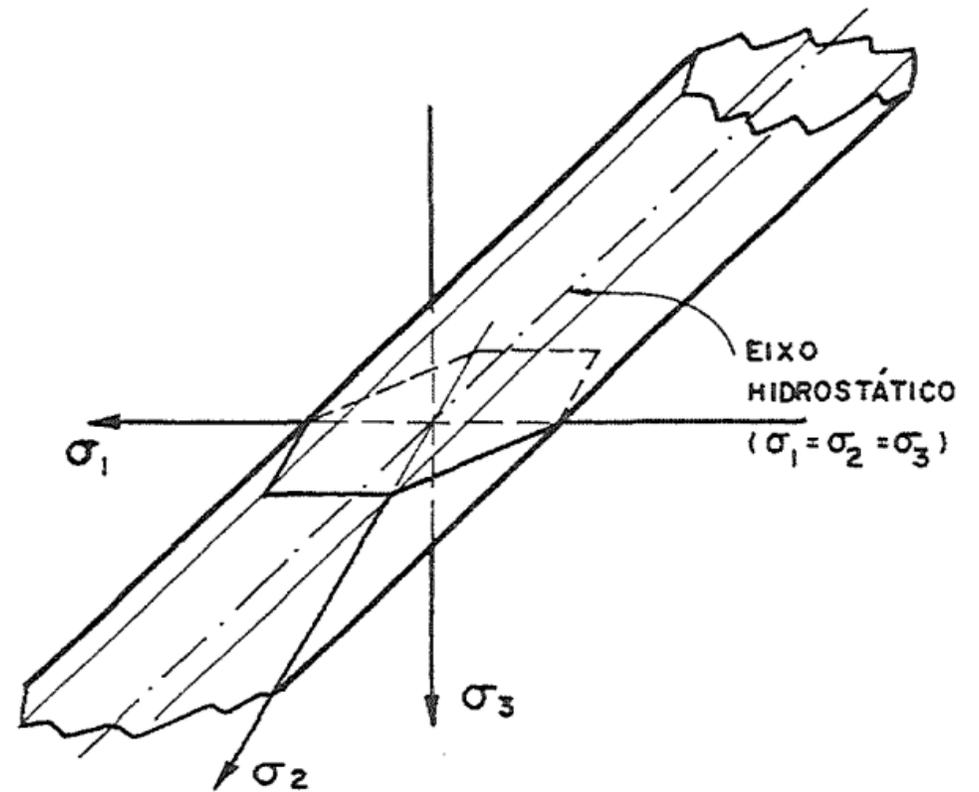
$$2 \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y = \bar{\sigma}$$

Critério de Tresca - Máxima tensão cisalhante

$$|\tau_{max}| = \max \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_2|}{2} \right] < \bar{\tau} = \frac{\bar{\sigma}}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$



Estado plano



Cilindro hexagonal de Tresca

Critério de Von Mises - Máxima energia de distorção ***Máxima tensão octaédrica***

Materiais dúcteis: considerada uma regularização de Tresca

Estados hidrostáticos não levam à ruptura

Ruptura ocorre se Energia de distorção absorvida no processo de deformação atinge valor limite de referencia

$$U = \frac{1}{2} [\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3] = U_v + U_D$$

U_v: Energia de volume

U_D: Energia de distorção (variação de forma)

Critério de Von Mises - Máxima energia de distorção

Máxima tensão octaédrica

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = [A] + [B] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = [C] + [D] = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

$$U_v = [A][C]$$

$$U_D = [B][D]$$

Critério de Von Mises - Máxima energia de distorção Máxima tensão octaédrica

$$U_D = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) + (\sigma_2 - \sigma_m)(\varepsilon_2 - \varepsilon_m) + (\sigma_3 - \sigma_m)(\varepsilon_3 - \varepsilon_m)]$$

Aplicando a Lei de Hooke, tem-se:

$$U_D = \frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

Se ruptura por tração: $\sigma_1 = \bar{\sigma} = \sigma_y = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$U_D = \frac{1 + \nu}{6E} [\sigma_y^2 + \sigma_y^2] = \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_y^2$$

Critério de Von Mises - Máxima energia de distorção

Máxima tensão octaédrica

Critério fica:
$$\frac{1 + \nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq \frac{1 + \nu}{3E} \sigma_y^2$$

$$\sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sqrt{2} \sigma_y$$

p/ viga a flexão: σ_x e τ_{xy}

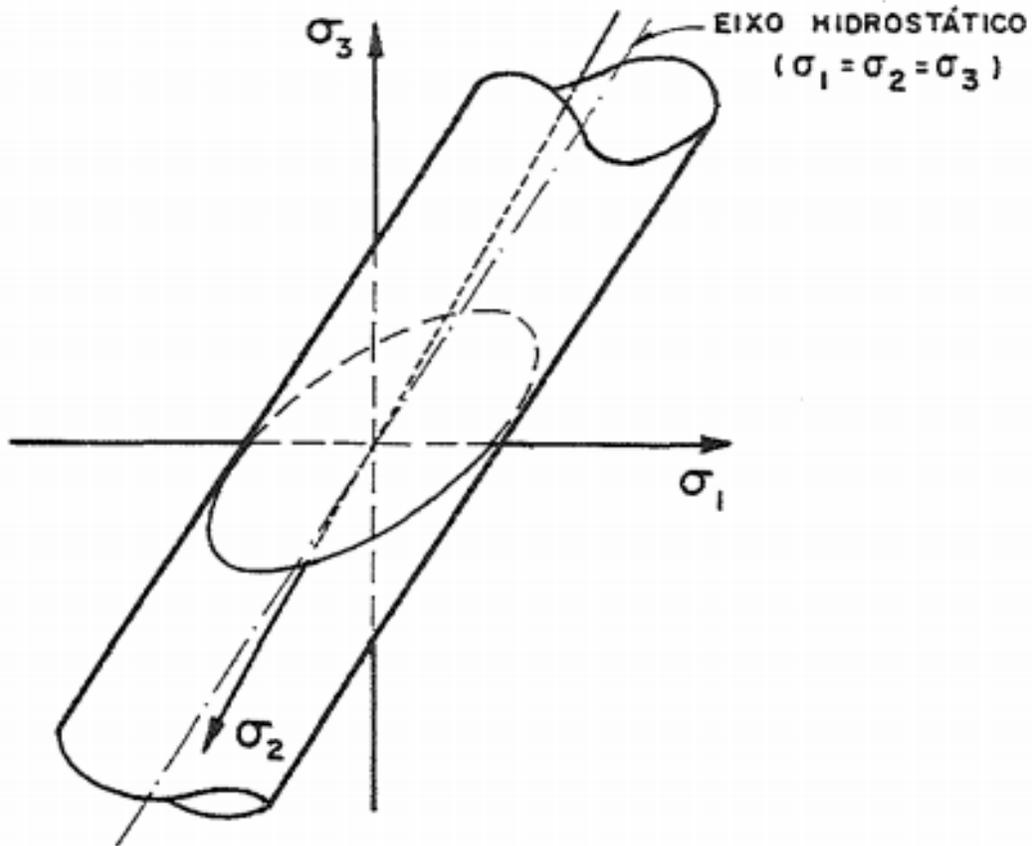
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x - \sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]} = \frac{\sigma_x}{2} \left(1 \pm \sqrt{\left[1 + 4 \frac{\tau_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right]}\right)$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y = \bar{\sigma}$$

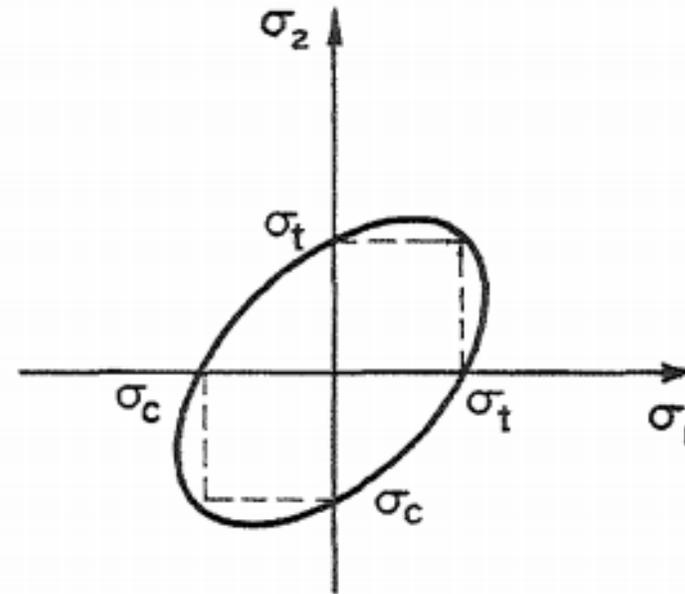
Critério de Von Mises - Máxima energia de distorção

Máxima tensão octaédrica

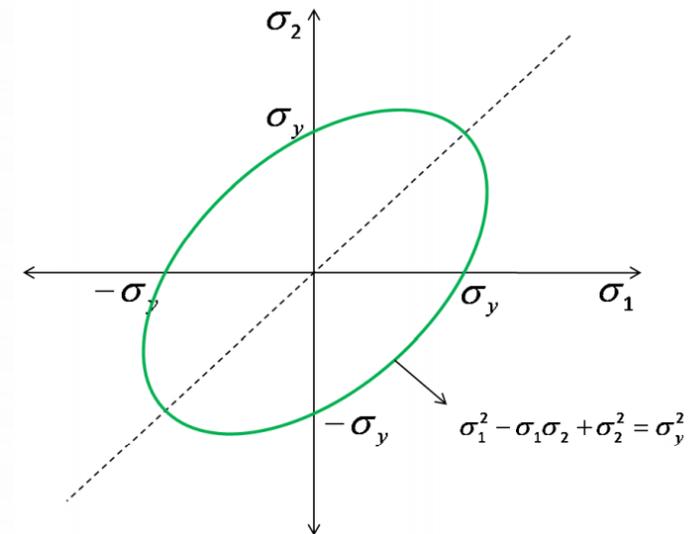
$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \leq 2\sigma_T^2 \quad (\text{eq. superfície cilíndrica})$$



Cilindro circular de Von Mises



Traço elíptico no plano



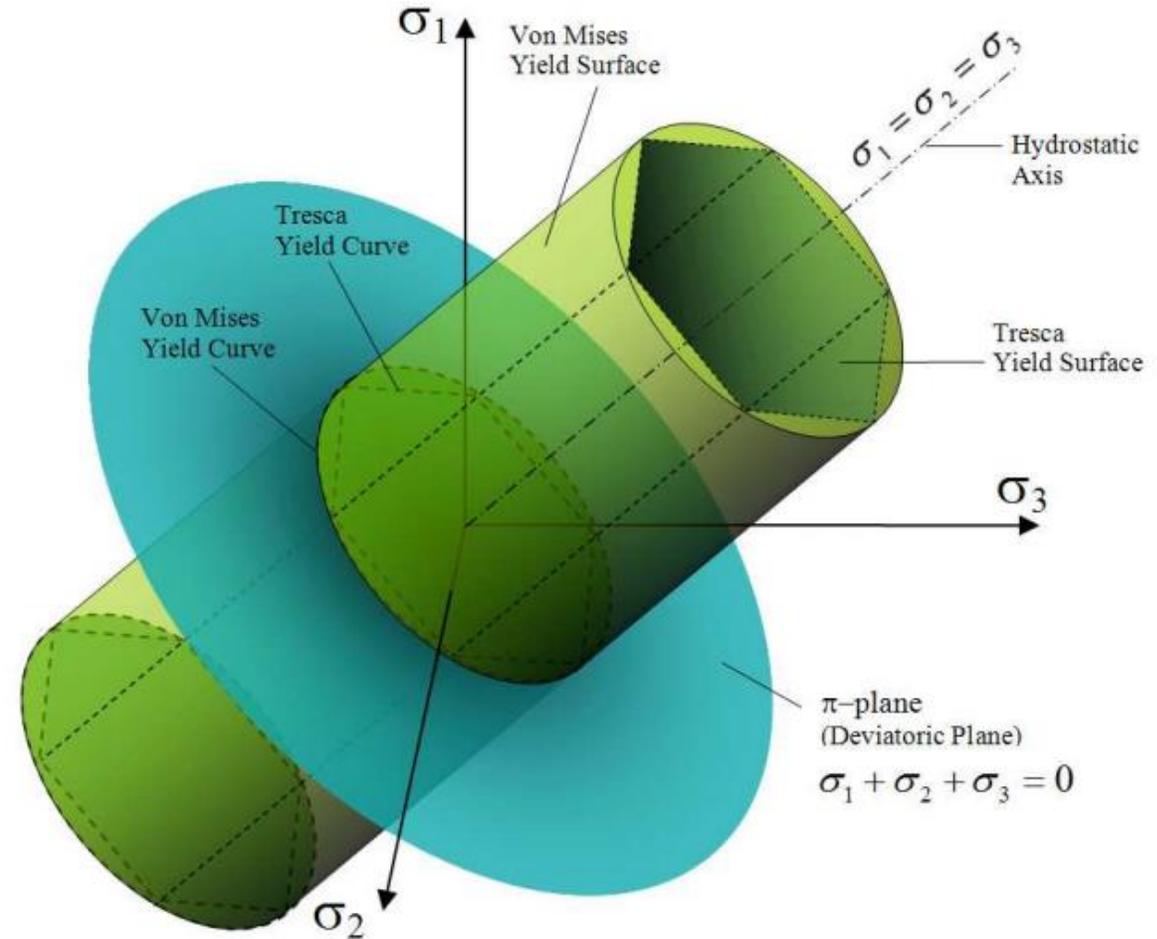
Superfície de escoamento de Tresca e Von Mises

Tresca

$$2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y$$

Von Mises

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y$$



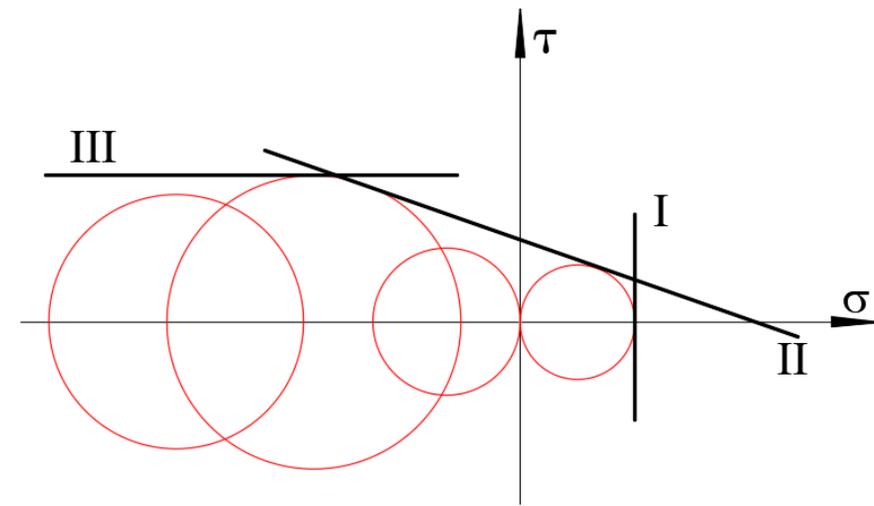
Tresca mais pessimista

[Source : Wikipedia]

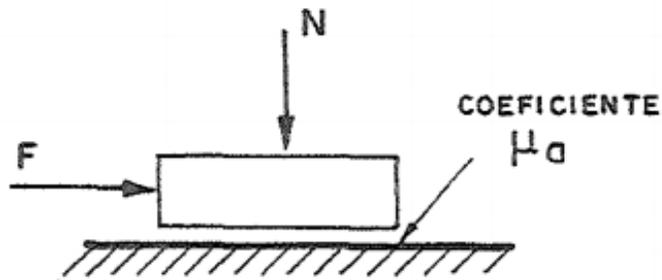
Critério de Mohr- Coulomb

Materiais frágeis: pulverulentos

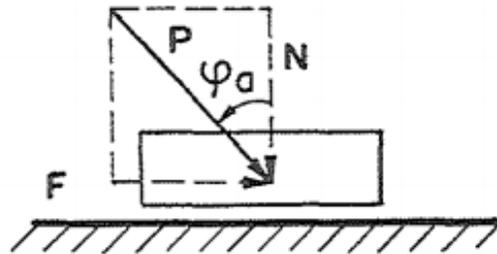
Trecho II



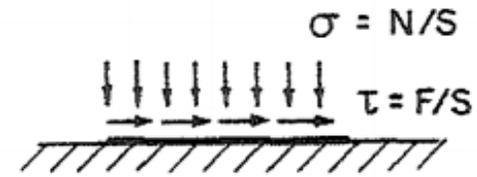
Analogia modelo simples de escorregamento c/ atrito da Teoria de Coulomb



a) Atrito



b) Ângulo de Atrito



c) Tensões em Jogo

Não deslizar:

$$P \sin \varphi_a \leq \mu_a P \cos \varphi_a$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_a) \leq \mu_a$$

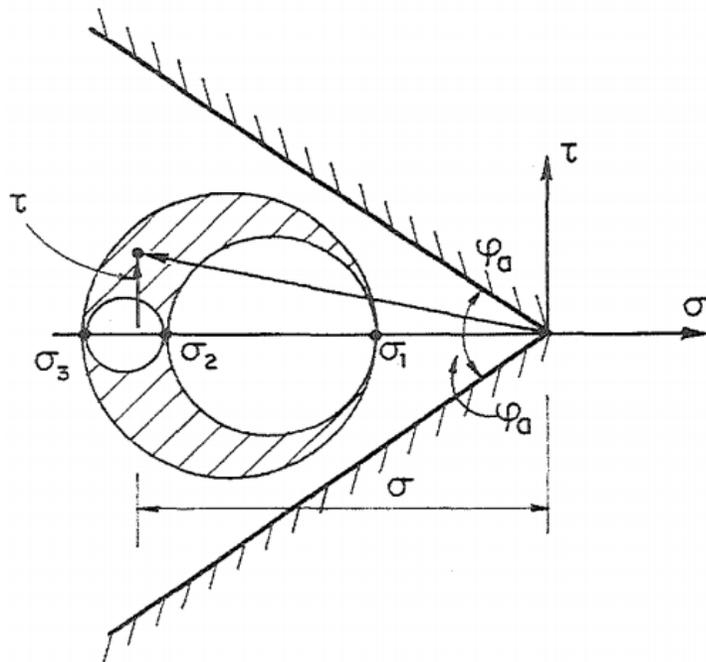
μ_a : coef. de atrito

Critério de Mohr- Coulomb

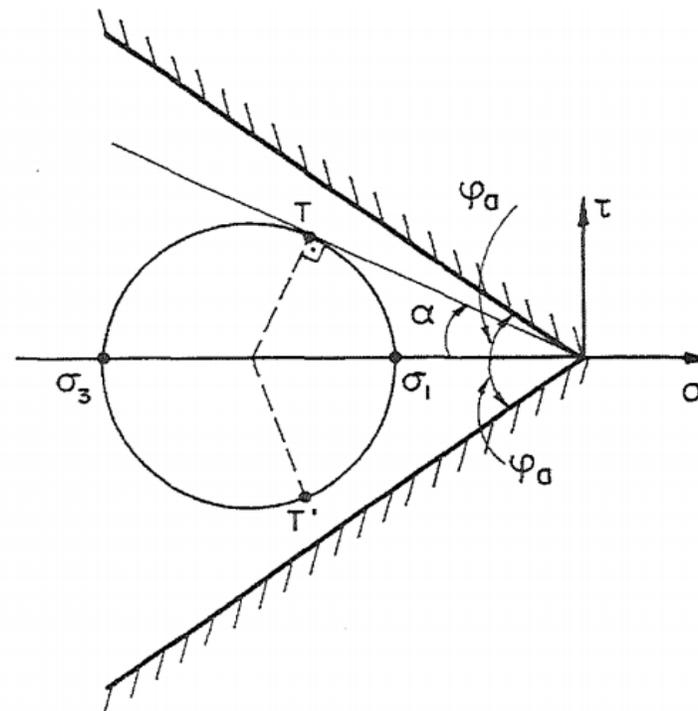
Meios contínuos, superfícies inteiras com tensões, sem movimentação relativa:

$$\tau \leq \mu_a \sigma = (\operatorname{tg} \varphi_a) \sigma \longrightarrow \text{Critério}$$

Atrito entre partículas é responsável pela integridade do conjunto



a) Círculos de Mohr



b) Estado mais crítico de tensão

Sem deslizamento relativo entre partículas

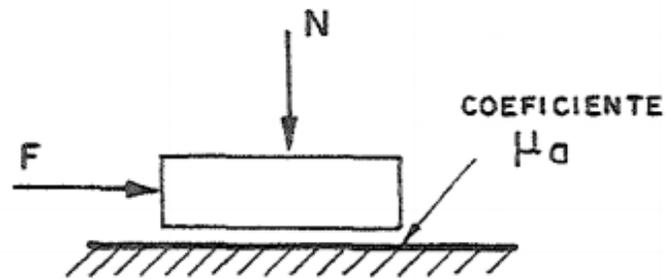
$$\alpha \leq \varphi_a$$

Critério de Mohr - Coulomb (M-C)

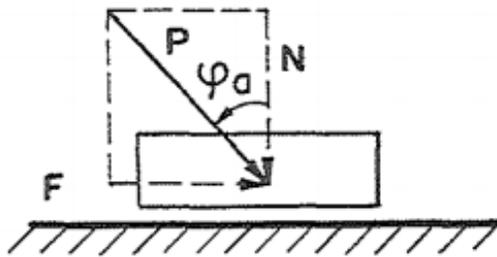
Usado na eng. Geotécnica **Materiais frágeis: pulverulentos**

modo unificado de expressar superfície de falha pelo ângulo de atrito

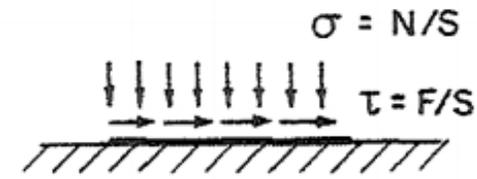
Analogia modelo simples de escorregamento c/ atrito da Teoria de Coulomb



a) Atrito



b) Ângulo de Atrito



c) Tensões em Jogo

Não deslizar:

$$P \sin \varphi_a \leq \mu_a P \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) \leq \mu_a$$

μ_a : coef. de atrito

Critério de Mohr - Coulomb (M-C)

Meios contínuos, superfícies inteiras com tensões, sem movimentação relativa:

$$\tau \leq \sigma(\operatorname{tg} \varphi) + c$$

Constantes do material

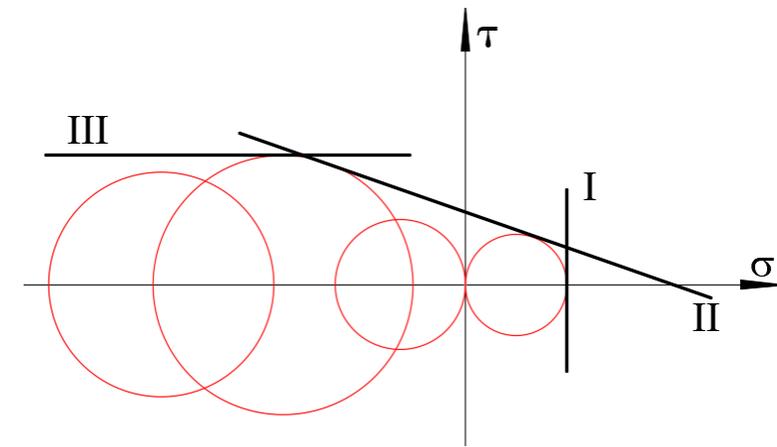
$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi: \text{ângulo de atrito interno} \\ c: \text{coesão} \quad (c = 0, \text{ areia seca}) \end{array} \right.$$

Coulomb propõe critério de falha: $\tau = \sigma(\operatorname{tg} \varphi) + c$

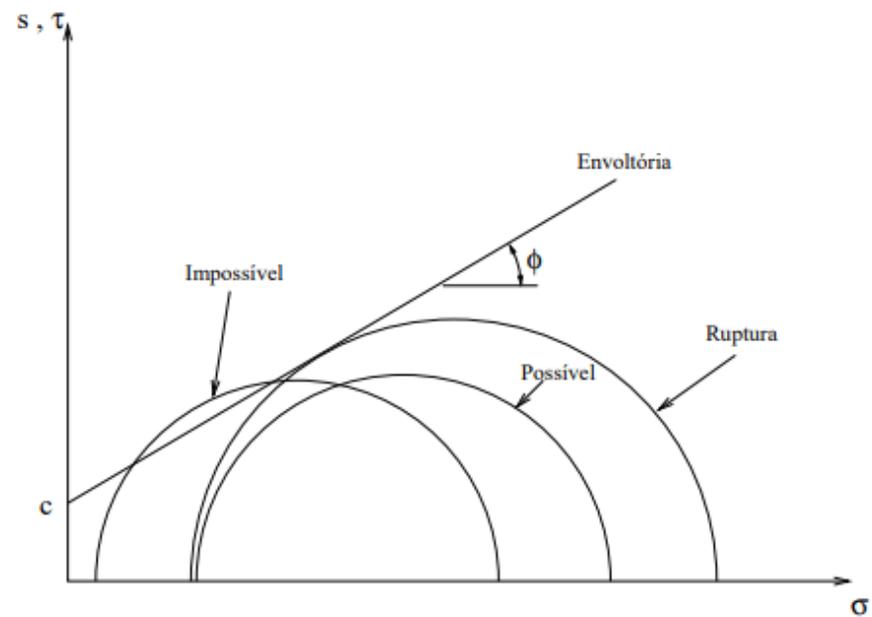
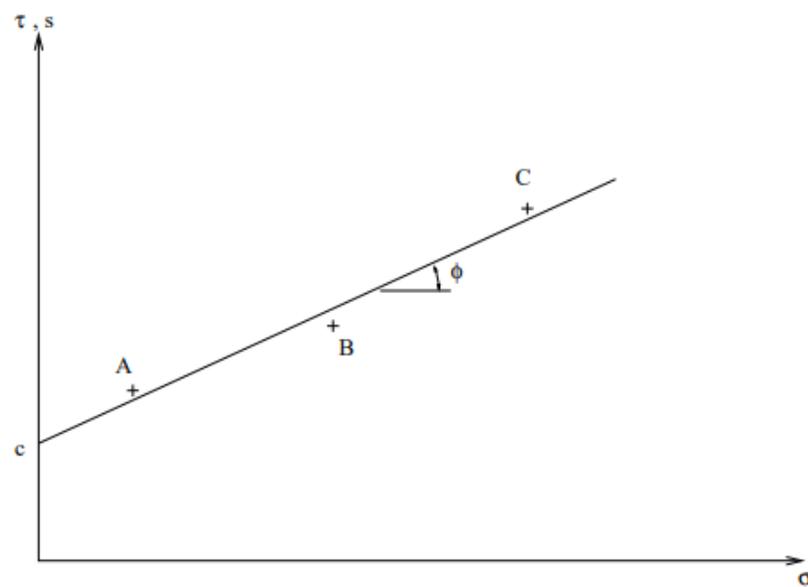
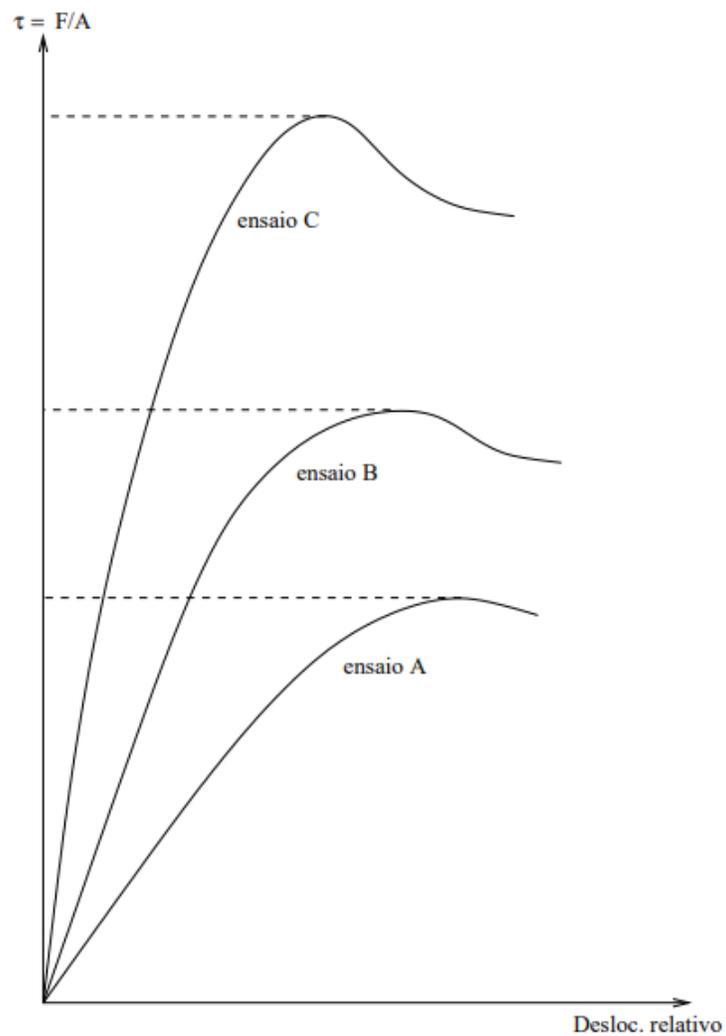
Mohr estabelece: $\tau = f(\sigma)$

$f(\sigma)$: Envoltória de falha

Falha ocorre quando a função experimental tangencia círculo de Mohr

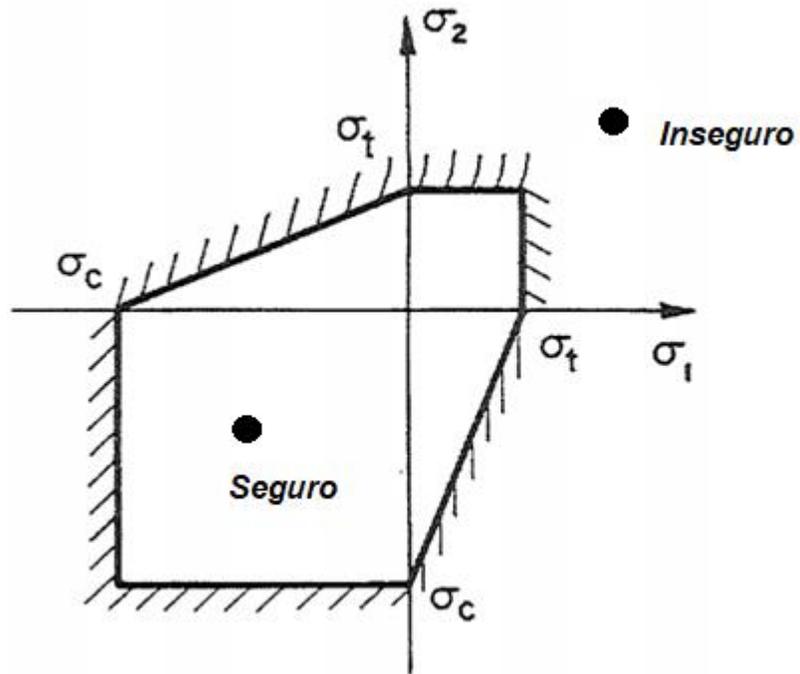


Critério M-C

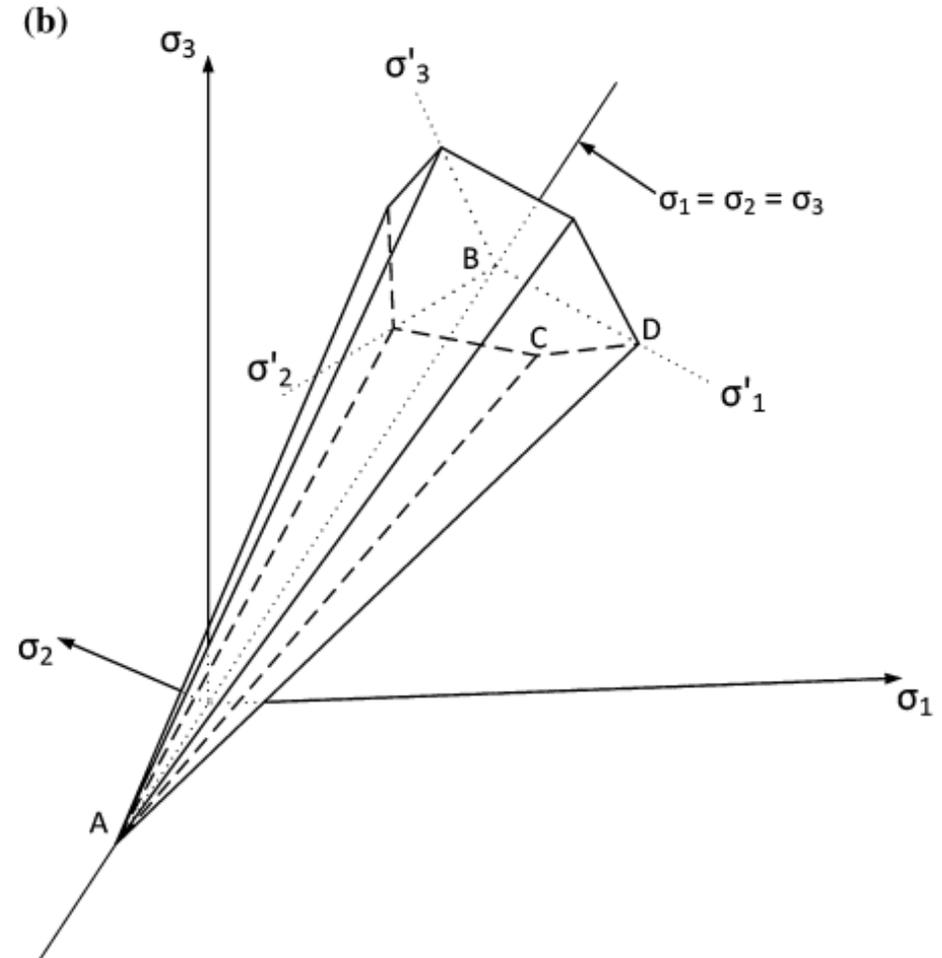


A envoltória de resistência é dada pela reta que mais se aproxima dos pontos de ruptura dos ensaios

Critério de Mohr - Coulomb (M-C)



Representação 2D do critério de M-C



Representação 3D do critério de M-C – superfície piramidal e seção do plano de equipressões