

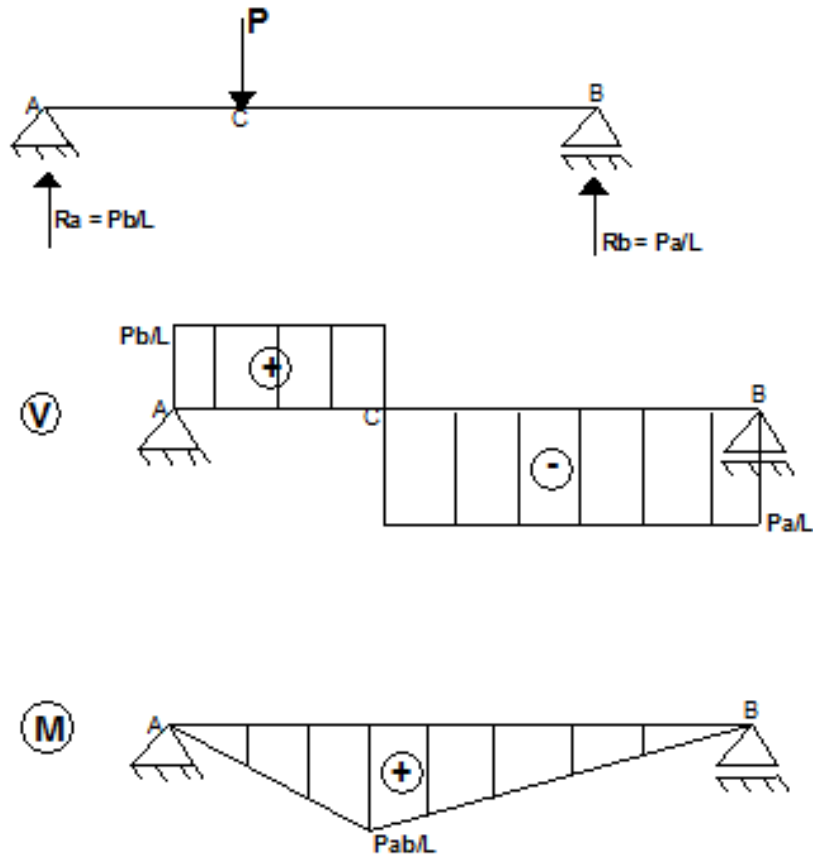
RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

CISALHAMENTO TRANSVERSAL

CISALHAMENTO TRANSVERSAL

**M → Tensão Normal (σ)
(flexão pura)**

V → Tensão Cisalhante (τ)



M e V → Flexão Simples

CISALHAMENTO TRANSVERSAL

$$\sum F_x = 0: \int \sigma_2 dA - \int \sigma_1 dA - \tau_h \cdot t \cdot dx = 0$$

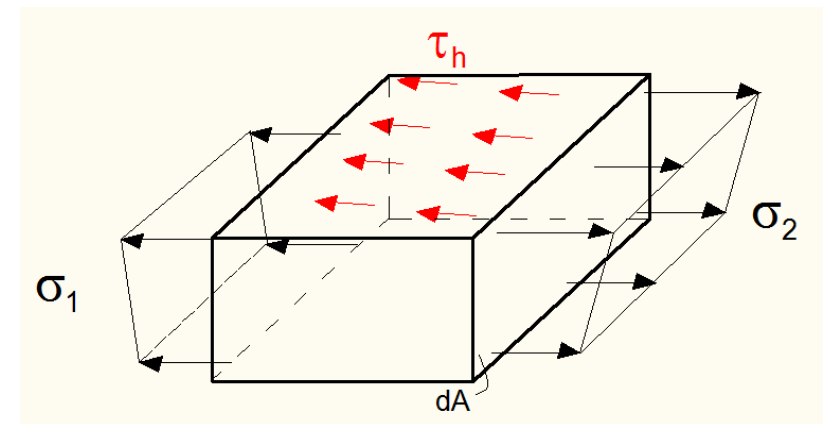
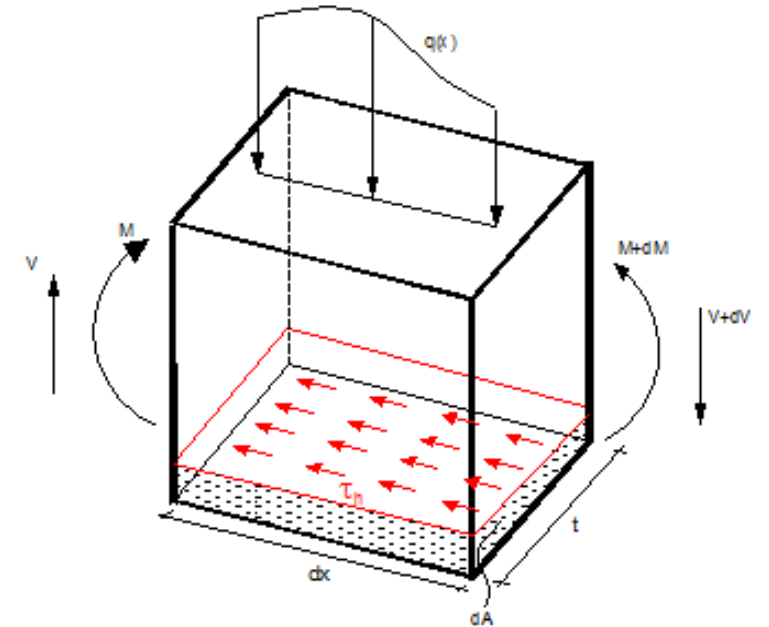
$$\int \frac{(M_z)_2}{I_z} \cdot y dA - \frac{(M_z)_1}{I_z} \cdot y dA = \tau_h \cdot t \cdot dx \rightarrow$$

$$\frac{(M_z)_2 - (M_z)_1}{I_z} \int y dA = \tau_h \cdot t \cdot dx \rightarrow \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{1}{t \cdot I_z} \int y dA = \tau_h \xrightarrow{\frac{dM}{dx} = V} V \cdot \frac{1}{t \cdot I_z} \int y dA = \tau_h$$

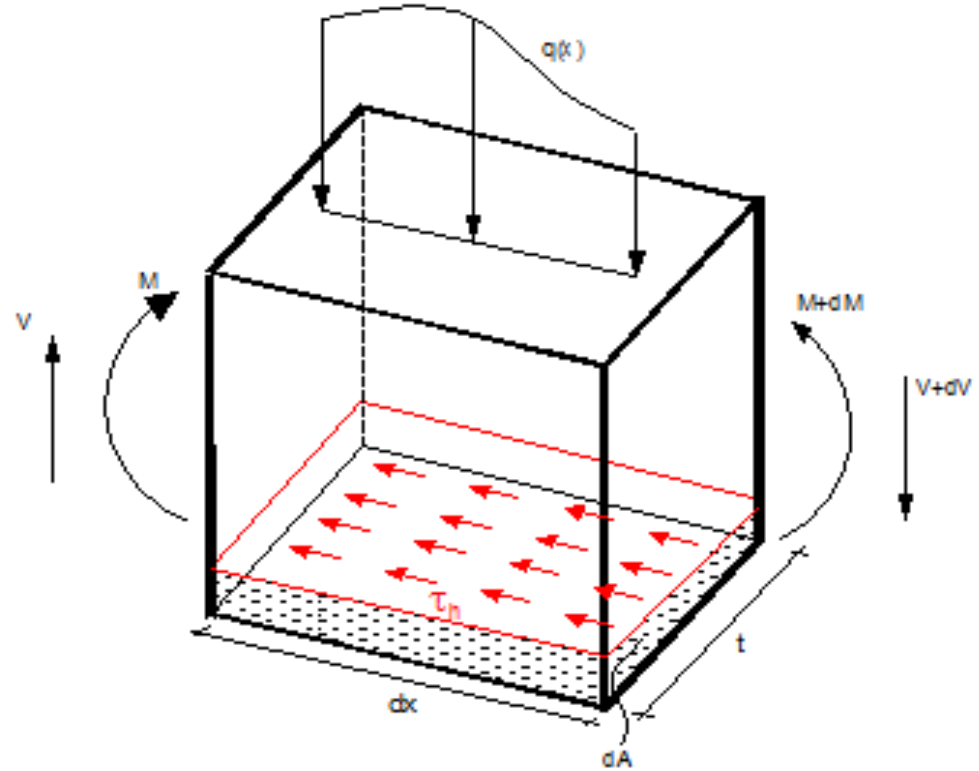
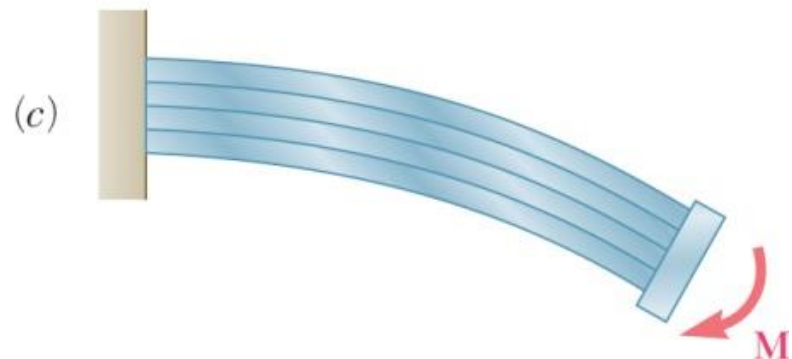
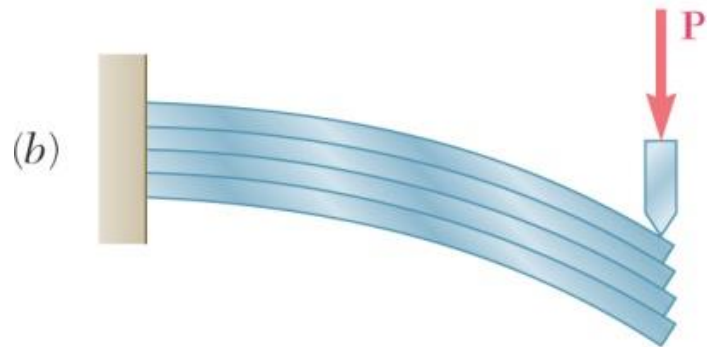
$$\tau_h = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} \xrightarrow{\text{simetria}} \tau_v = \tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$

M_{S_z} momento estático na faixa hachurada

Essa expressão foi primeiramente deduzida por Dmitri Ivánovich Zhuravski e leva seu nome.

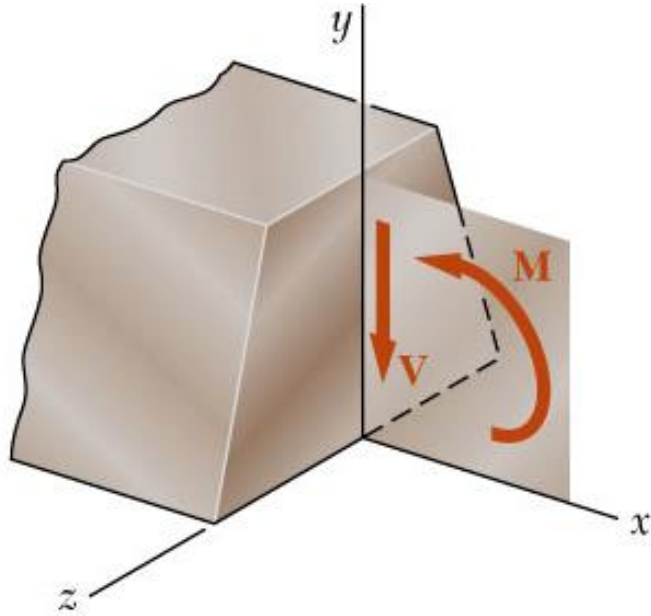


CISALHAMENTO TRANSVERSAL



$$\tau_h = V \cdot \frac{M S_z}{t \cdot I_z}$$

Flexão Simples



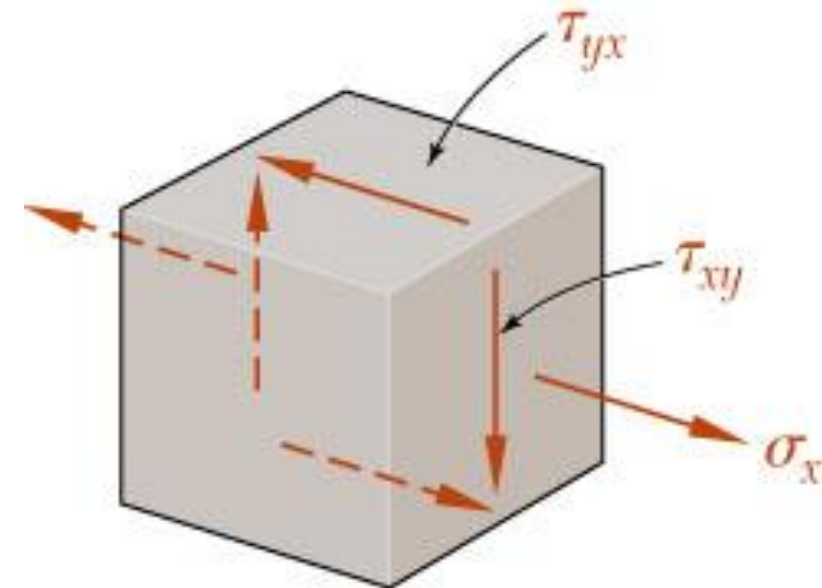
$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

Fórmula da flexão

Expressão de Zhuravski

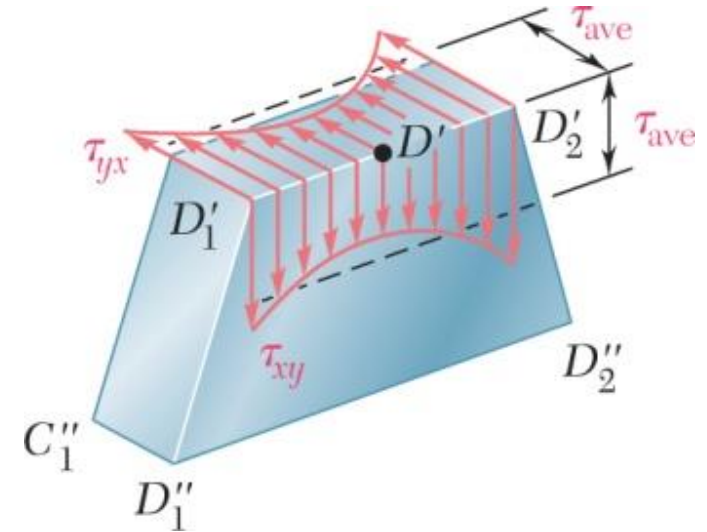
Fórmula do cisalhamento

$$\tau = V \cdot \frac{M S_z}{t \cdot I_z}$$



Validade do uso das tensões cisalhantes médias

$$\tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$



$$b/h = 0,5 \rightarrow \frac{\tau_{real}^{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{e}d}^{m\acute{a}x}} = 1,033 \quad (3,3\%)$$

$$b/h = 1,0 \rightarrow \frac{\tau_{real}^{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{e}d}^{m\acute{a}x}} = 1,126 \quad (12,6\%)$$

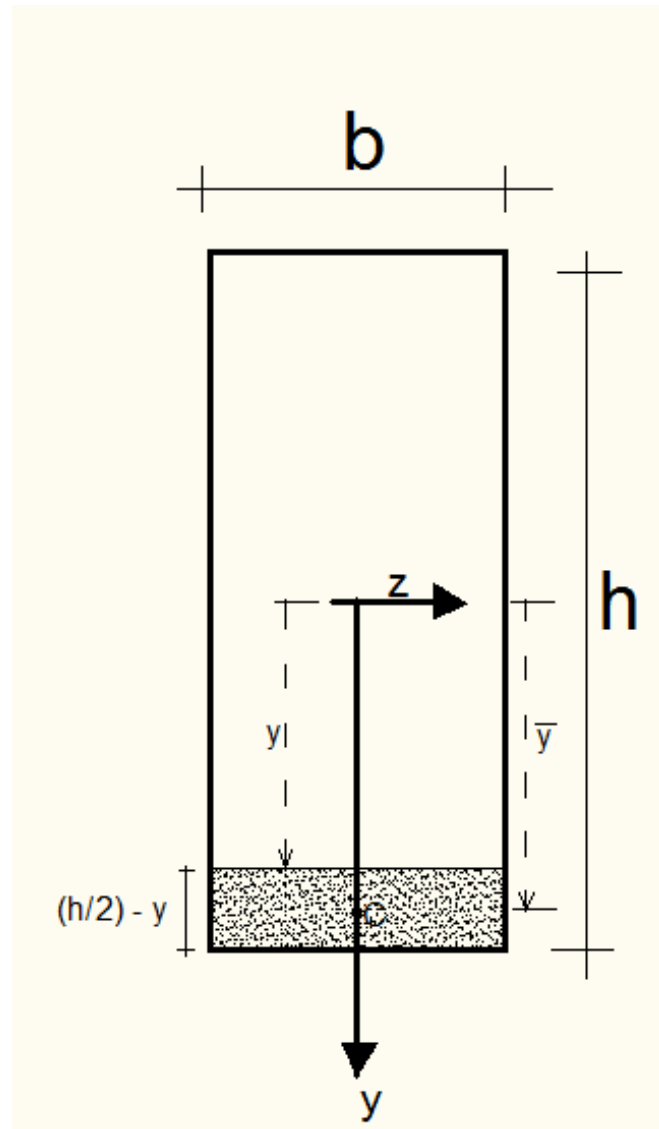
$$b/h = 2,0 \rightarrow \frac{\tau_{real}^{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{e}d}^{m\acute{a}x}} = 1,396 \quad (39,6\%)$$

$$b/h = 4,0 \rightarrow \frac{\tau_{real}^{m\acute{a}x}}{\tau_{m\acute{e}d}^{m\acute{a}x}} = 1,988 \quad (98,8\%)$$

$$\tau_{D_1'} = \tau_{D_2'} = \tau_{D'} \quad \left(\frac{b}{h} < \frac{1}{4} \right)$$

Suficiente para seções finas

Distribuição de Tensões Cisalhantes em seções com trechos retangulares



$$\tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$

$$M_{S_z} = \bar{y} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot b \right]$$

$$\bar{y} = y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$M_{S_z} = \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

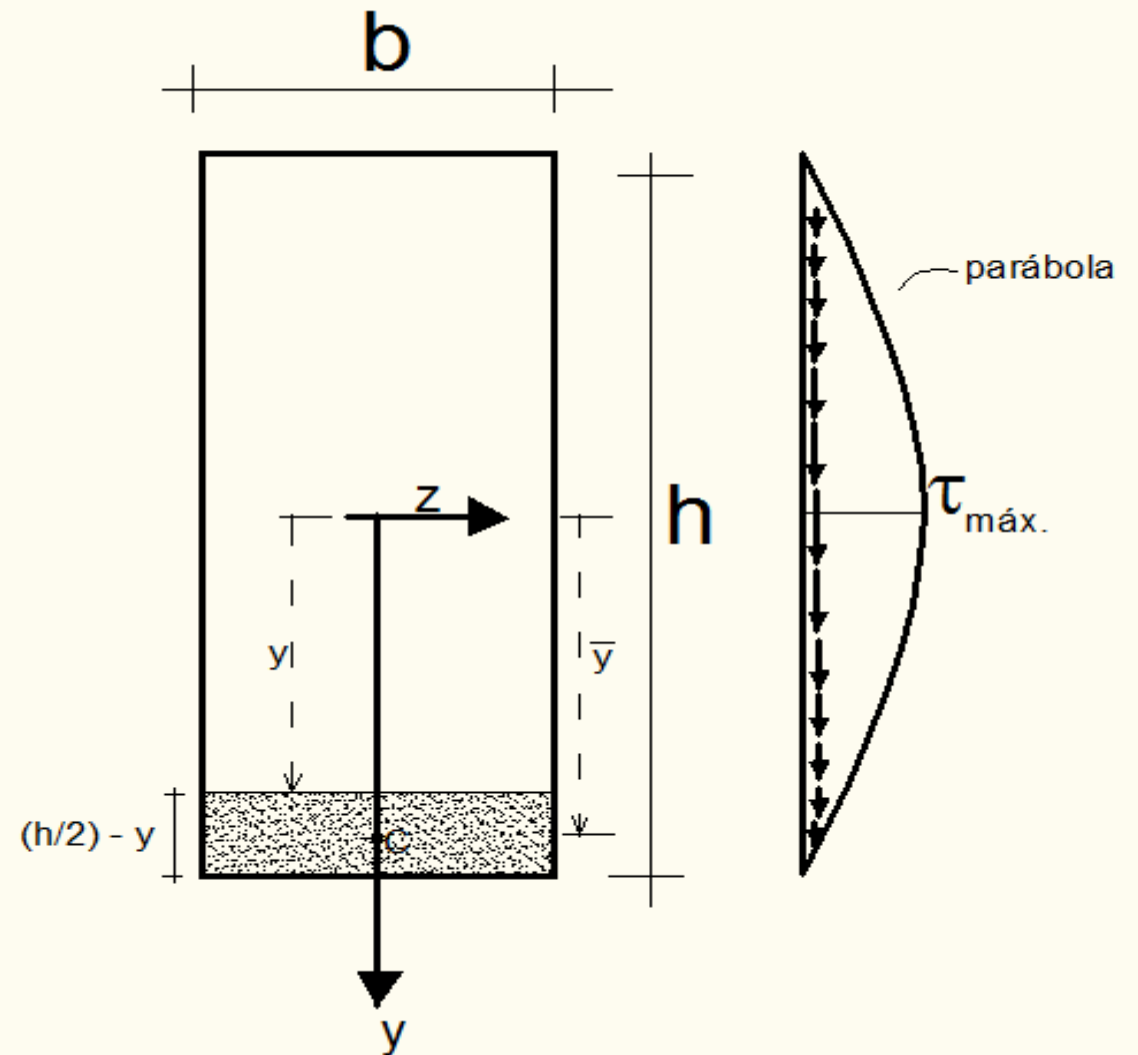
Distribuição de Tensões Cisalhantes em seções com trechos retangulares

$$\tau^c = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z} = \frac{V}{t \cdot b \cdot \frac{h^3}{12}} \cdot \frac{b}{2} \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

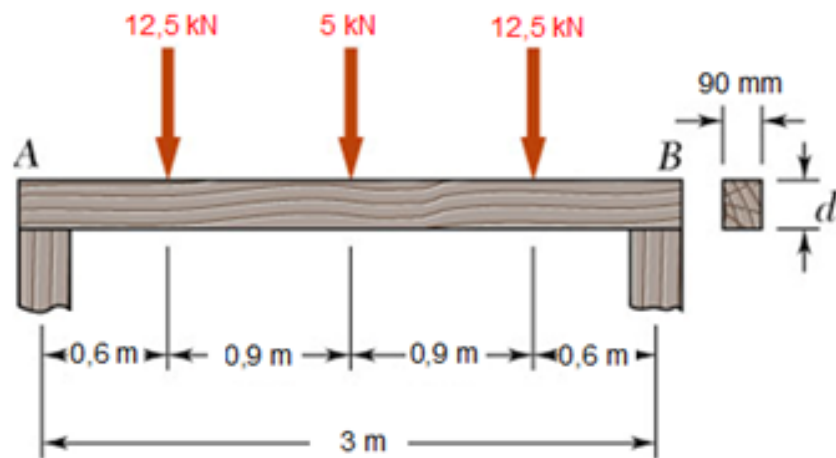
$$\tau(y) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot A} \cdot \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right]$$

$$\tau(y = 0) = \frac{3 \cdot V}{2 \cdot A} \quad (\text{máximo})$$

$$\tau(y = \pm h/2) = 0 \quad (\text{mínimo})$$



Problema Resolvido 13.2



Uma viga de madeira deve suportar três forças concentradas mostradas. Sabendo que para o tipo de madeira utilizada,

$$\sigma_{adm} = 12 \text{ MPa} \quad \tau_{adm} = 0,82 \text{ MPa}$$

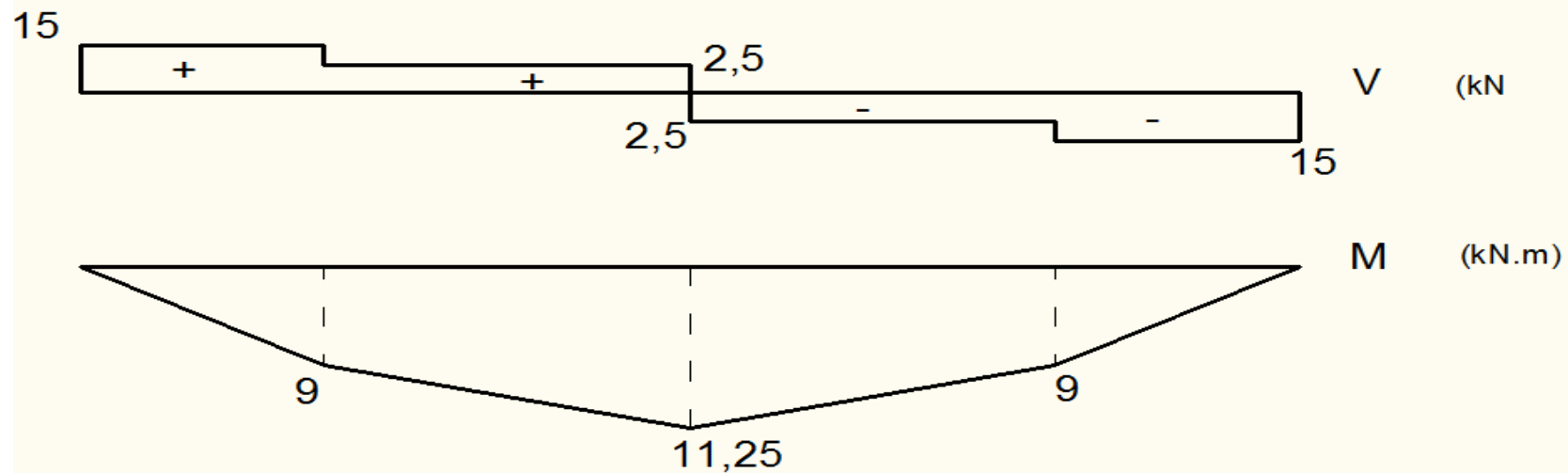
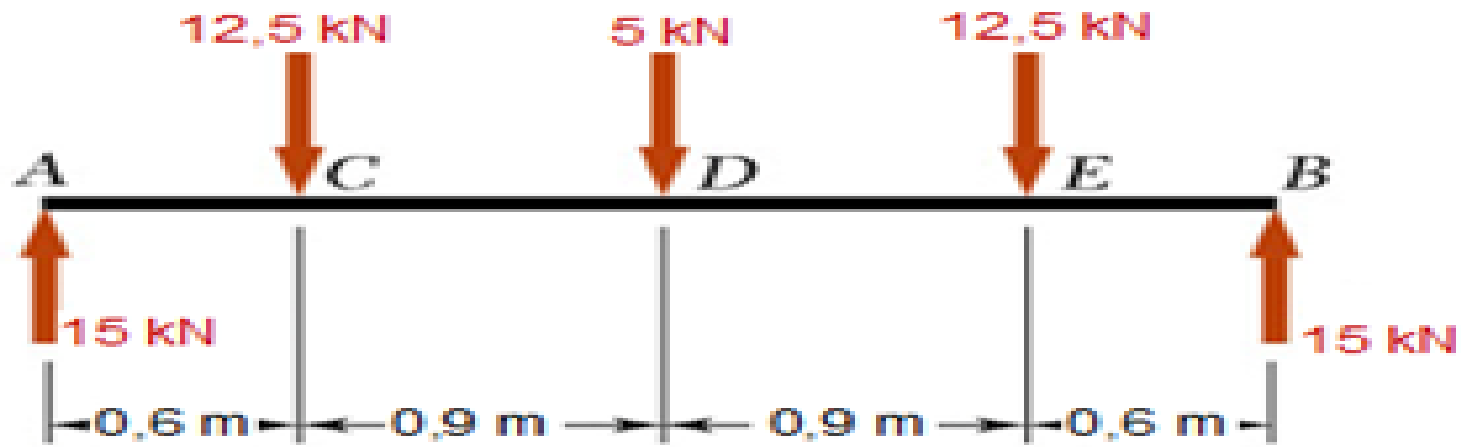
determinar a altura d mínima necessária para a viga.

SOLUÇÃO:

- Desenvolver diagramas de força cortante e momento fletor. Identificar os valores máximos.
- Determinar a altura da viga com base na tensão normal admissível.
- Determinar a altura da viga com base na tensão de cisalhamento admissível.
- Altura da viga exigida é igual à maior das duas alturas encontradas.

EXEMPLO 1

a) Calcular diagrama de esforço cortante e momento fletor



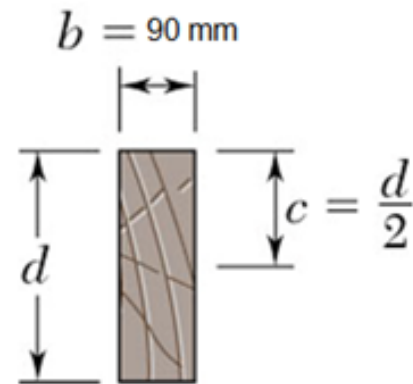
$$V_{\text{máx}} = 15 \text{ kN}$$

$$M_{\text{máx}} = 11,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

EXEMPLO 1

ESTÁTICA E MECÂNICA DOS MATERIAIS

Problema Resolvido 13.2



$$I = \frac{1}{12} b d^3$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{I}{c} = \frac{1}{6} b d^2 \\ &= \frac{1}{6} (0,090\text{m}) d^2 \\ &= (0,015) d^2 \end{aligned}$$

- Determinar a altura da viga com base na tensão normal admissível.

$$\sigma_{adm} = \frac{M_{\max}}{W}$$

$$12 \times 10^3 \text{ kPÁ} = \frac{11,25 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(0,015) d^2}$$

$$d = 0,25 \text{ m}$$

- Determinar a altura da viga com base na tensão de cisalhamento admissível.

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A}$$

$$0,82 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = \frac{3}{2} \frac{15 \text{ kN}}{(0,090 \text{ m}) d}$$

$$d = 0,30 \text{ m}$$

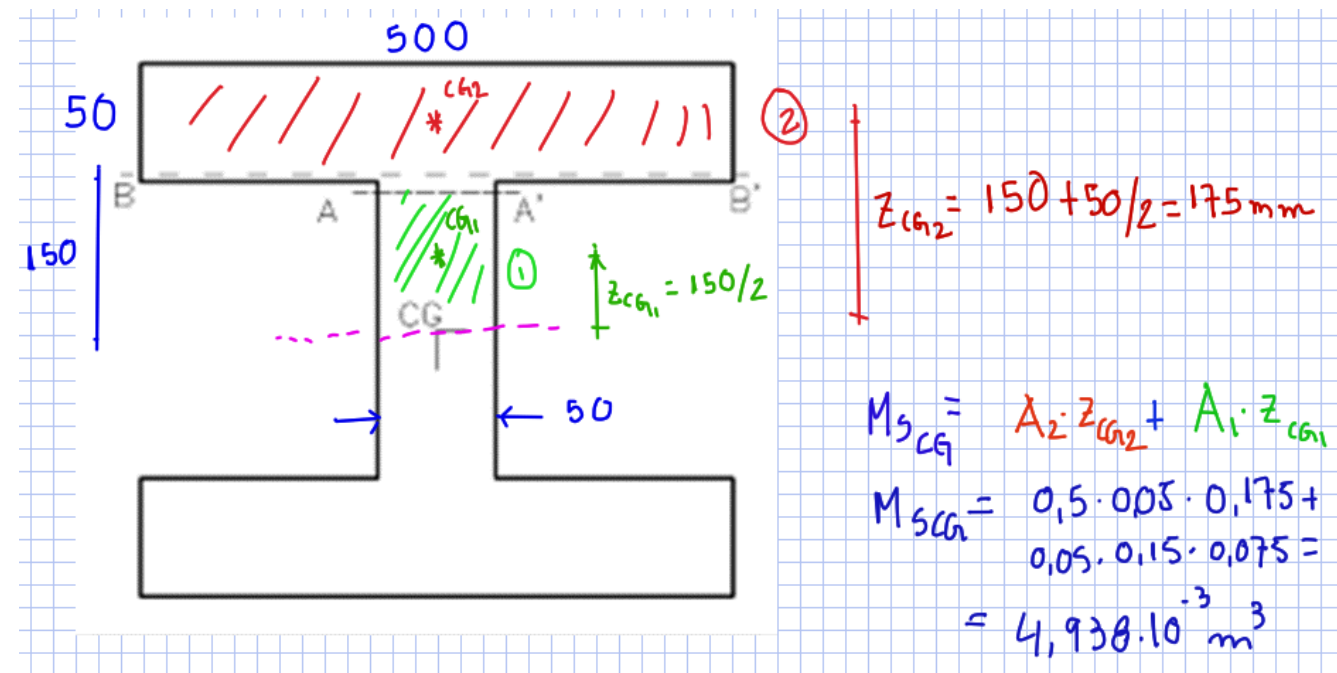
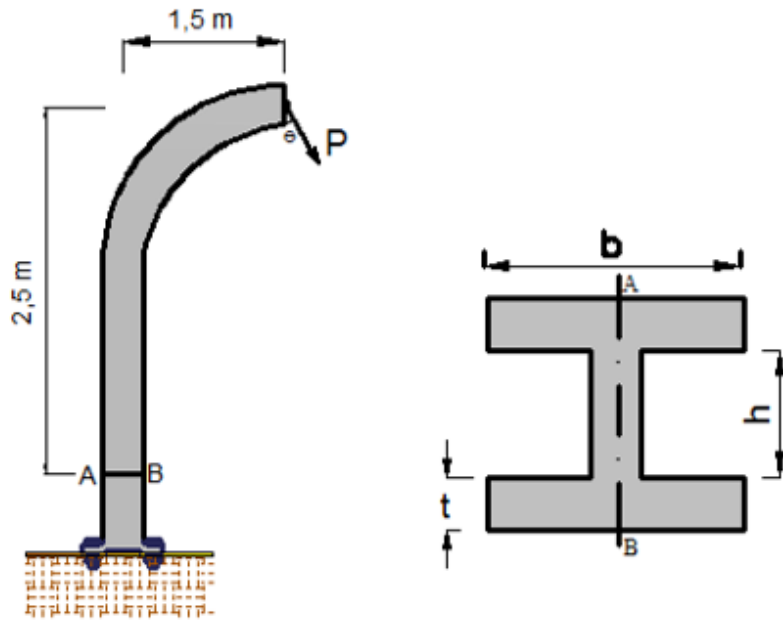
- Altura da viga exigida é igual ao maior dos dois valores.

$$d = 300 \text{ mm}$$

$$\tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$

EXEMPLO 2

4.4.8) O poste da Figura 4.24 é engastado no solo e tem uma força concentrada devido ao peso dos cabos de energia elétrica de $P = 5 \text{ kN}$, de modo a estar atuando no seu plano médio, inclinado com a vertical em um ângulo de $\theta = 30^\circ$. A força P e as cotas das distâncias estão com referência ao centroide da ST. Adote, $b = 500 \text{ mm}$, $h = 300 \text{ mm}$, $t = 50 \text{ mm}$. Obtenha a distribuição da tensão cisalhante na ST de AB.



EXEMPLO 2

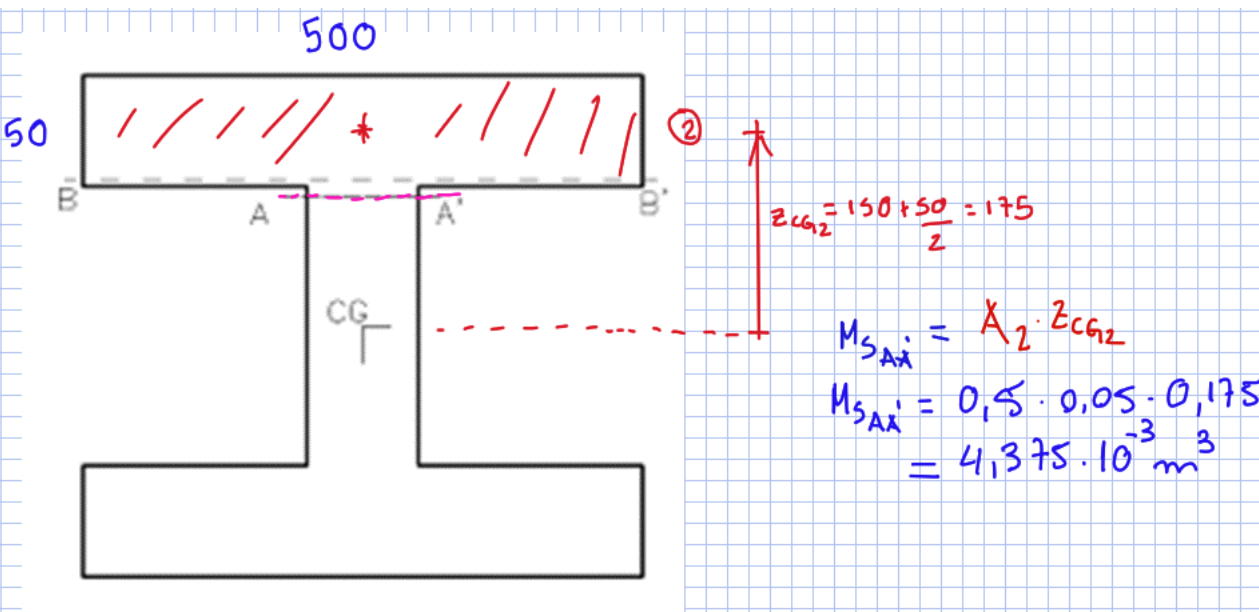
Fazendo a decomposição da força, na seção AB o cortante é dado por $V = 2,5$ kN.

$$\tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$

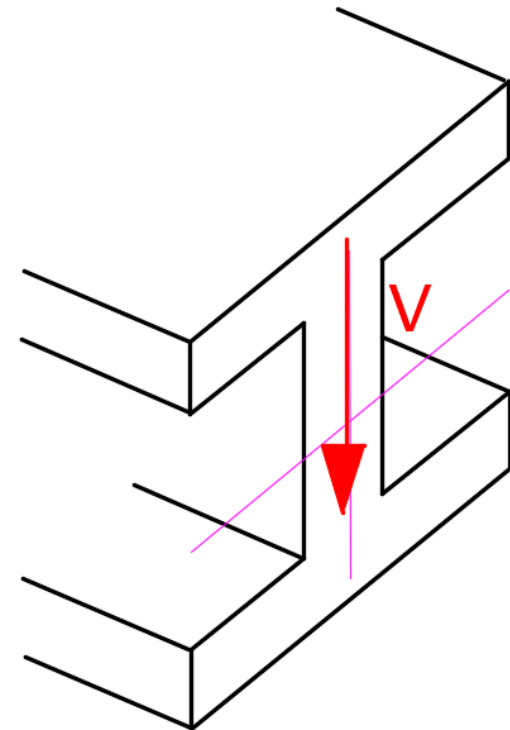
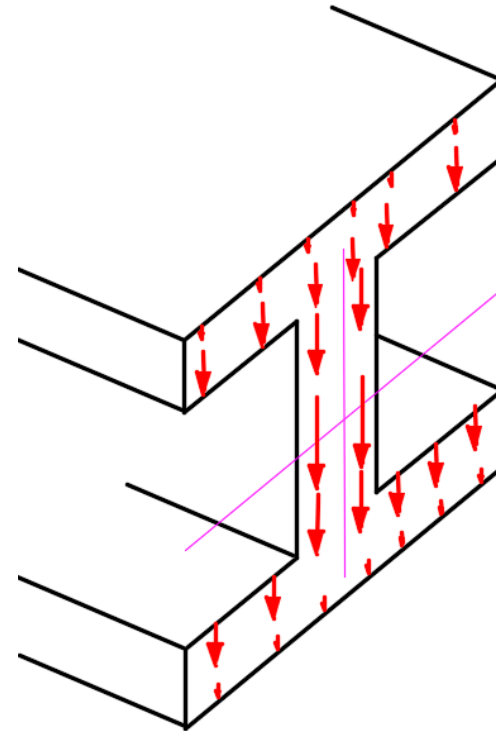
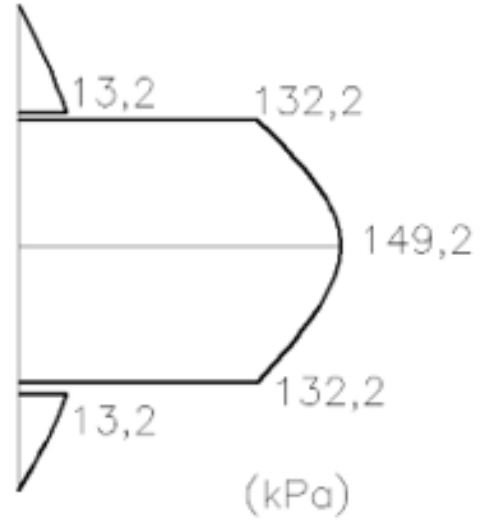
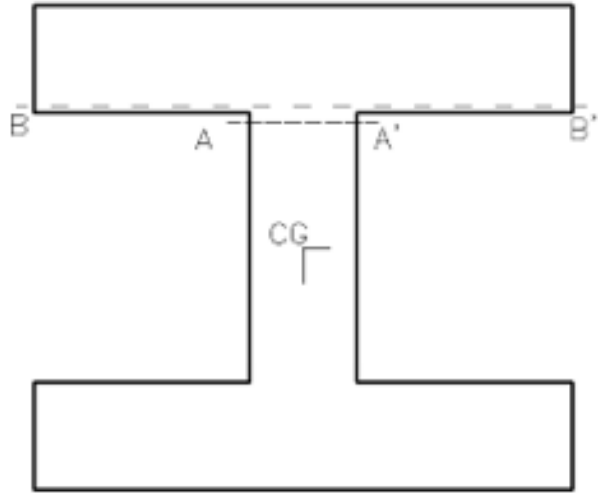
$$\tau_{CG} = \frac{V \cdot Q_{ZCG}}{t \cdot I_z} = \frac{2,5 \cdot 4,937 \cdot 10^{-8}}{0,05 \cdot 1,654 \cdot 10^{-8}} = 149,2 \text{ kPa};$$

$$\tau_{AA'} = \frac{2,5 \cdot 4,375 \cdot 10^{-8}}{0,05 \cdot 1,654 \cdot 10^{-8}} = 132,2 \text{ kPa}$$

$$\tau_{BB'} = \frac{2,5 \cdot 4,375 \cdot 10^{-8}}{0,5 \cdot 1,654 \cdot 10^{-8}} = 13,2 \text{ kPa}$$

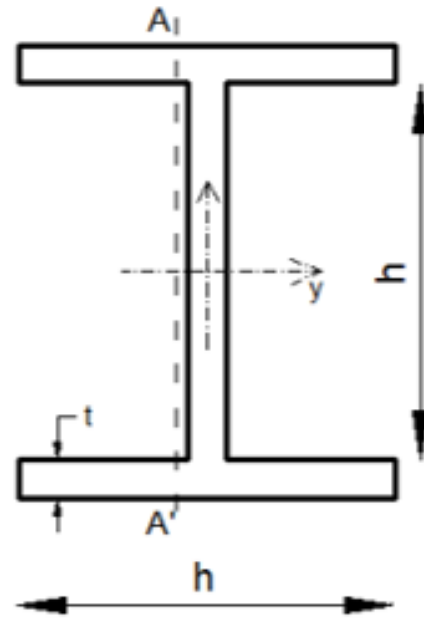
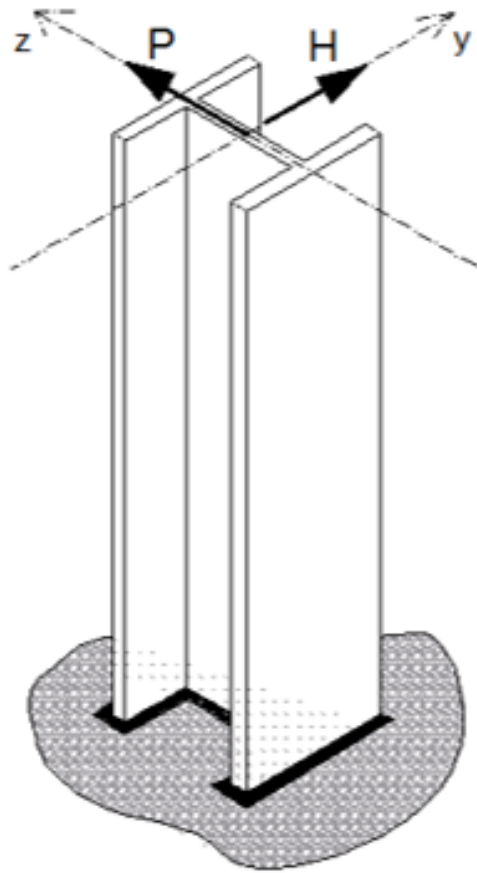


EXEMPLO 2

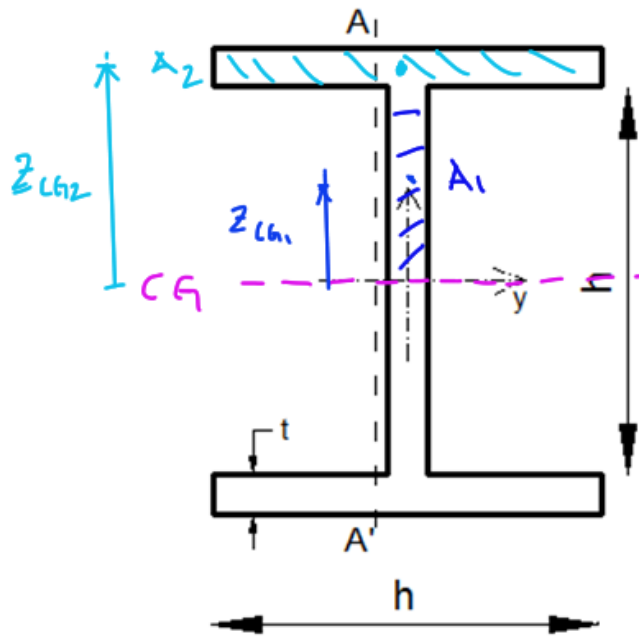


EXEMPLO 3

4.4.9) Para o pilar da Figura 4.25, sabe-se que as forças atuam paralelas aos eixos indicados e passam pelo centroide da seção. Sabendo que o material possui $\bar{\tau} = 10 \text{ MPa}$, $h = 80 \text{ mm}$ e $t = 10 \text{ mm}$, obtenha os máximos valores de P e H .

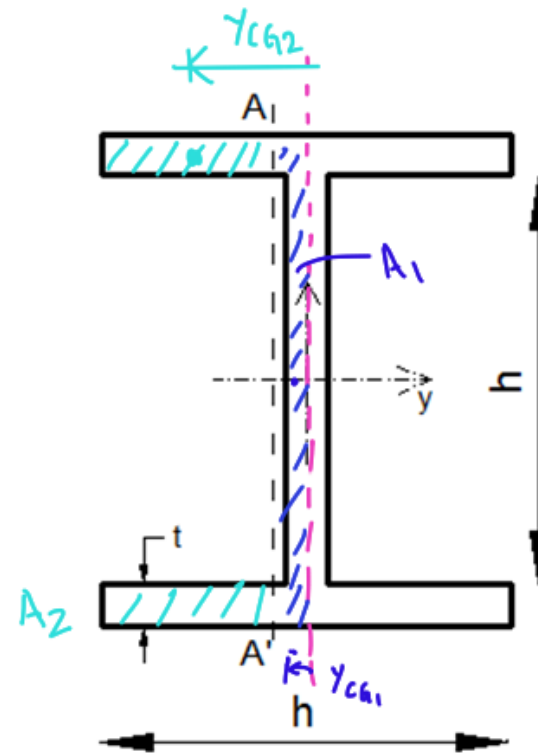


EXEMPLO 3



$$M_{SCGy} = A_1 \cdot z_{CG1} + A_2 \cdot z_{CG2}$$

$$M_{SCGy} = 414.000 \text{ mm}^3$$



$$M_{SCz} = A_1 \cdot y_{CG1} + A_2 \cdot y_{CG2}$$

$$M_{SCz} = 17.000 \text{ mm}^3$$

EXEMPLO 3

Os momentos de inércia em relação ao seu centroide são: $I_x = 8,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$, $I_y = 3,68 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Os momentos estáticos são: $Q_{ZCG} = 17 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$, $Q_{ZAA'} = 15,75 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ e $Q_{YCG} = 44 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$. A determinação da força admissível na direção y

$$\text{é dada por: } \tau_{YCG} = \frac{P \cdot Q_{YCG}}{t_y \cdot I_y} = \frac{P \cdot 44 \cdot 10^{-6}}{0,01 \cdot 3,68 \cdot 10^{-6}} \leq \bar{\tau} = 10 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 8,4 \text{ kN}$$

A determinação da força admissível na direção z é dada pela verificação no centroide e na

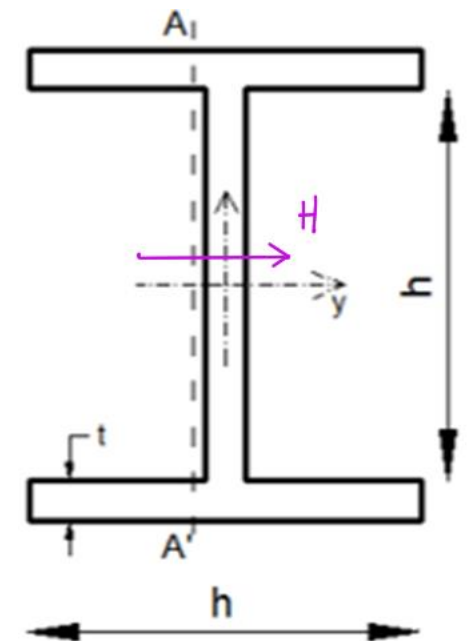
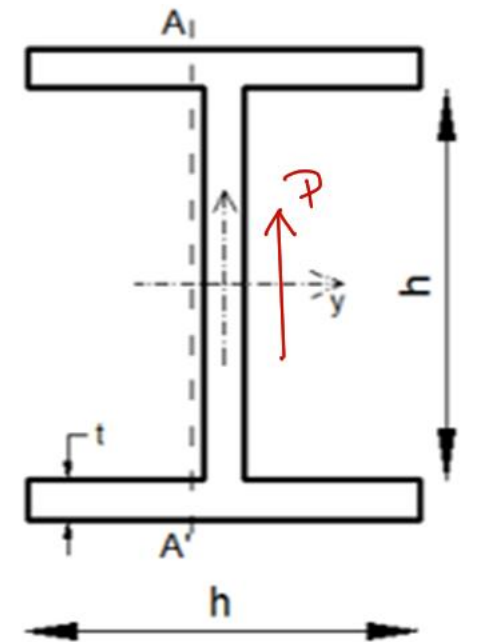
$$\text{seção AA': } \tau_{ZCG} = \frac{H \cdot Q_{ZCG}}{t_z \cdot I_z} = \frac{H \cdot 17 \cdot 10^{-6}}{0,1 \cdot 8,6 \cdot 10^{-7}} \leq \bar{\tau} = 10 \cdot 10^3$$

$$\rightarrow H \leq 50,6 \text{ kN}$$

$$\tau_{ZAA'} = \frac{H \cdot Q_{ZAA'}}{t_z \cdot I_z} = \frac{H \cdot 15,75 \cdot 10^{-6}}{0,02 \cdot 8,6 \cdot 10^{-7}} \leq \bar{\tau} = 10 \cdot 10^3 \rightarrow H \leq 10,9 \text{ kN}$$

$$\text{Portanto: } P_{\max} = 8,4 \text{ kN}$$

$$H_{\max} = 10,9 \text{ kN}$$



EXEMPLO 4

4.4.2) Para certa estrutura, sua seção transversal é a indicada na Figura 4.18. Sabendo que seu momento crítico é de $M_z = P$ e o cortante crítico é de $V_y = V = P$, unidades em kN e m. Determine o máximo valor de P de modo a atender as tensões admissíveis normal e cisalhante. Dados: $b_1 = 100 \text{ mm}$, $b_2 = 200 \text{ mm}$, $\sigma_{adm} = 300 \text{ MPa}$ e $\tau_{adm} = 5 \text{ MPa}$

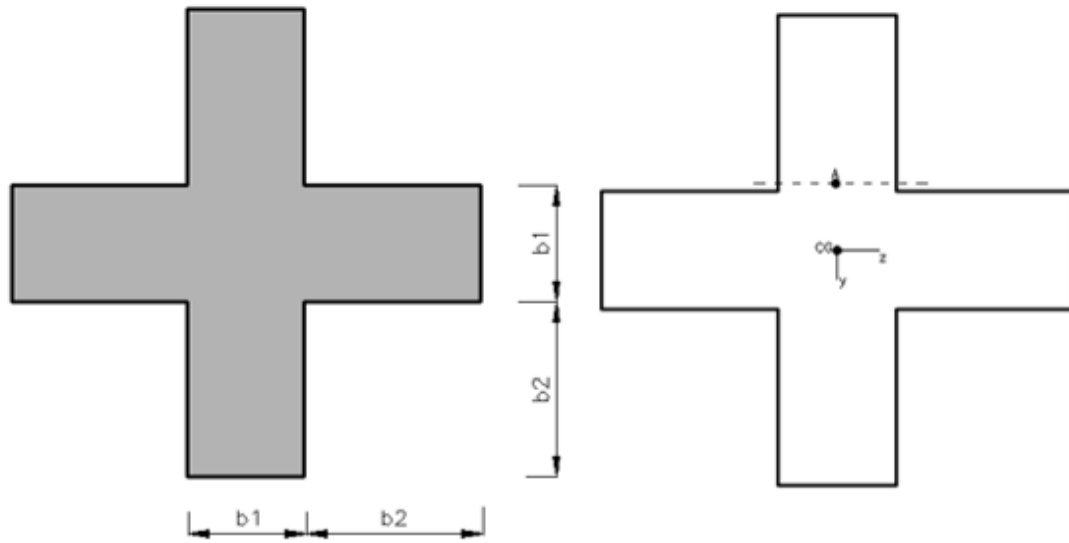


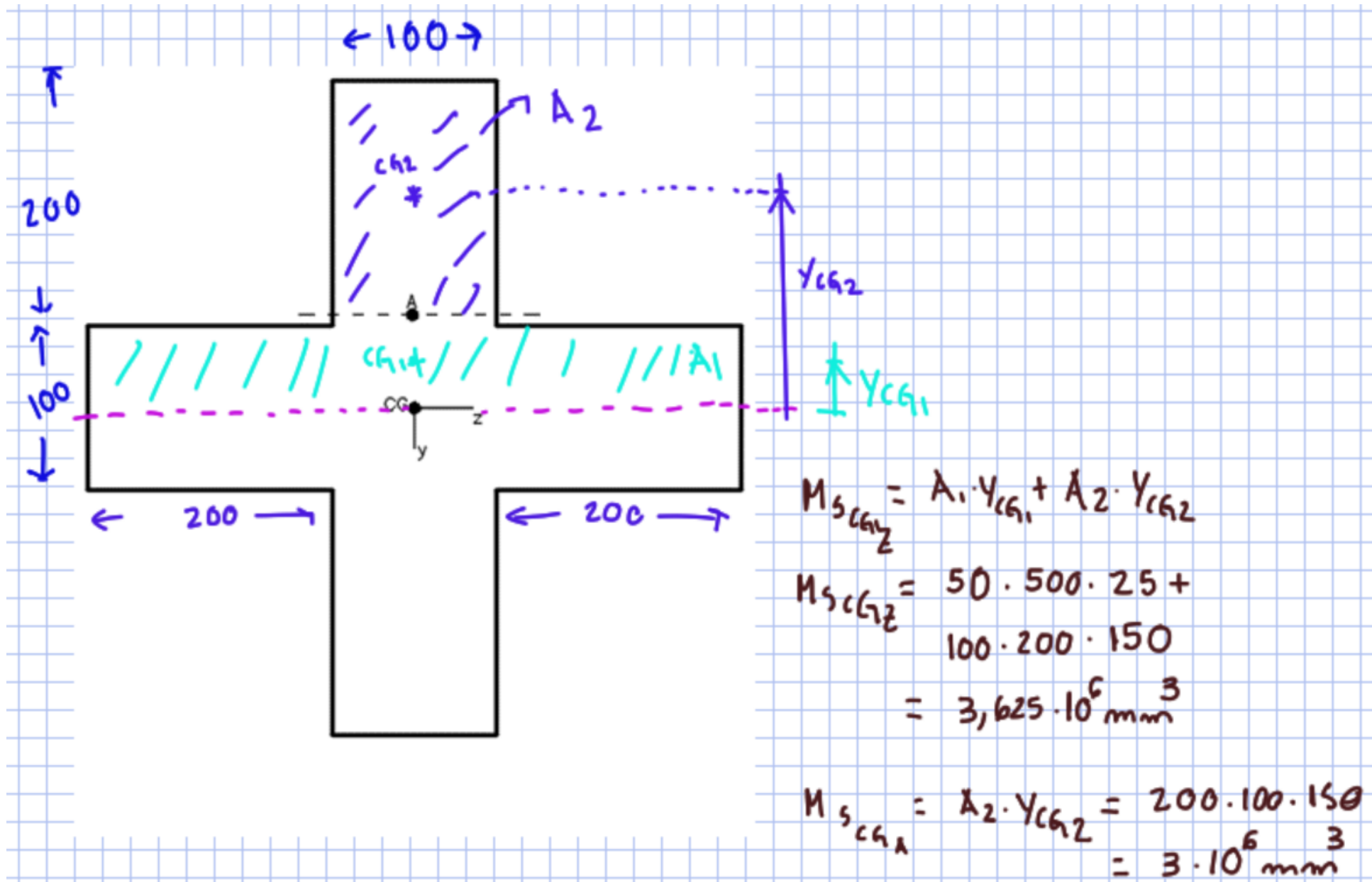
Figura 4.18 – a) Seção transversal do tipo cruciforme. b) Posição para cálculo da tensão cisalhante.

Resolução:

$$I_{ZCG} = 2 \cdot \left[\frac{100 \cdot 200^3}{12} + 150^2 \cdot 100 \cdot 200 \right] + \left[\frac{500 \cdot 100^3}{12} \right] = 1,075 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$Q_{ZA} = 150 \cdot 100 \cdot 200 = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

EXEMPLO 4



EXEMPLO 4

$$\sigma_{inf} = \frac{M \cdot y_{\square}}{I_z} = \frac{M \cdot (0,25)}{1,075 \cdot 10^{-3}} \leq 300 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 1.290 \text{ kN}$$

Fórmula da flexão

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$$\tau_{CG} = \frac{V \cdot Q_{zcg}}{t \cdot I_z} = \frac{P \cdot (3,625 \cdot 10^{-3})}{0,5 \cdot 1,075 \cdot 10^{-3}} \leq 5 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 741,4 \text{ kN}$$

$$\tau_A = \frac{V \cdot Q_{za}}{t \cdot I_z} = \frac{P \cdot (3 \cdot 10^{-3})}{0,1 \cdot 1,075 \cdot 10^{-3}} \leq 5 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 179,2 \text{ kN}$$

$$\therefore P_{max} = 179,2 \text{ kN}$$

Fórmula da cisalhamento

$$\tau = V \cdot \frac{M_{S_z}}{t \cdot I_z}$$

Trabalho de cisalhamento

Entrega 11/06