Treliças
Quadros espaciais
Rótulas em estruturas planas

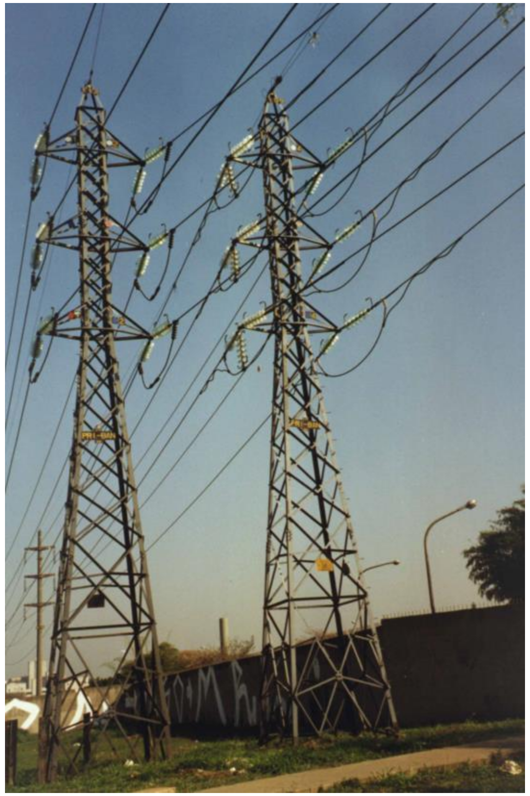
Valério S. Almeida

Maio/2021

TRELIÇAS

Treliça: uma das principais estruturas na engenharia

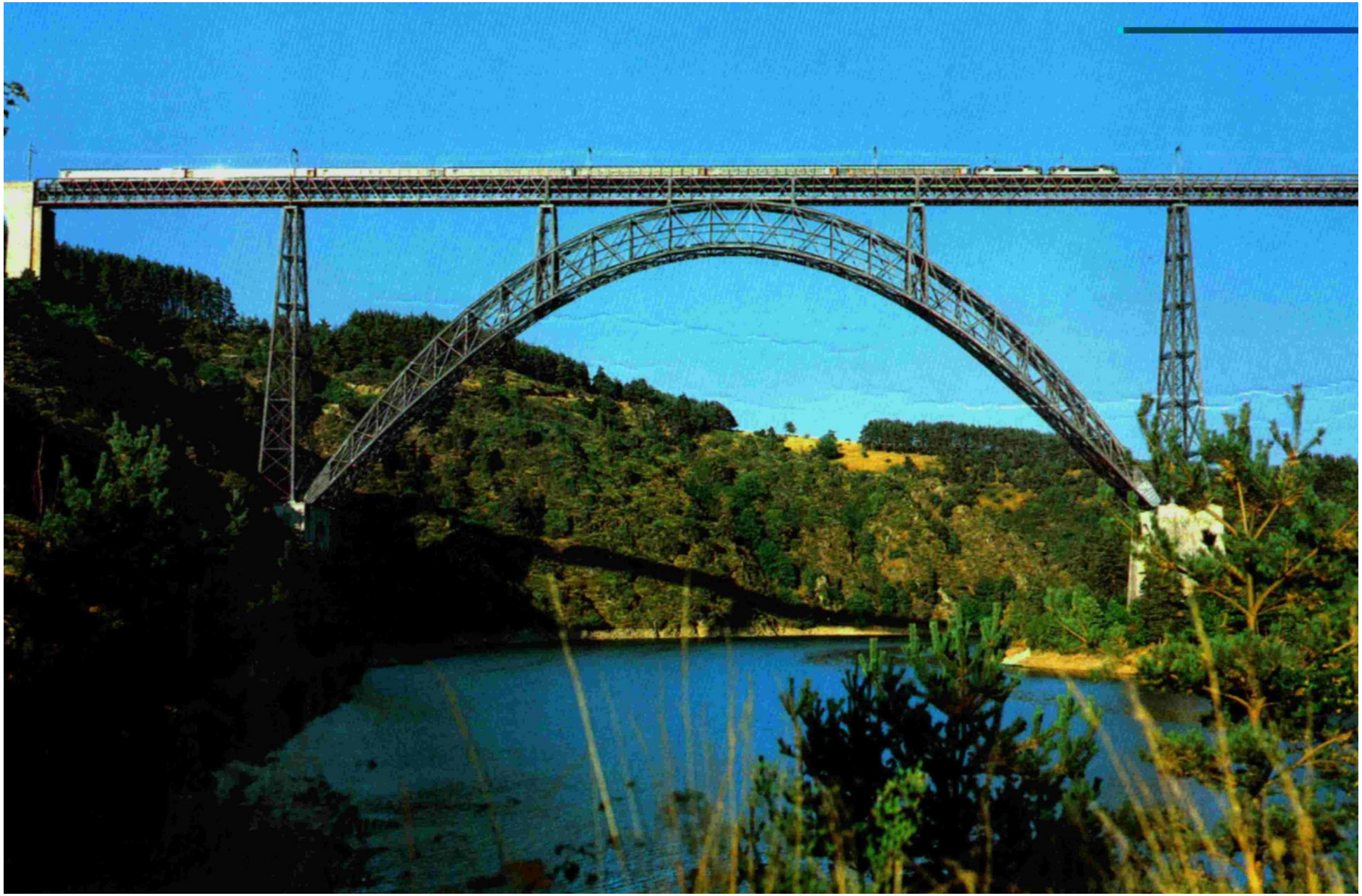
Solução prática econômica



Pontes

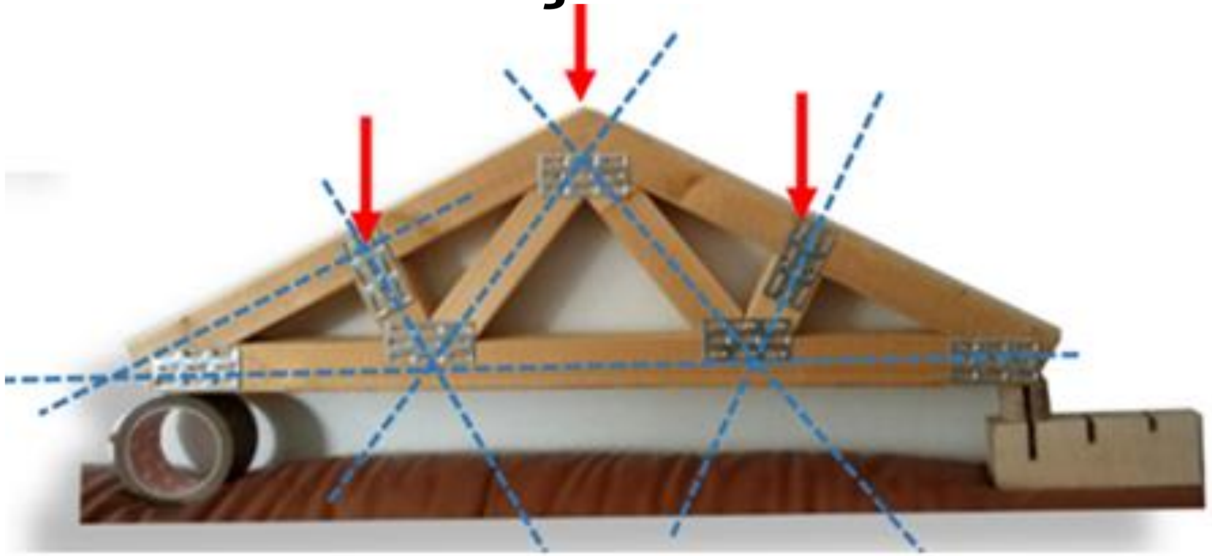
Coberturas

Torres

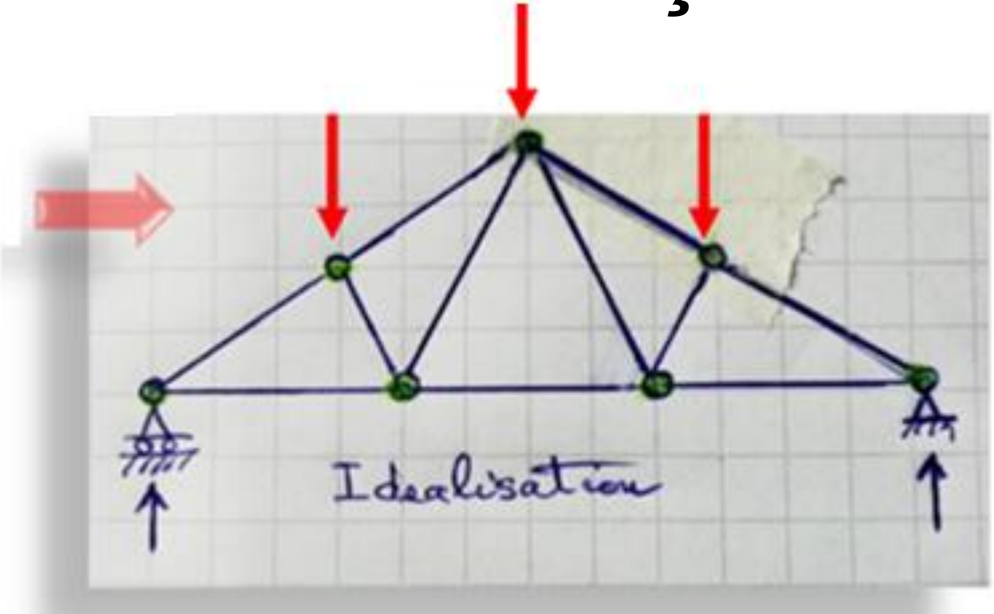



Jätkäsaari, 10.9.2017, DBA

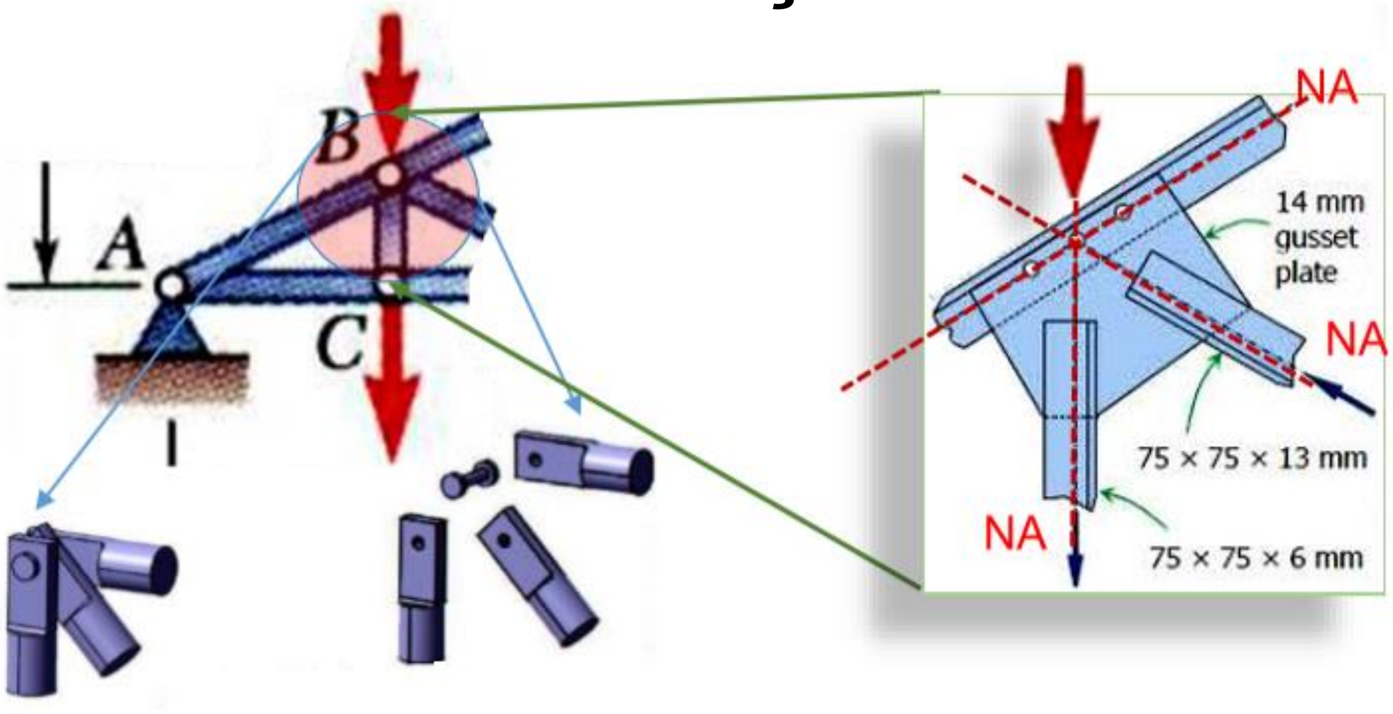
TRELIÇAS IDEAL

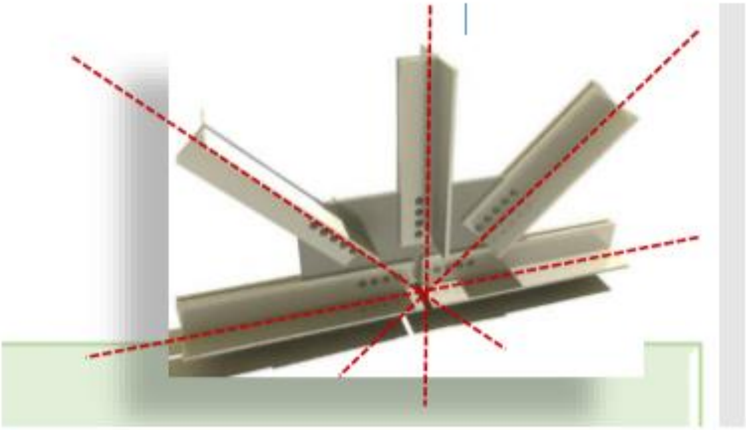


Idealização



LIGAÇÃO





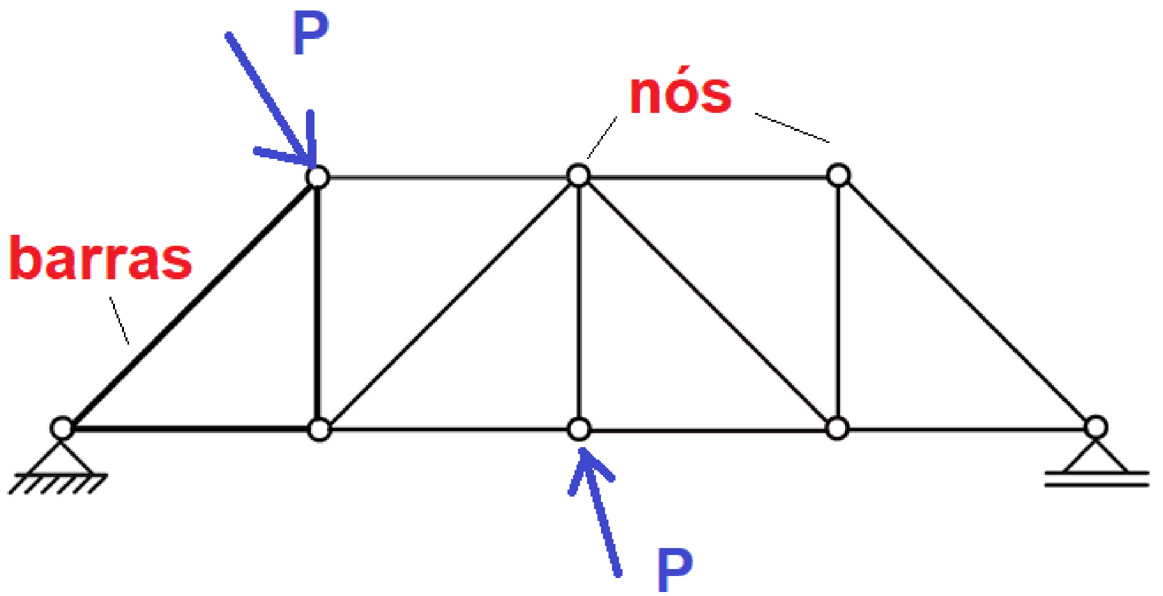
TRELIÇAS

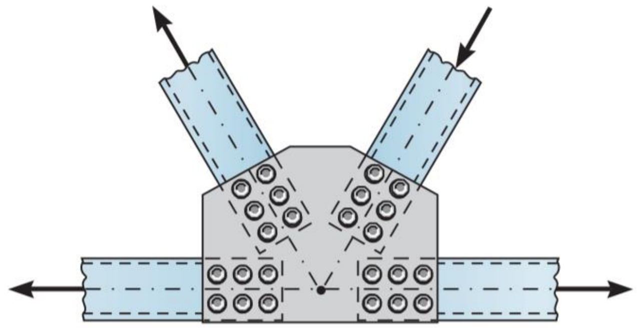
Formadas: barras conectadas por nós

Estruturas com forças somente em nós

Barras esbeltas e retas

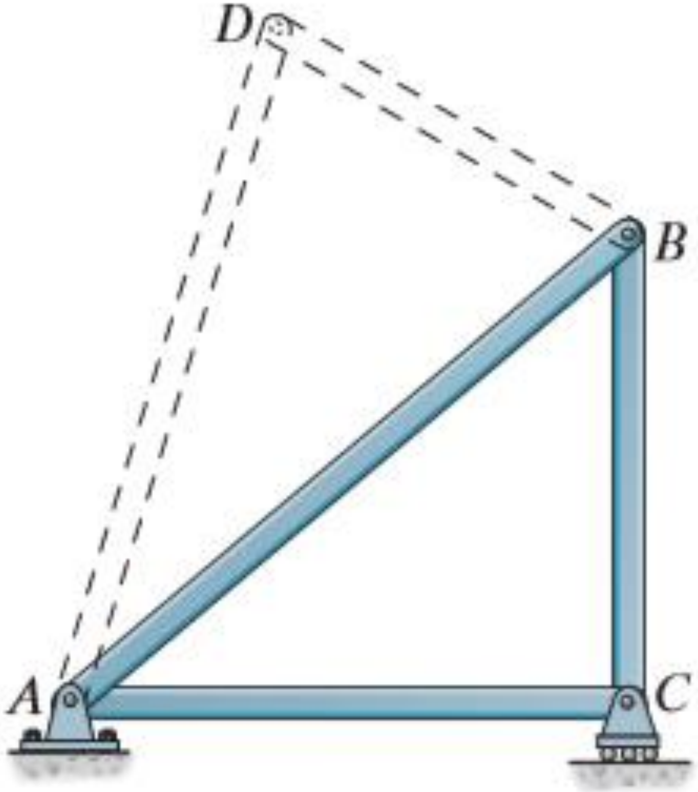
Lei de formação básica: triângulos

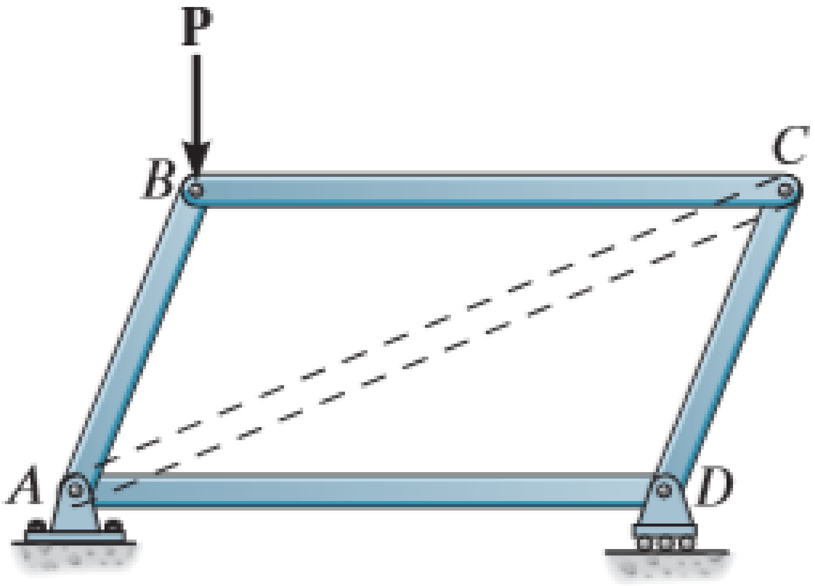




nó

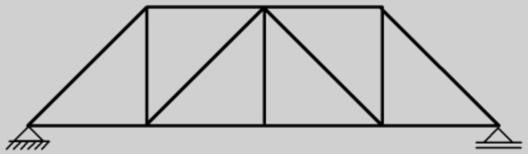
TRELIÇAS - FORMAÇÃO



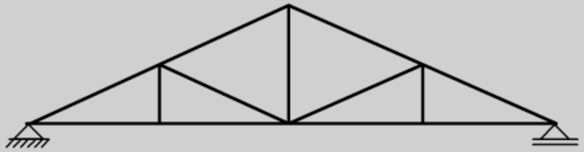


TRELIÇAS - FORMAÇÃO

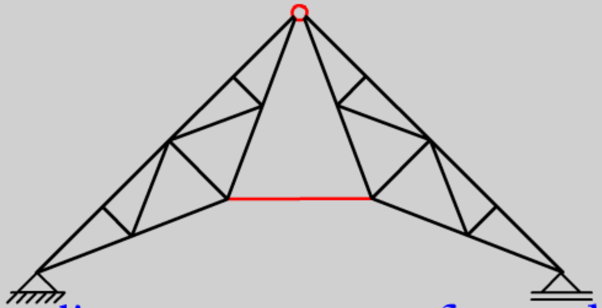
Métodos de formação de treliças



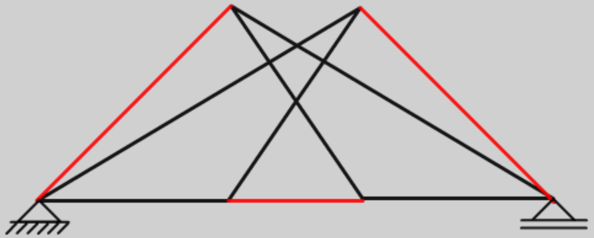
treliça simples utilizada em pontes



treliça simples utilizada em coberturas



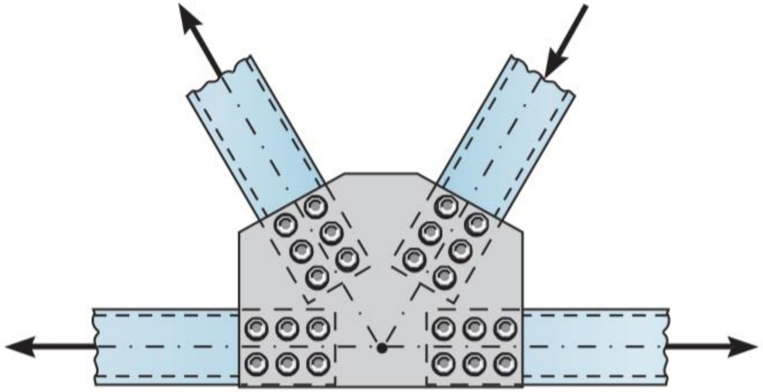
treliças compostas formadas a partir da união de duas treliças simples por meio de um nó comum e uma barra

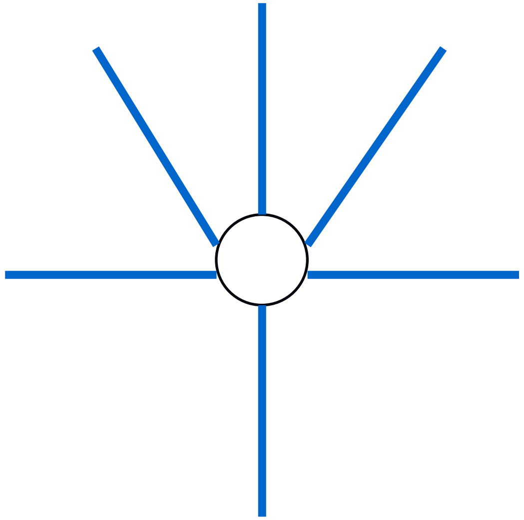


treliças compostas formadas a partir da união de duas treliças simples por meio de três barras

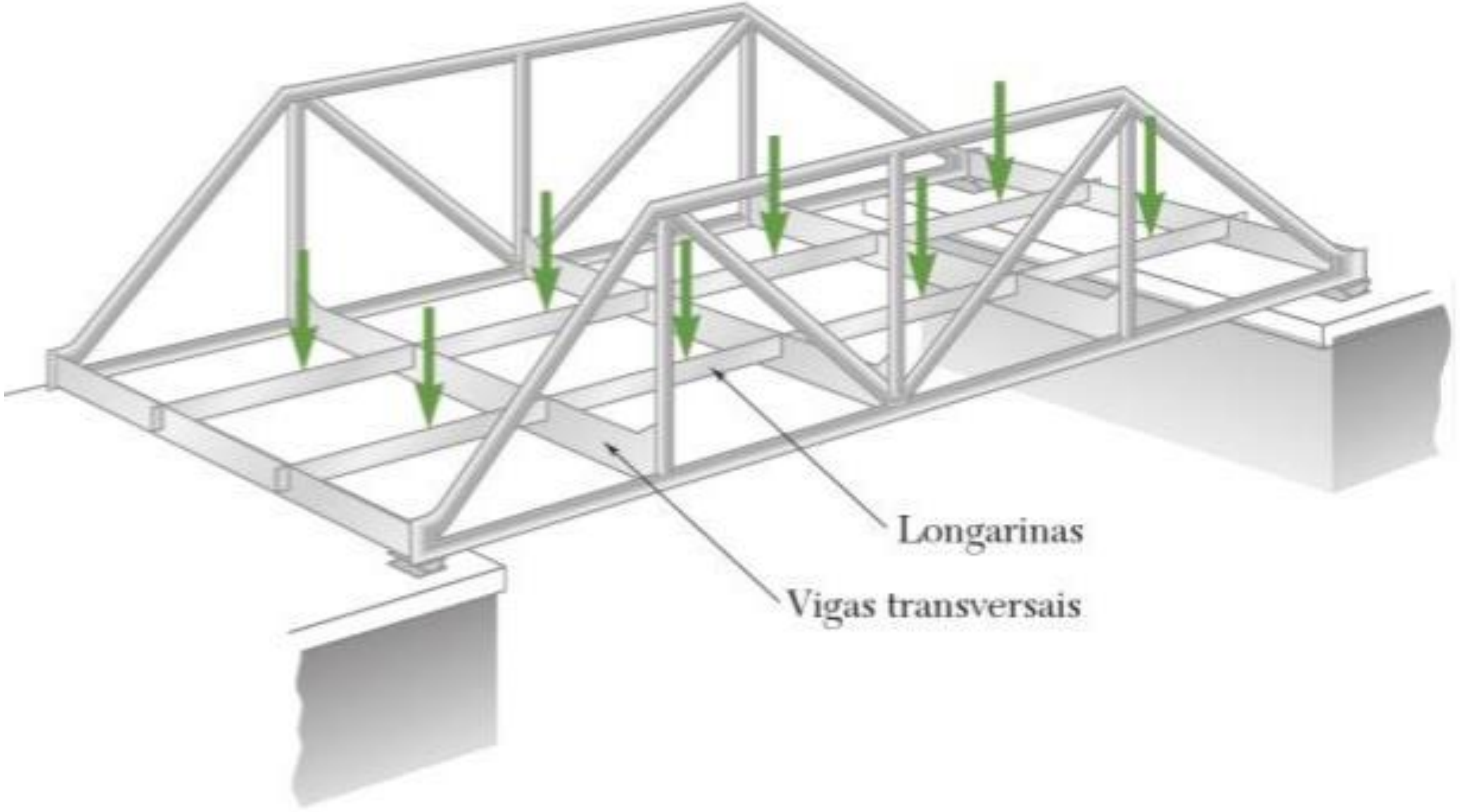
TRELIÇAS - LIGAÇÕES

Ligações: nós

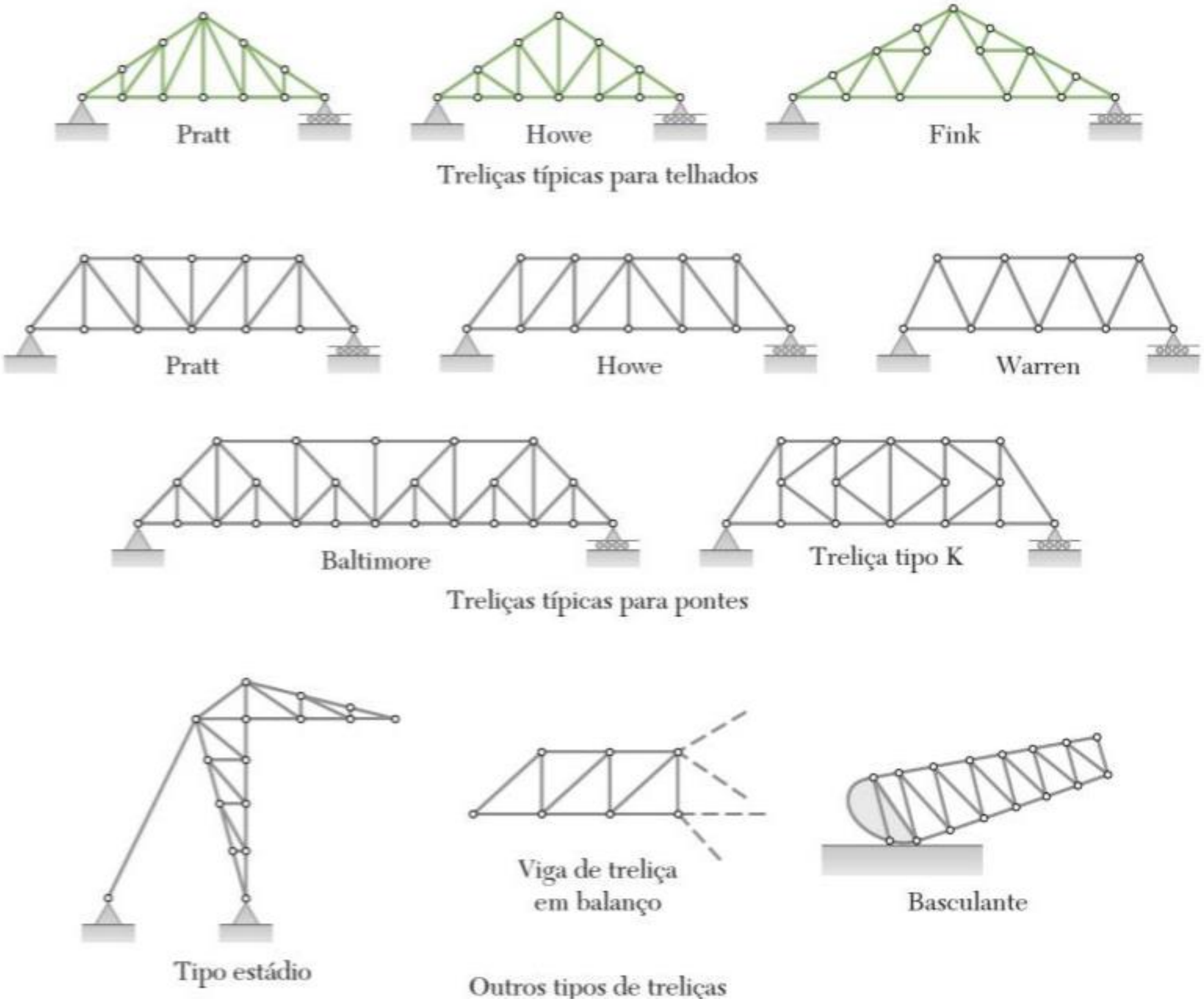




TRELIÇAS – SIMPLIFICA PARA 2D



TRELIÇAS: TIPOS



TRELIÇAS - HIPÓTESES

Hipóteses de cálculo: Treliça ideal

1) nós são ligações entre as barras e não se considera atrito

2) estão sujeitas apenas as forças concentradas aplicadas somente nos nós;

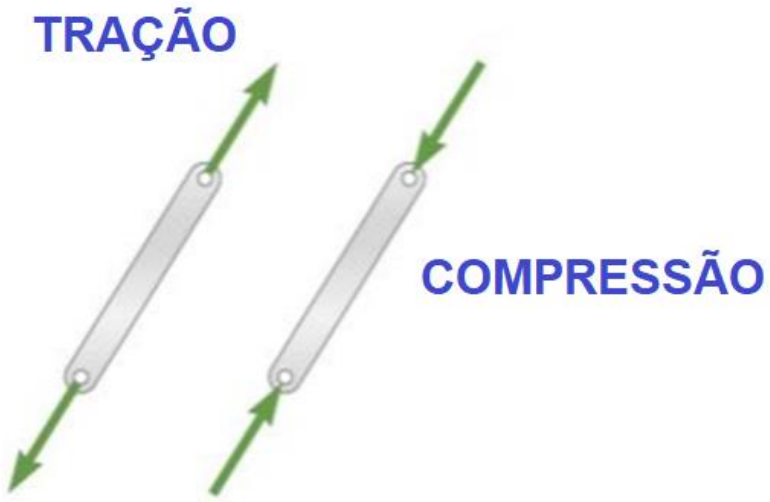
3) os eixos das barras coincidem com a reta que une os centros das articulações, não gerando resultante de momento na articulação;

4) cada barra apresenta apenas esforços normais.

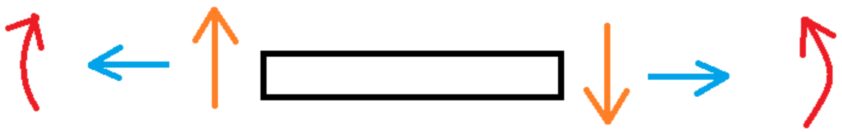
Os esforços de momento fletor e força cortante são nulos

TRELIÇAS - ESFORÇOS

Barras com esforços apenas NORMAIS



TRELIÇAS



PÓRTICO

TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

nr. barras = b
nr. reações = r
nr. nós = n

$b + r = 2.n$ → isostático

$b + r > 2.n$ → hiperestático

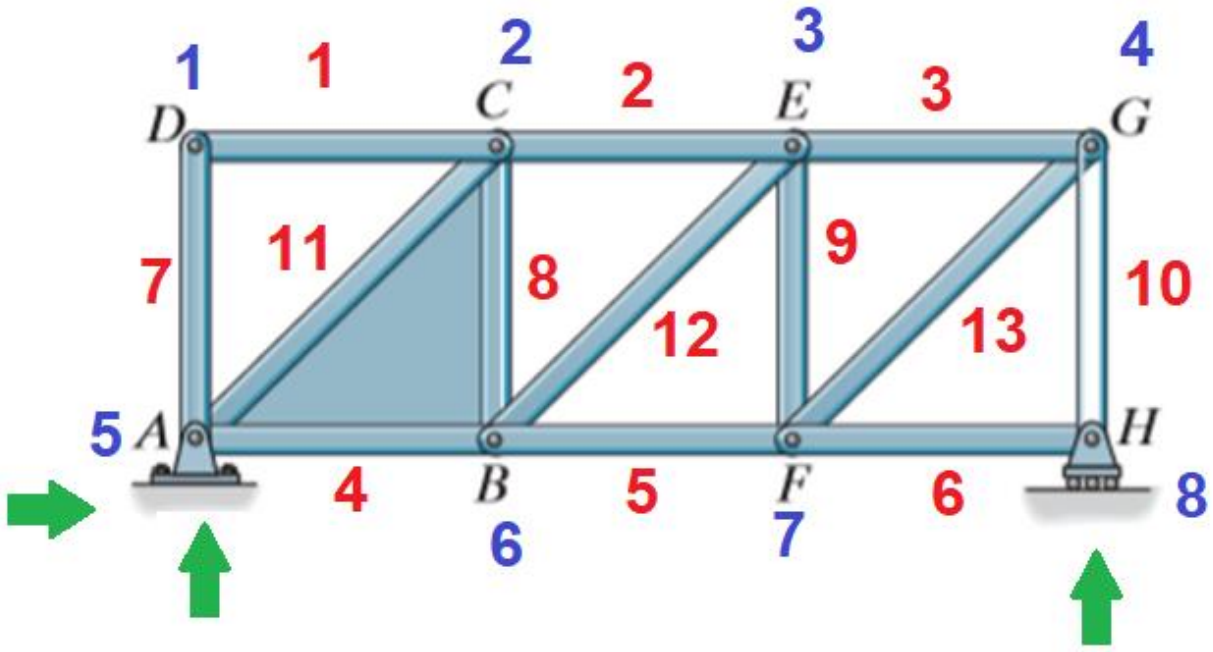
$b + r < 2.n$ → hipostático

TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

b + r = 2.n → isostático

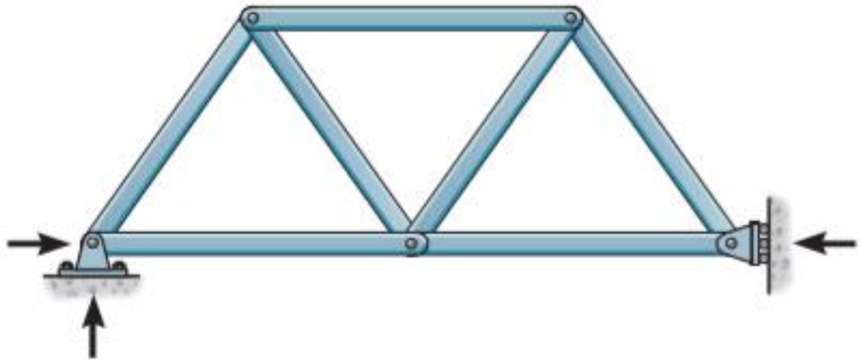
b = 13
r = 3
n = 8

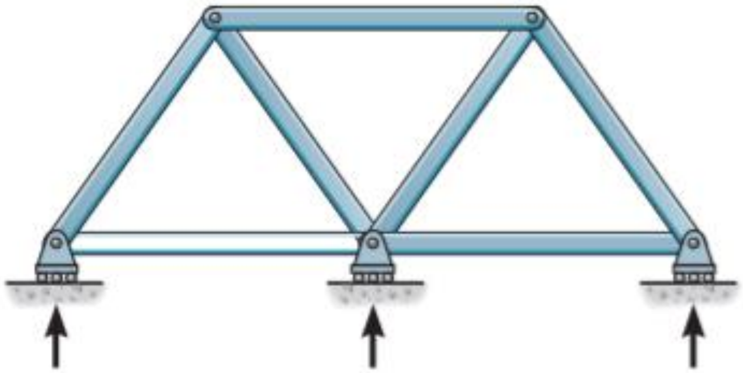


TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

$b + r < 2.n$ → hipostático



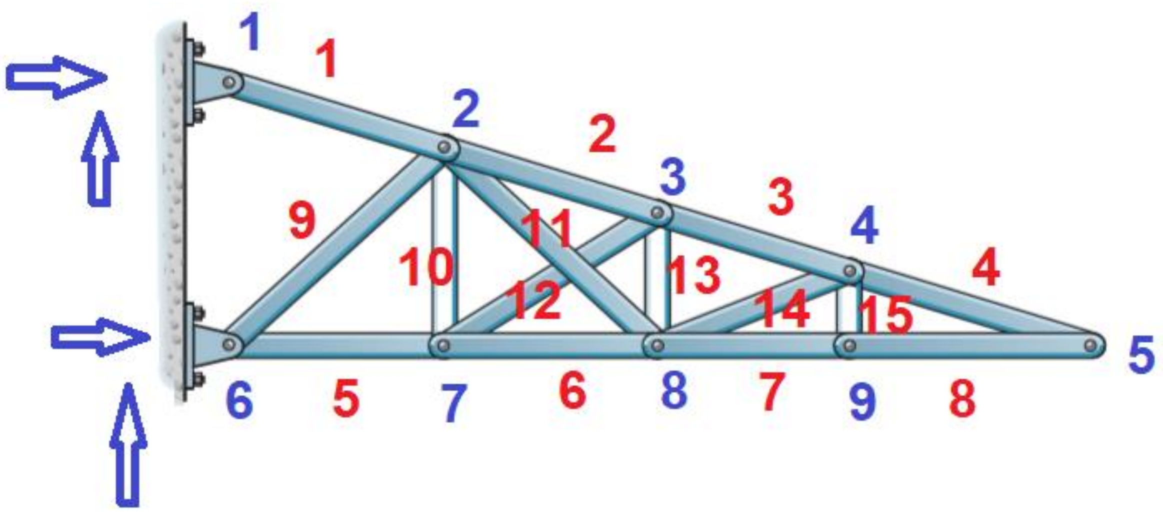


TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

$b + r > 2.n$ ➡ hiperestático

b = 15
r = 4
n = 9



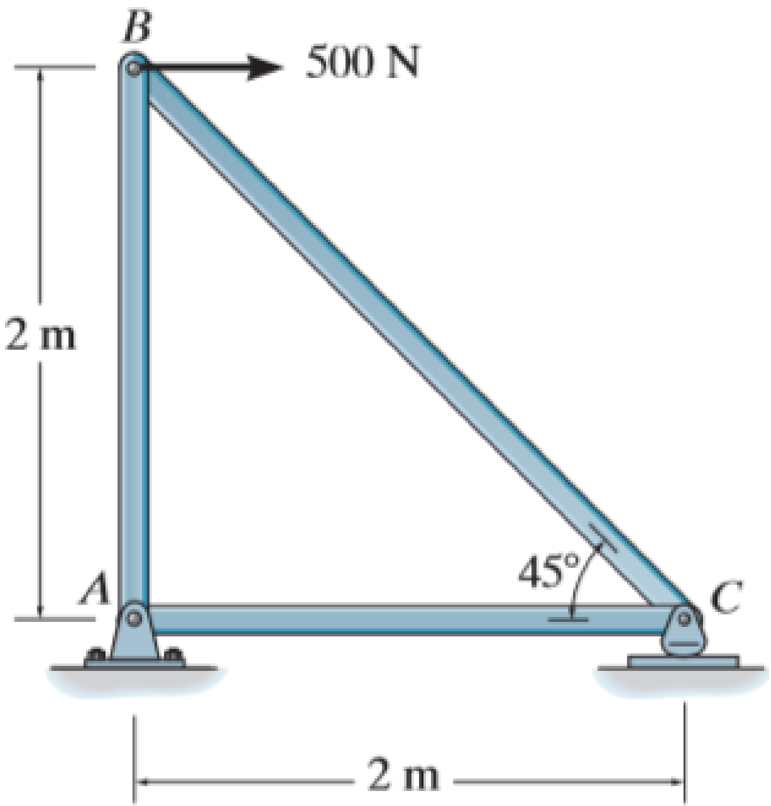
$15 + 4 > 2.9$

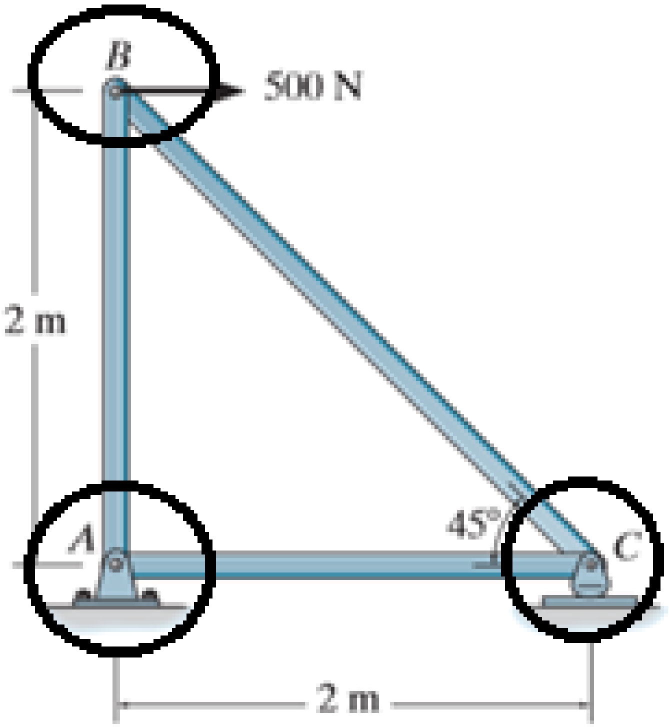
TRELIÇAS

Métodos de cálculo manual

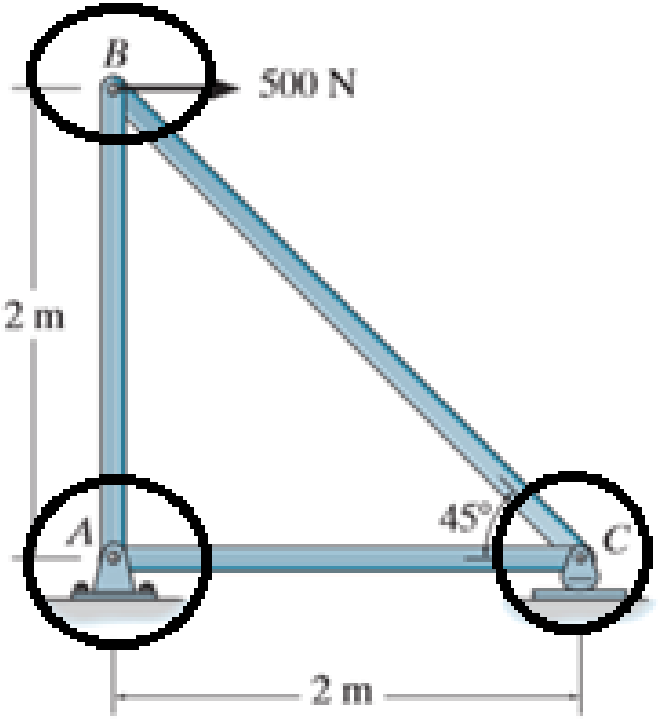
- **Método do equilíbrio dos nós**
- **Método de Ritter ou das seções**

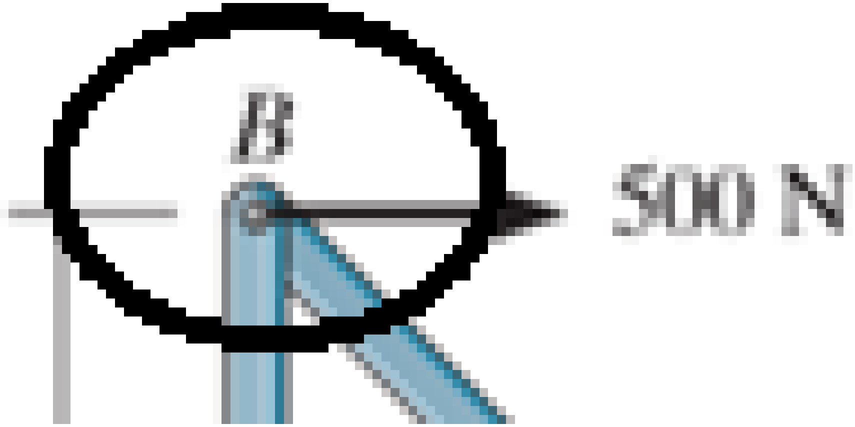
Treliças: método do equilíbrio dos nós

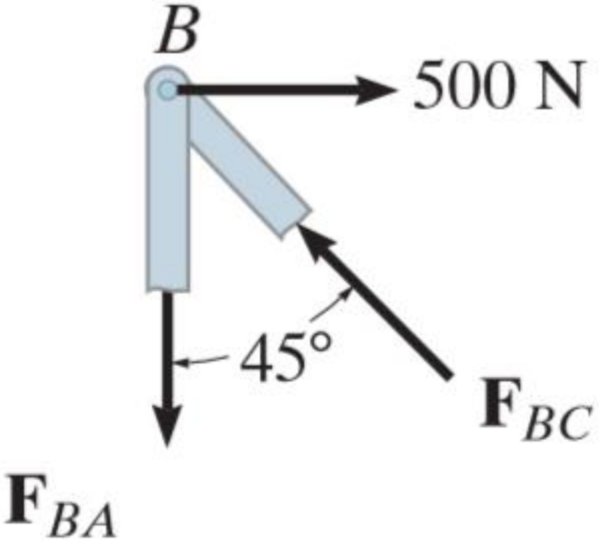




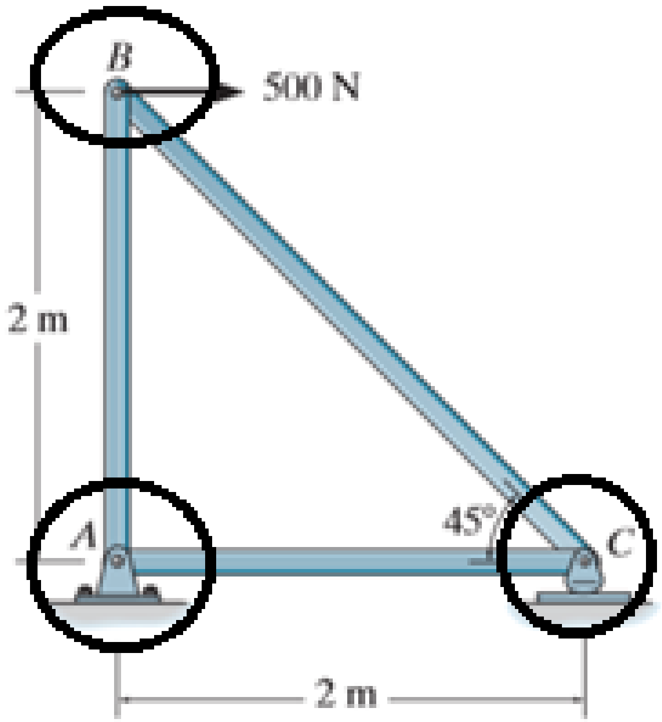
Treliças: método do equilíbrio dos nós

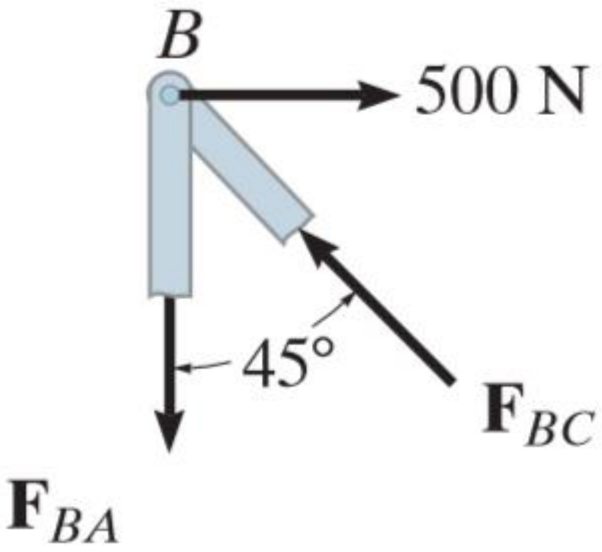


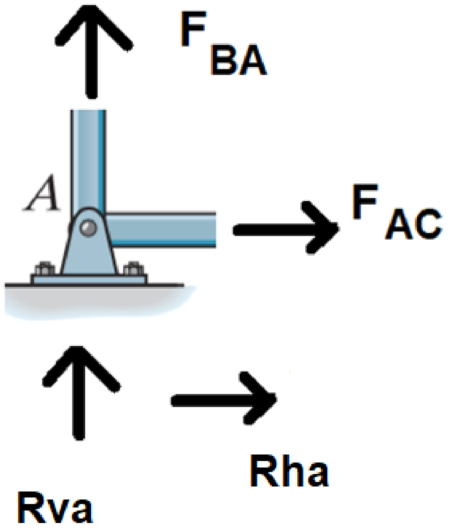




Treliças: método do equilíbrio dos nós







Treliças: método do equilíbrio dos nós

Em função das hipóteses admitidas, cada nó se constitui em um ponto material submetido a um sistema de forças de equilíbrio, onde se podem usar as seguintes equações para cada nó *i*:

$\sum F_x^i = 0$ e $\sum F_y^i = 0$.

Assim, o procedimento de cálculo das forças normais de cada barra da treliça fica:

1) Determinar as reações ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ e $\sum M_s = 0$);

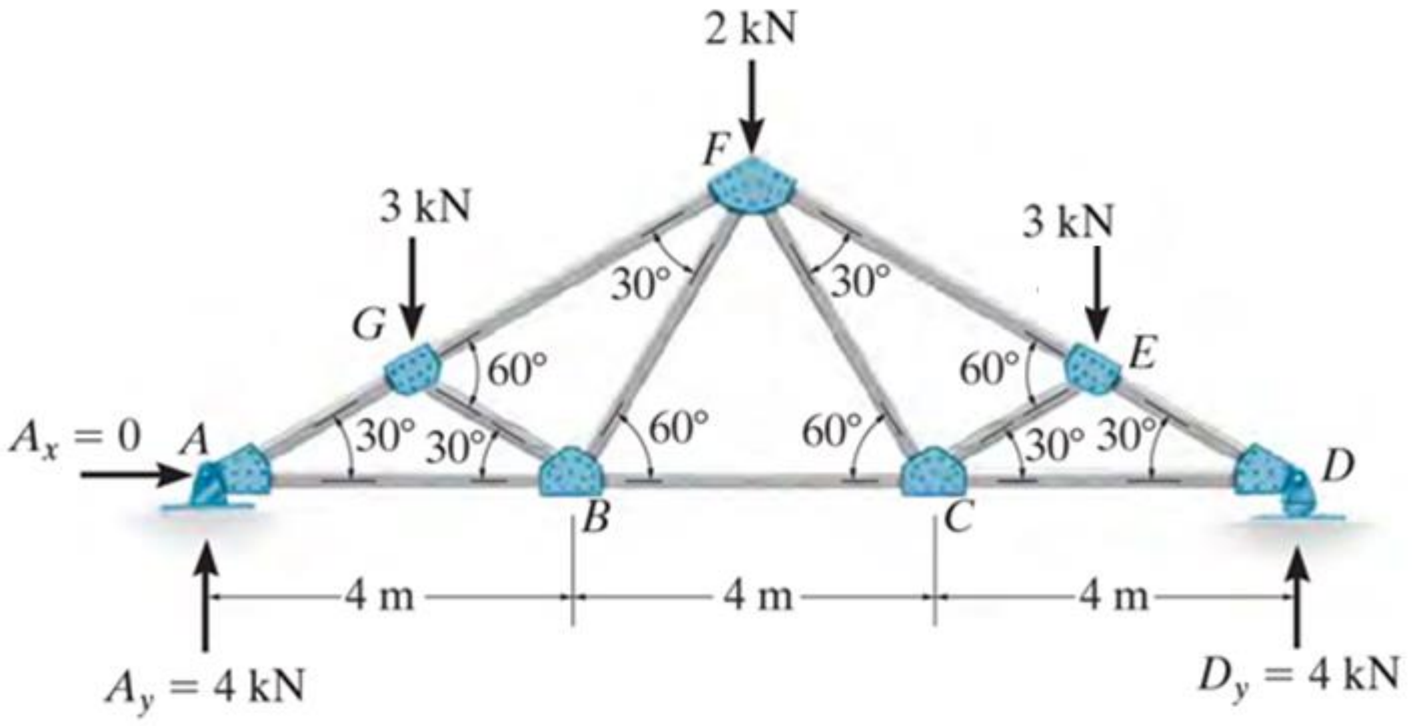
2) Aplicar as duas equações de equilíbrio em cada nó.

Alguns casos, o nó está com mais de 2 barras conectadas

Resolver sistema linear

Treliças: método do equilíbrio dos nós

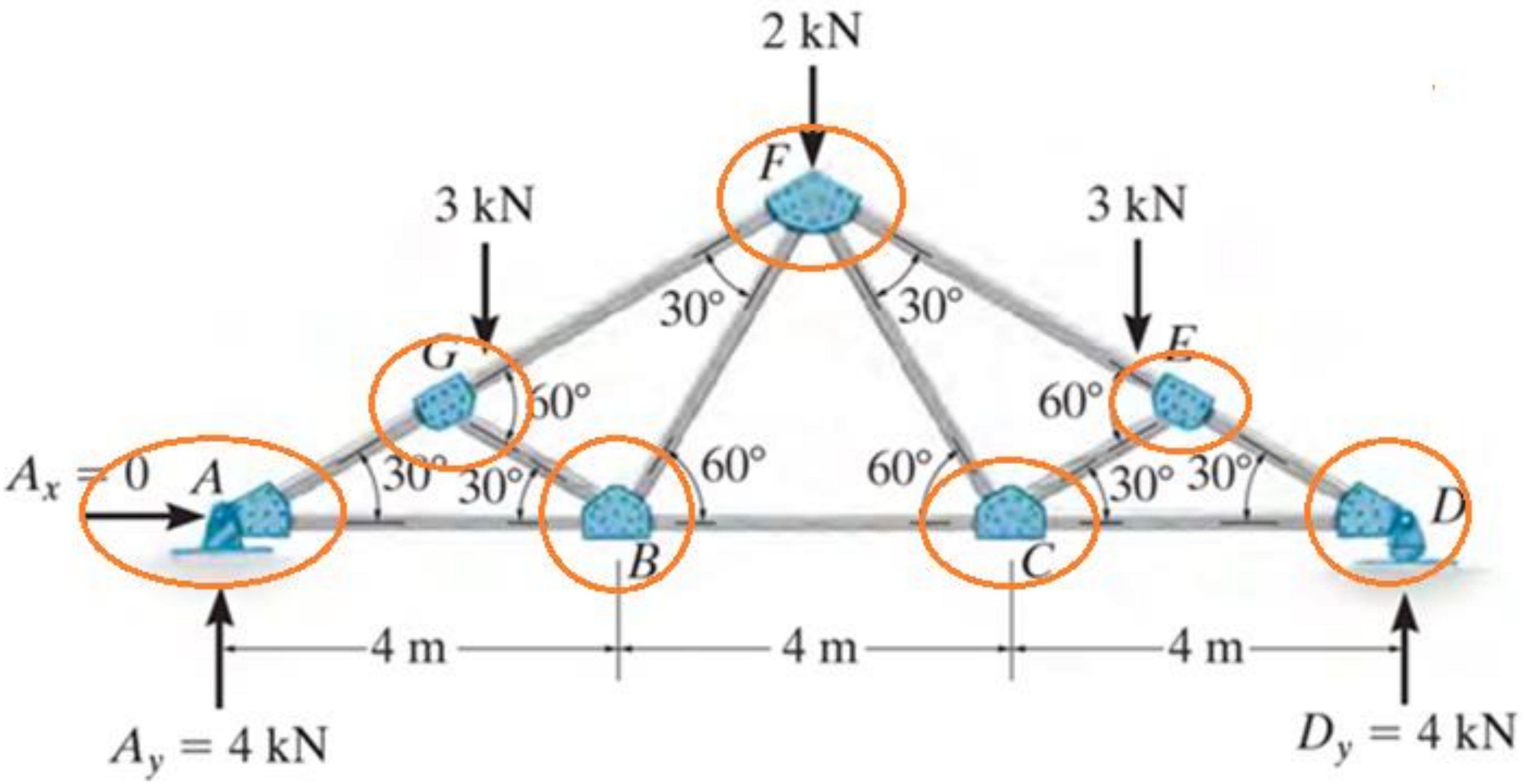
Alguns casos, o nó está com mais de 2 barras conectadas



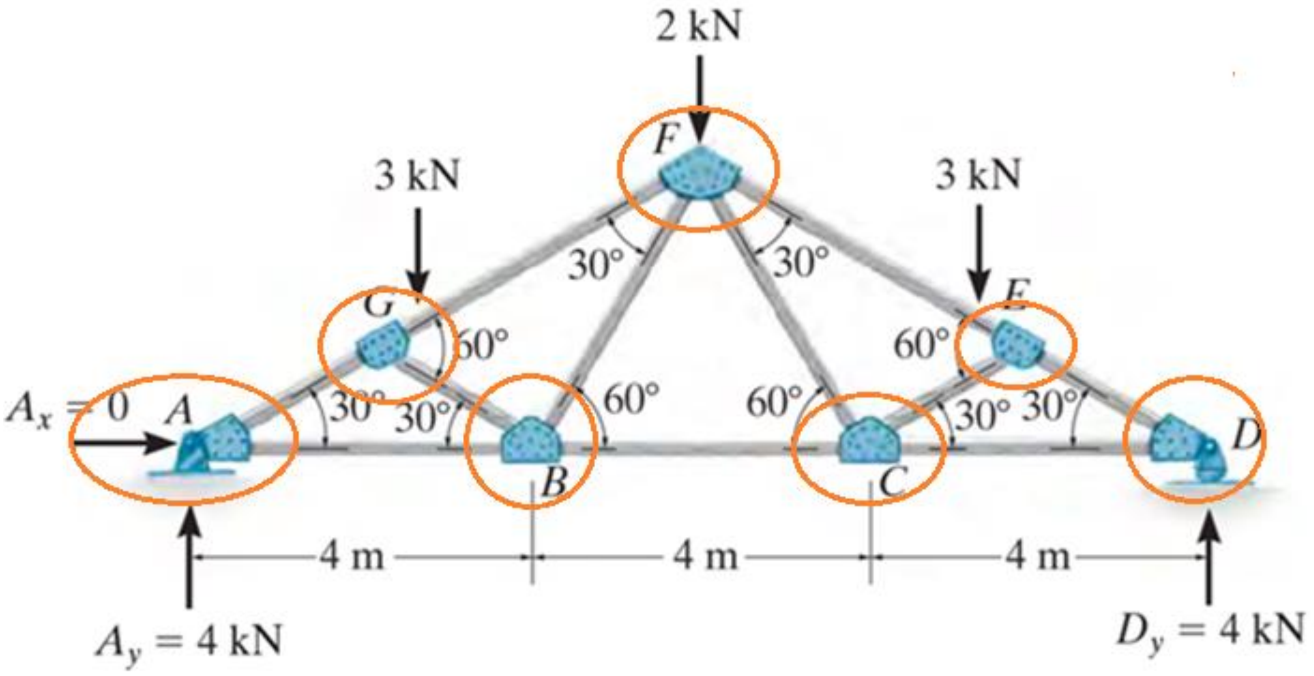
Obtenha reações

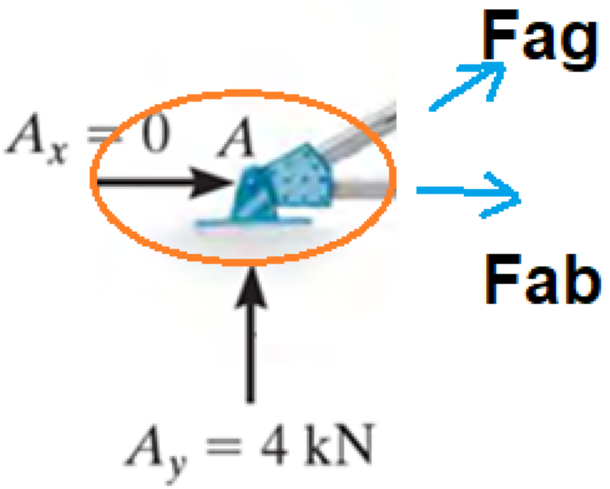
Comece por nós que se tem 2 incógnitas: $\sum F_x^i = 0$ e $\sum F_y^i = 0$.

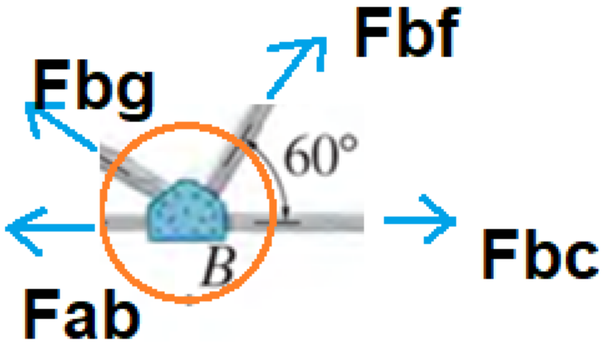
Treliças: método do equilíbrio dos nós



Treliças: método do equilíbrio dos nós







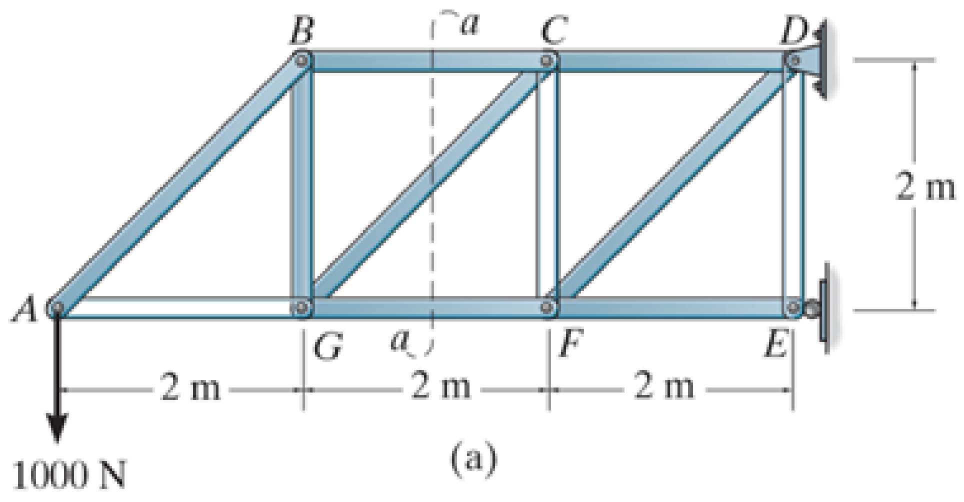
Treliças: Método de Ritter ou das seções

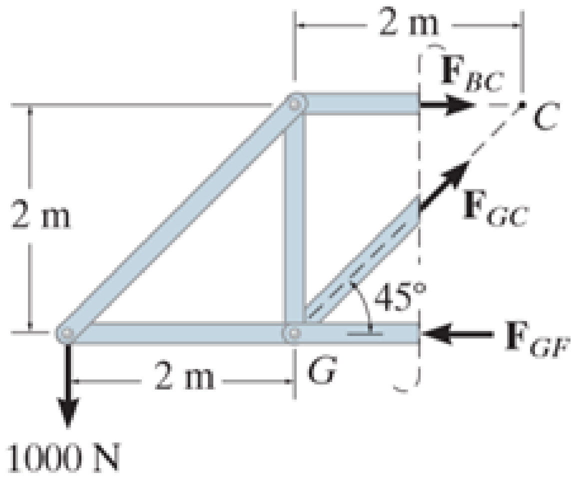
O método é mais empregado quando se queira determinar os esforços normais apenas em determinadas barras. Baseia-se pela aplicação de um corte numa seção imaginária que separe a treliça em duas partes. De modo que as três equações da estática possa ser aplicada no diagrama de corpo livre de cada uma das partes, levando a determinação dos esforços nas seções cortadas, quando possível.

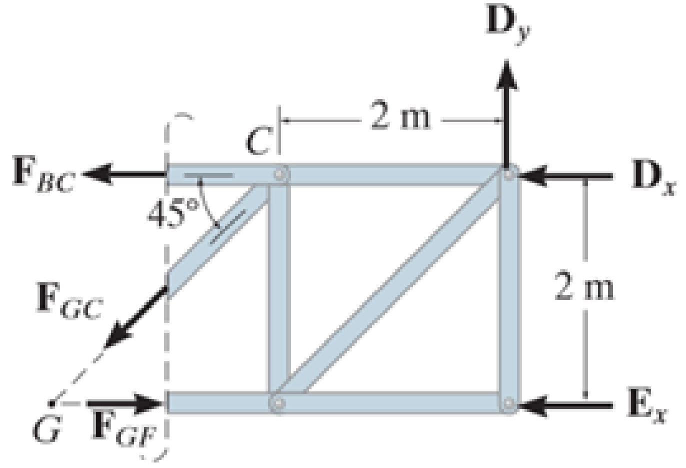
1) Determinar as reações ($\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$ e $\sum M_s = 0$);

2) Fazer um seletivo corte, passando pela(s) barra(s) desejada(s), separando a treliça em duas partes, aplicar as 3 equações da estática de equilíbrio na parte desejada, determinando os esforços na(s) barra(s) requerida(s).

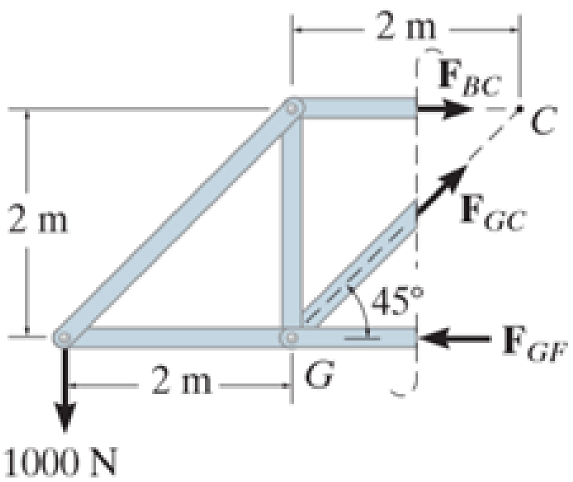
Treliças: Método de corte de Ritter ou das seções

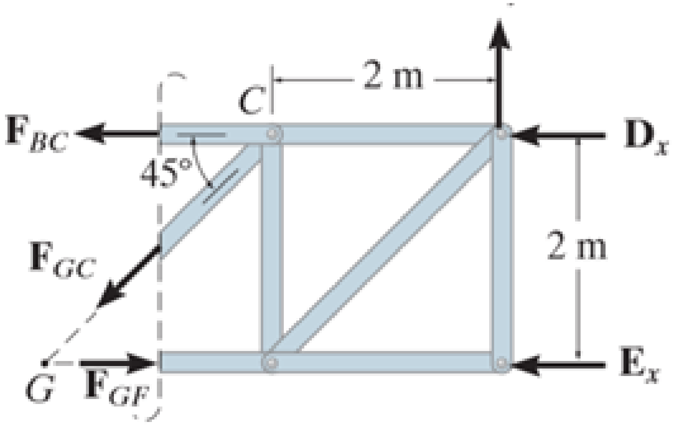






Treliças: Método do corte de Ritter ou das seções





$$\sum F_x = 0$$

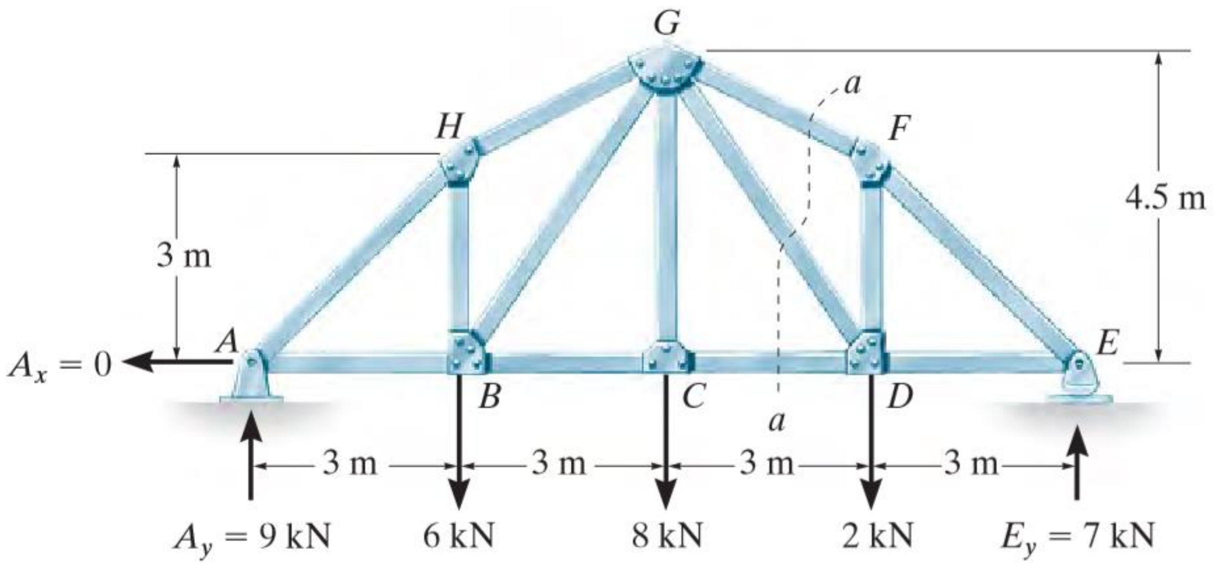
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_s = 0$$

Usar a equação de equilíbrio de interesse

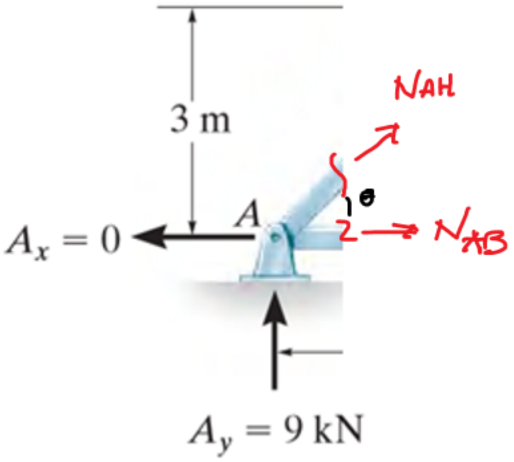
d) Diagramas

Exemplo 1: Obter N_{AH} e N_{AB}



Obtido reações..

Equilíbrio do nó A



$\Sigma F_x = 0: \; N_{AB} + N_{AH}\cos\theta = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0: \; 9 + N_{AH}\,\text{sen}\,\theta = 0$ (2)

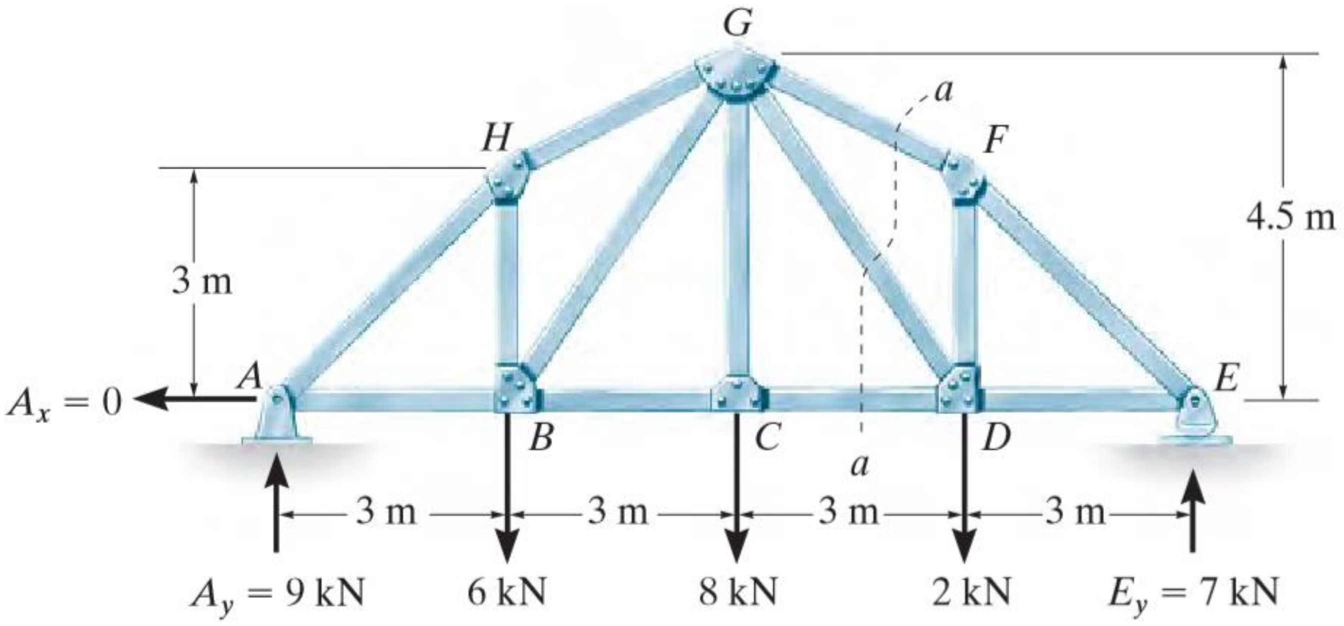
$N_{AH} = \frac{-9}{\text{sen}\,\theta}$ em (1)

$tg\,\theta = 3/3 \rightarrow \theta = 45°$

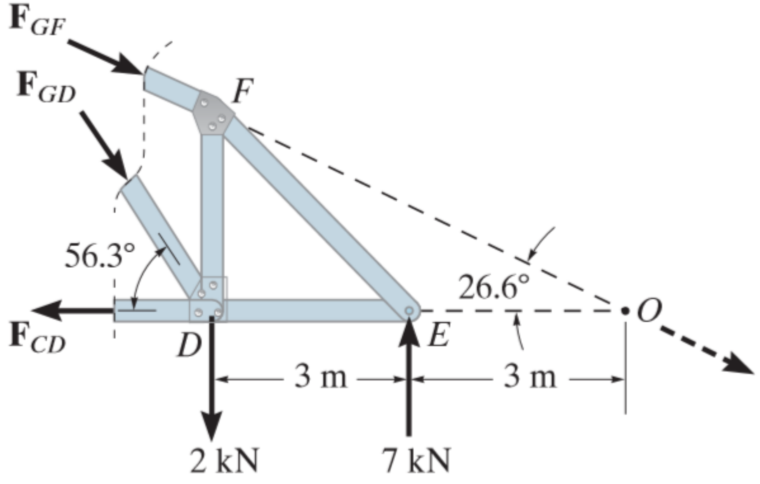
$N_{AH} = -9/\text{sen}\,45 = -12{,}73$ kN (C)

$N_{AB} = 9$ kN (T)

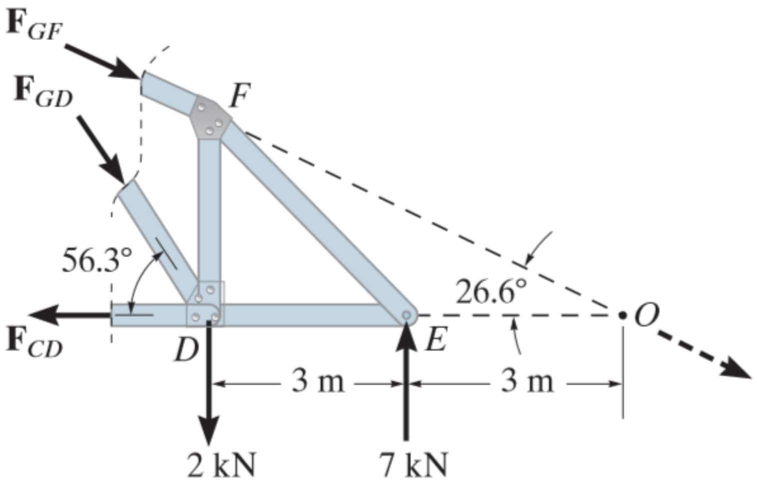
Exemplo 1: Obter N_{FG}

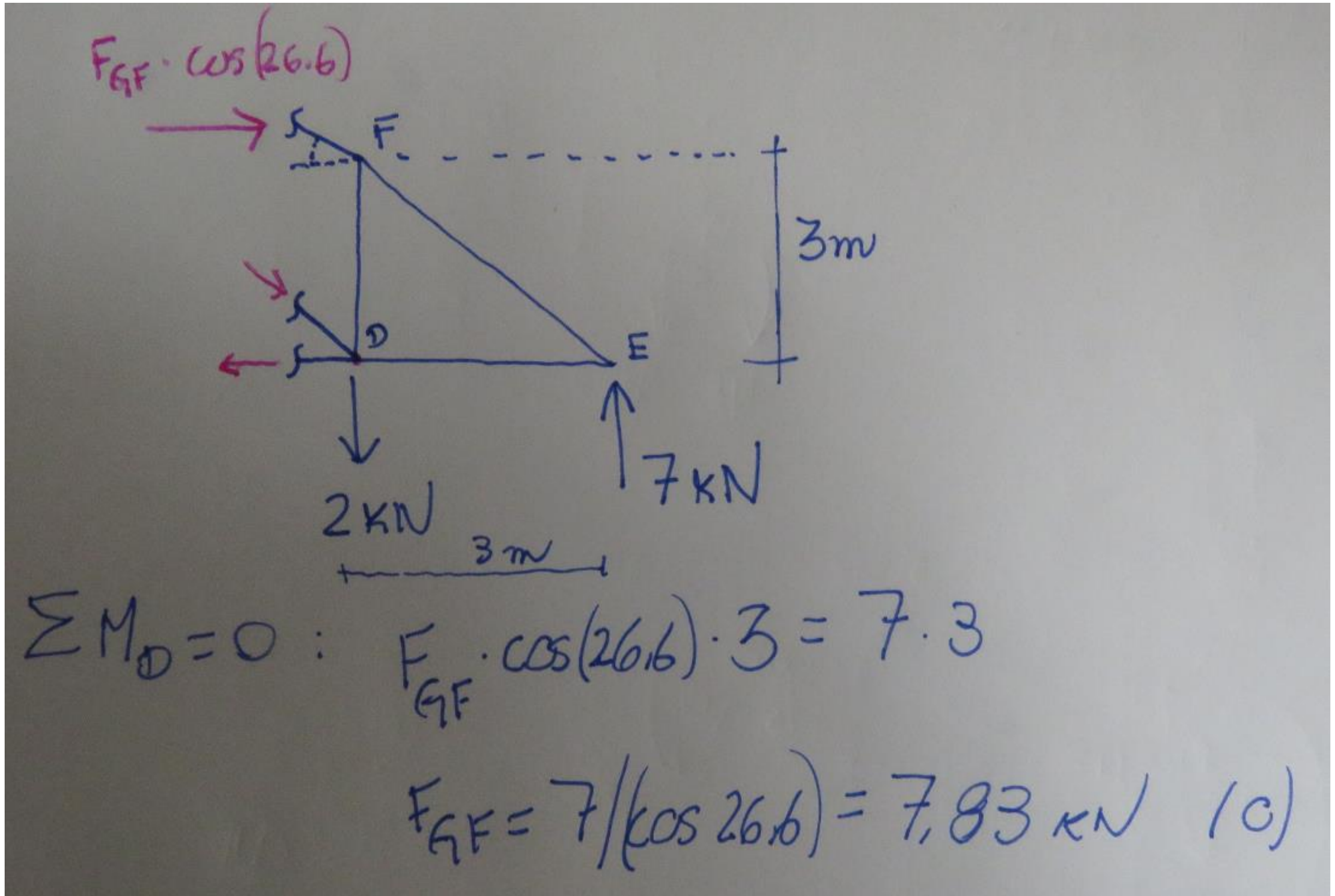


Corte de Ritter

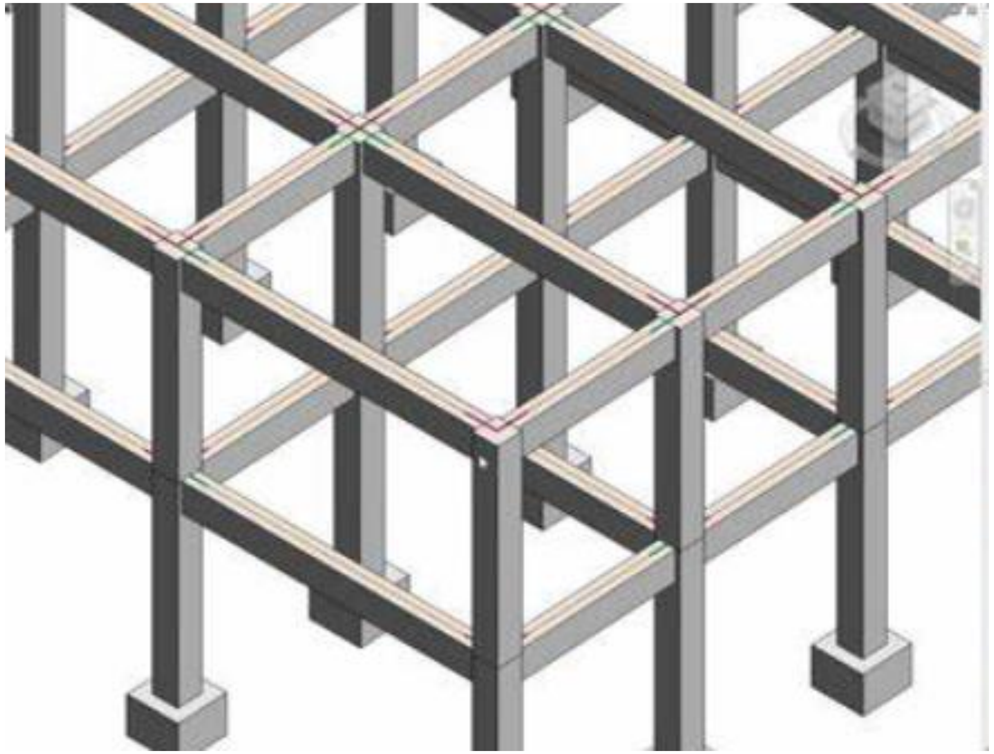


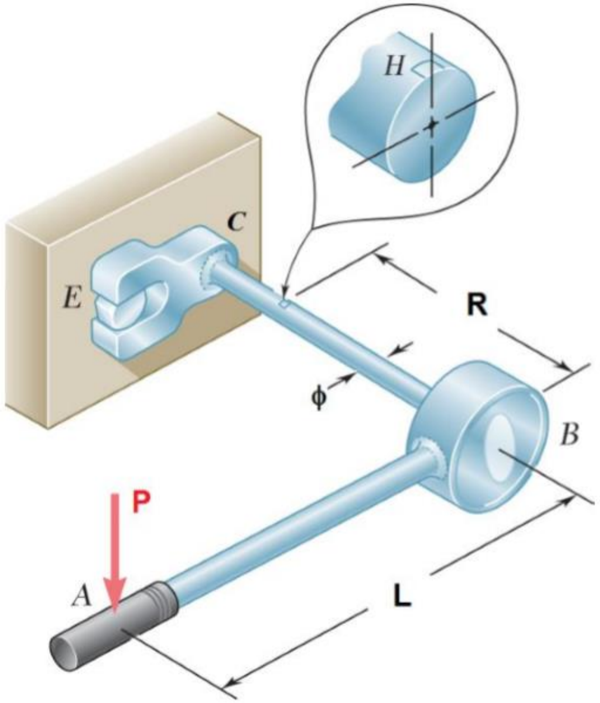
Exemplo 2: Obter N_{FG}

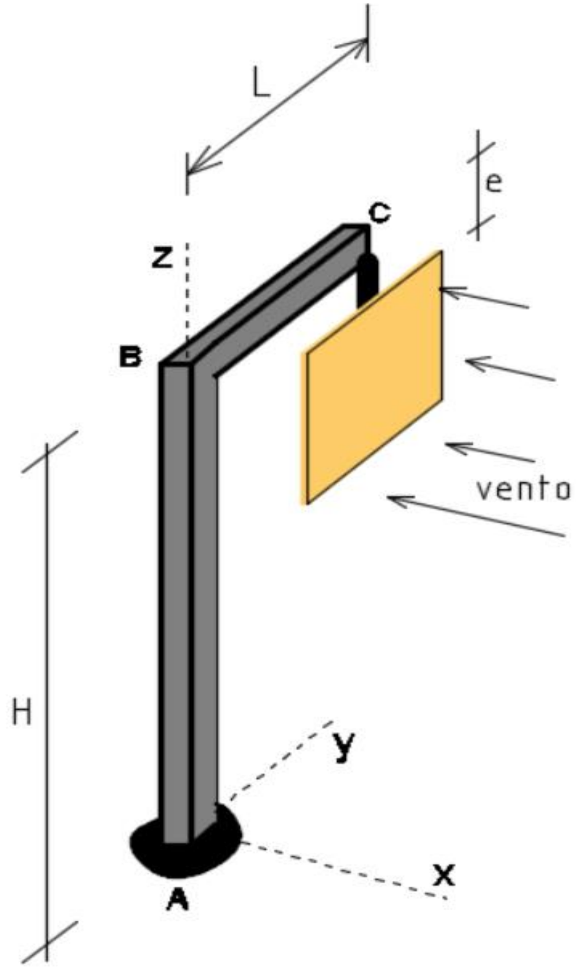




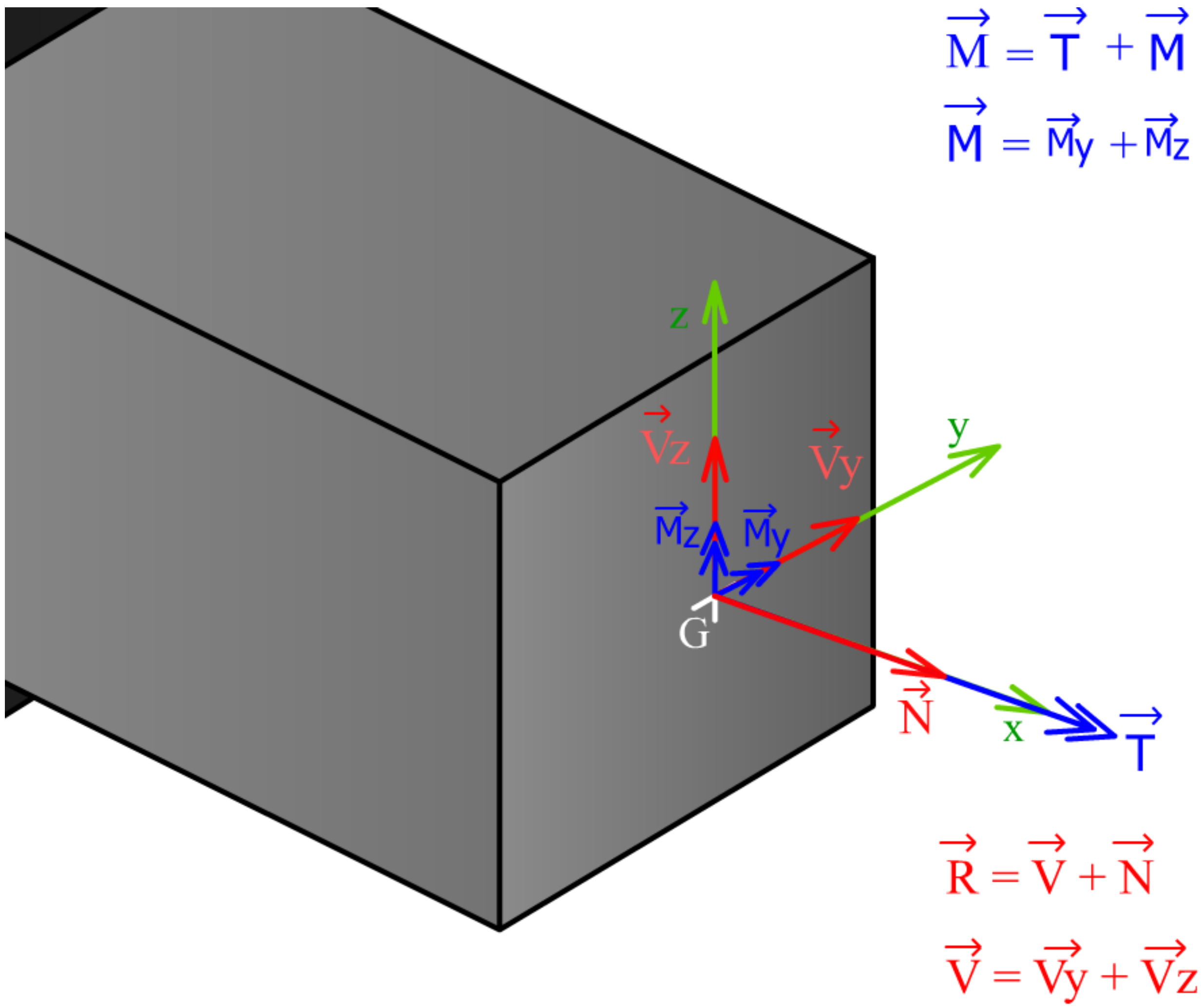
Quadros espaciais isostáticos







TOTAL DE ESFORÇOS (6)



$$N = \int_A \sigma \, dA$$

$$V_y = \int_A \tau_y \, dA$$

$$V_z = \int_A \tau_z \, dA$$

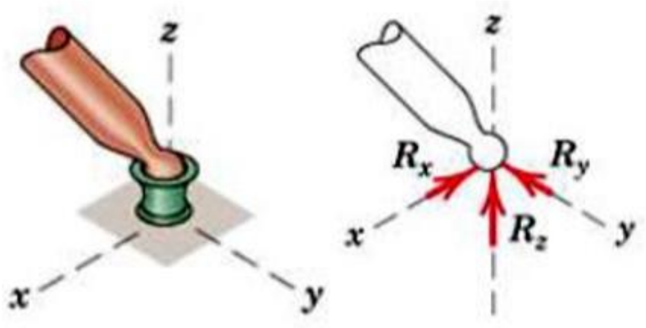
$$M_z = \int_A \sigma \cdot y \, dA$$

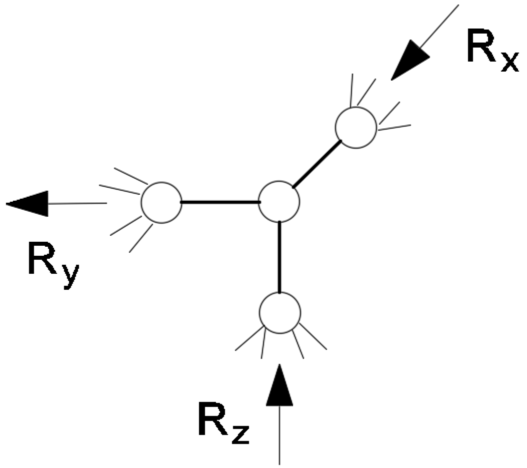
$$M_y = \int_A \sigma \cdot z \, dA$$

$$T = \int_A \left(\tau_z \, y - \tau_y \, z\right) dA$$

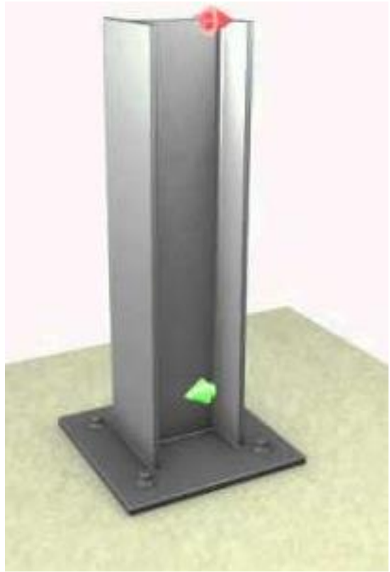
VÍNCULOS

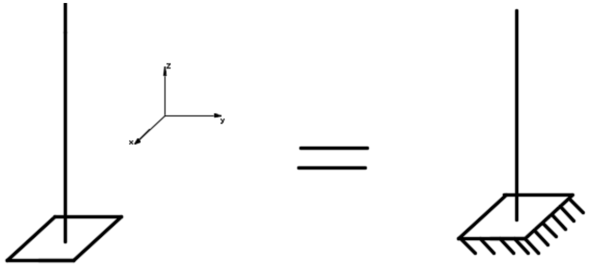
Apoios fixos

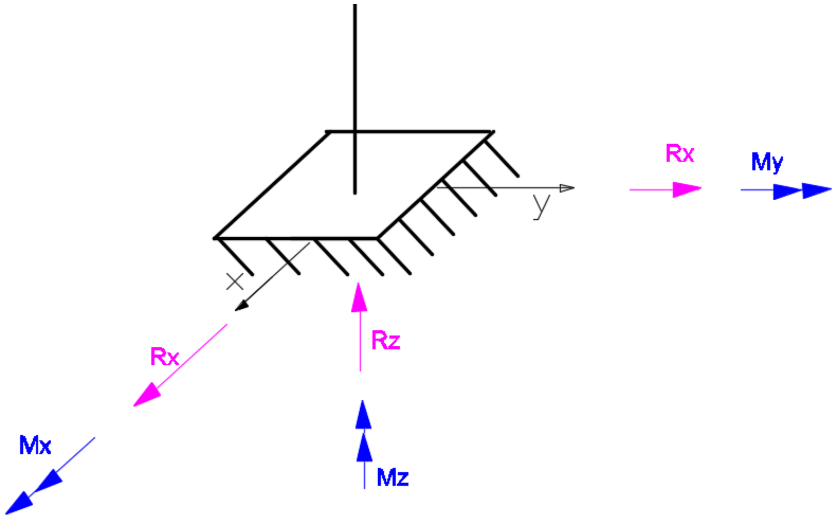




Engaste



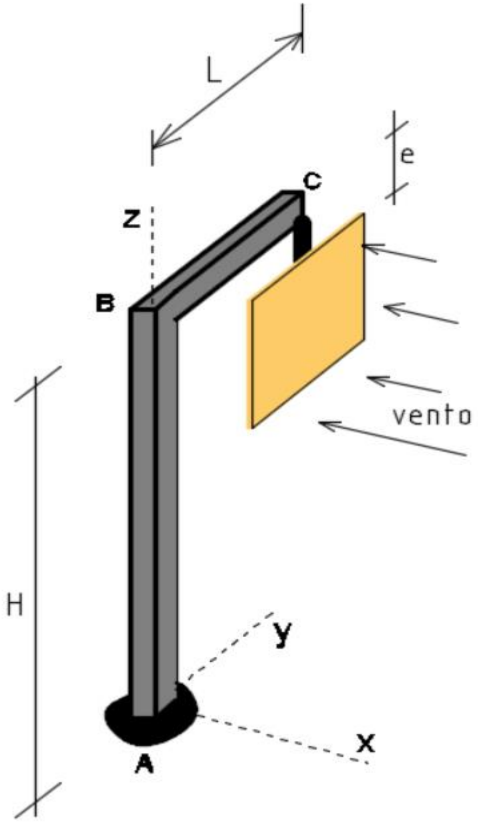


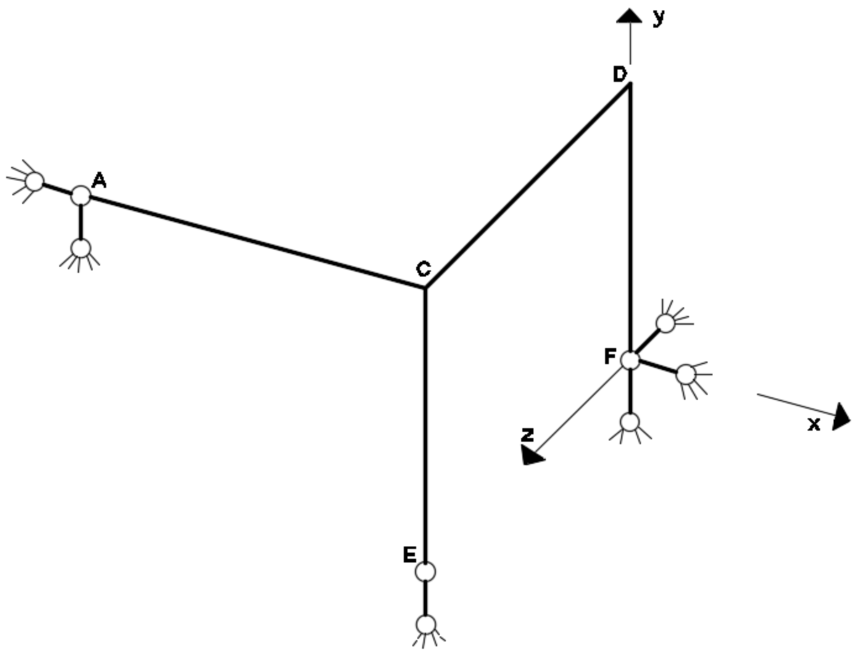


Quadros isostáticos

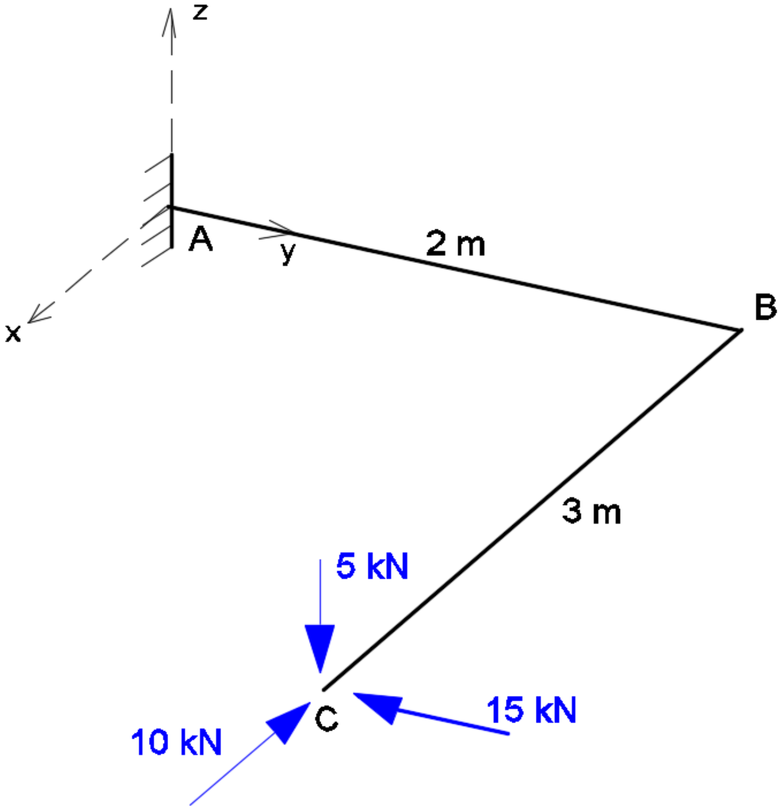
Vínculos suficiente para manter estrutura em equilíbrio

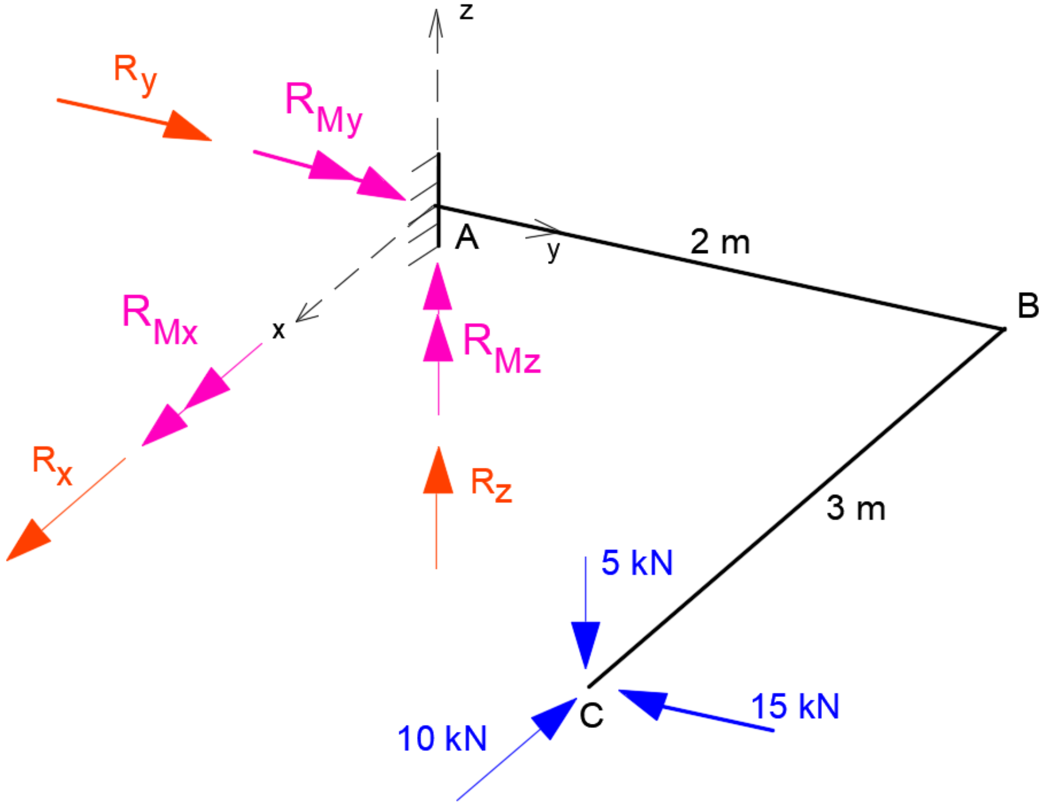
Obtendo reações e esforços apenas com as equações da estática





Exemplo 3: Determinar as reações da estrutura

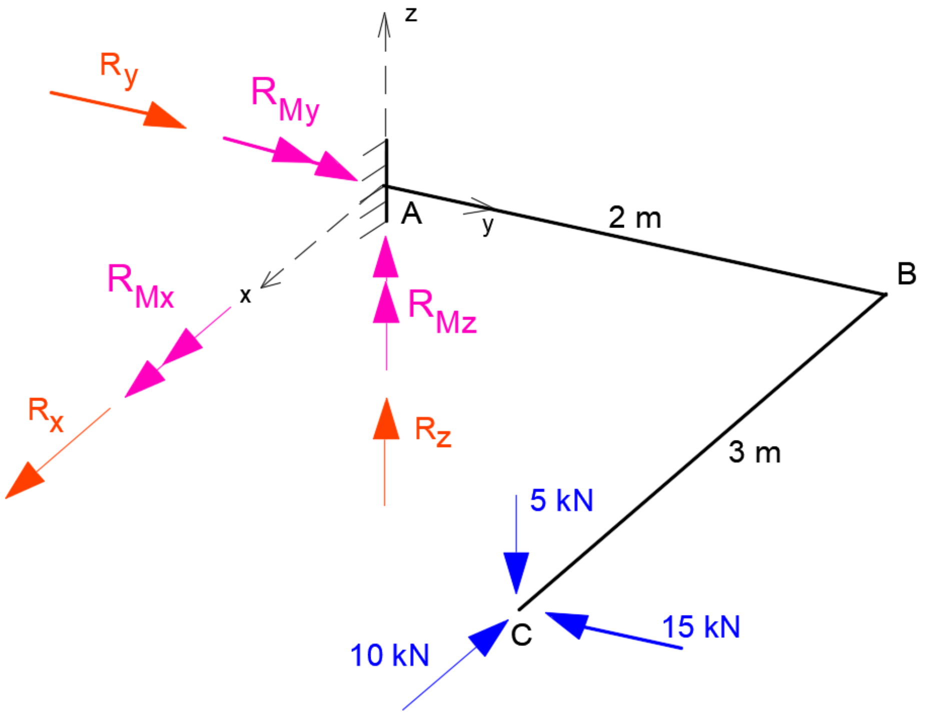




$$\sum F_x = 0: R_x - 10 = 0 \rightarrow R_x = 10\ kN$$

$$\sum F_y = 0: R_y - 15 = 0 \rightarrow R_y = 15\ kN$$

$$\sum F_z = 0: R_z - 5 = 0 \rightarrow R_z = 5\ kN$$



$$M_o = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M_x = (y_p - y_o)F_z - (z_p - z_o)F_y$$

$$M_y = (z_p - z_o)F_x - (x_p - x_o)F_z$$

$$M_z = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$

$$\mathbf{F_x = -10\ kN; F_y = -15\ kN; F_z = -5kN}$$

$$\mathbf{x_p - x_0 = 3m} \qquad \mathbf{y_p - y_0 = 2m} \qquad \mathbf{z_p - z_0 = 0}$$

$$R_{My} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_y)_i = 0$$

$$R_{My} + (0m)(-10kN) - (3m)(-5kN) = 0$$

$$\mathbf{R_{My} = -15\ kNm}$$

$$R_{Mx} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_x)_i = 0$$

$$R_{Mx} + (2m)(-5kN) - (0m)(-15kN) = 0$$

$$\mathbf{R_{Mx} = 10\ kNm}$$

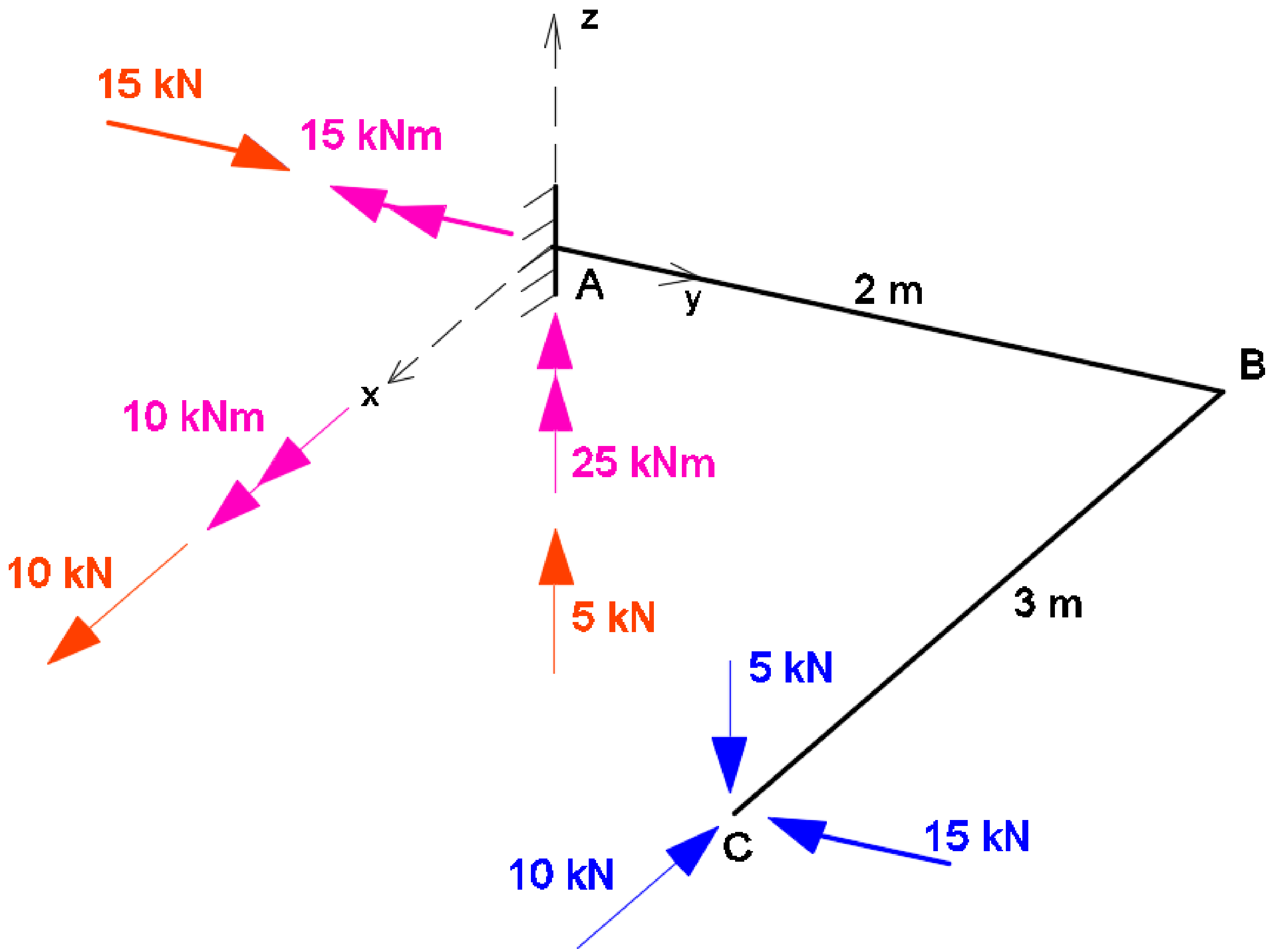
$$R_{Mz} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_z)_i = 0$$

$$\mathbf{R_{My} = 25\ kNm}$$

$$R_{Mz} + (3m)(-15kN) - (2m)(-10kN) = 0$$

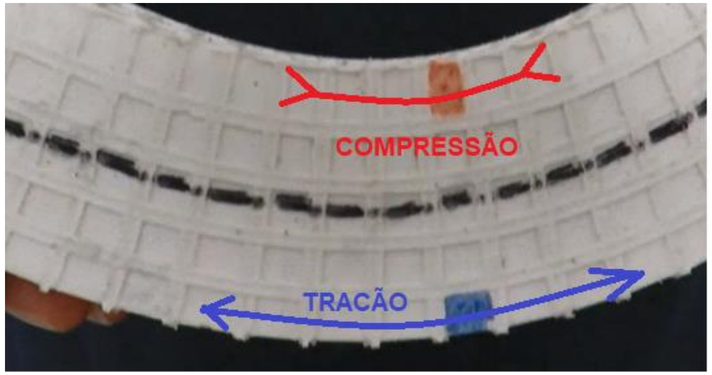
Exemplo 3: Determinar as reações da estrutura

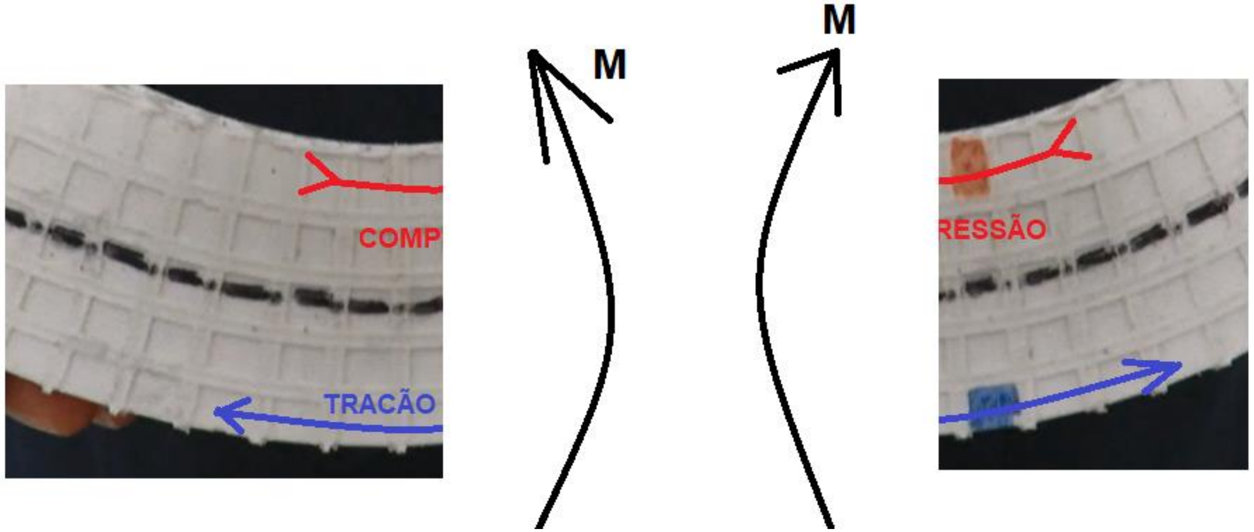
Reações



Convenção de sinais para diagramas

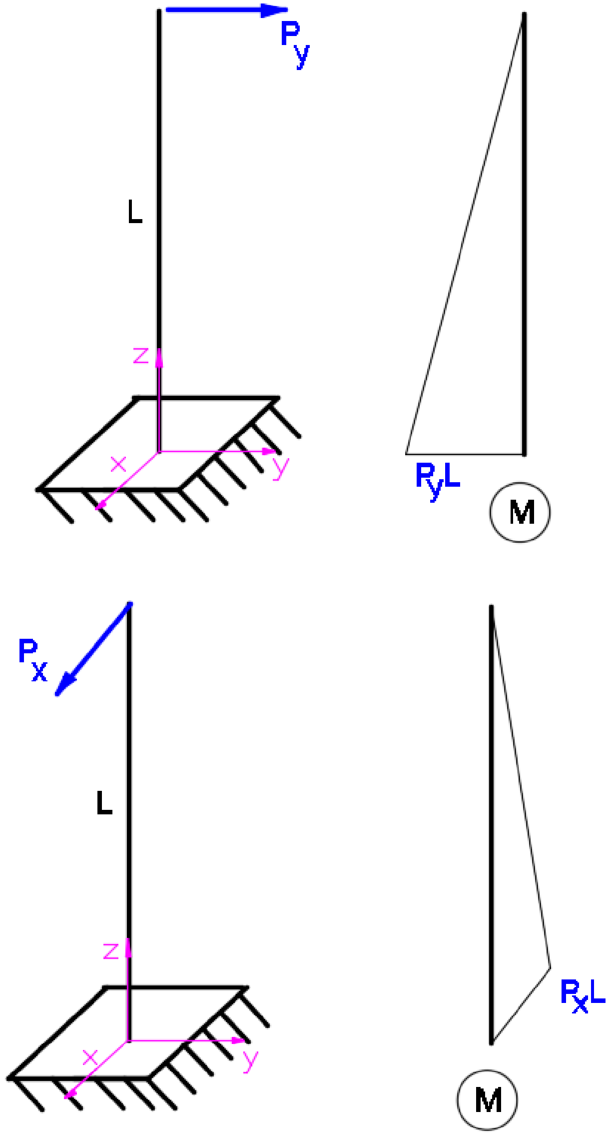
Momentos fletores: desenhar lado que traciona

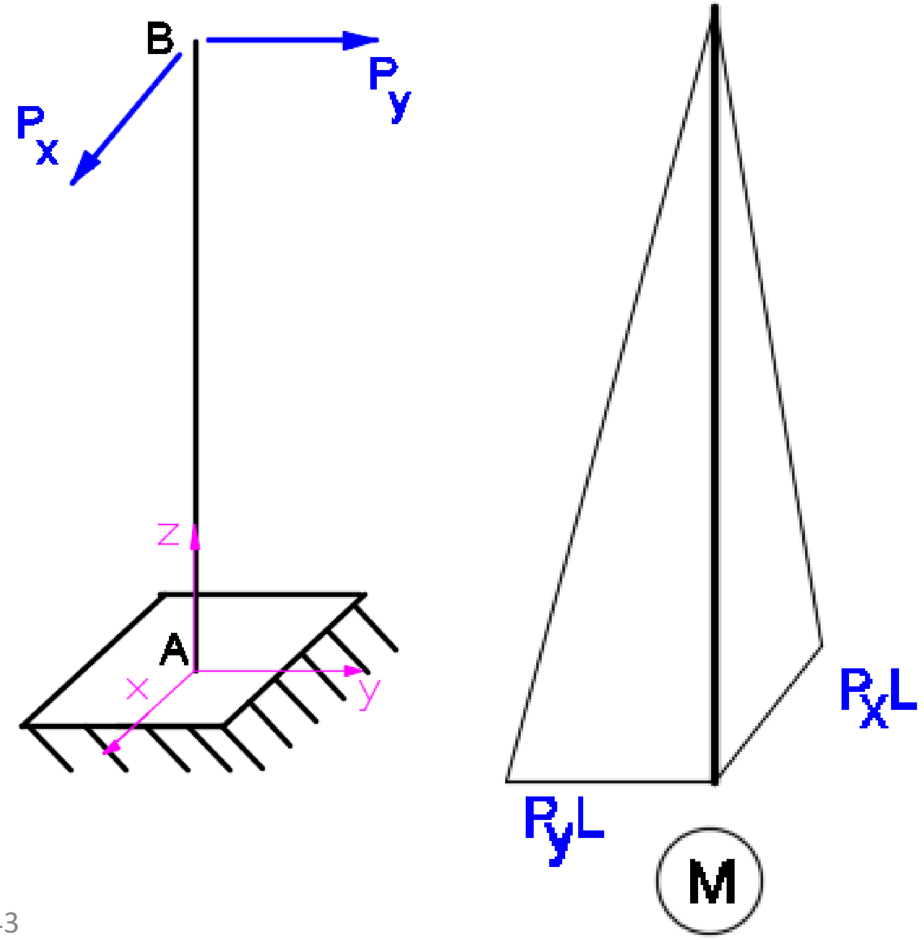




Convenção de sinais para diagramas

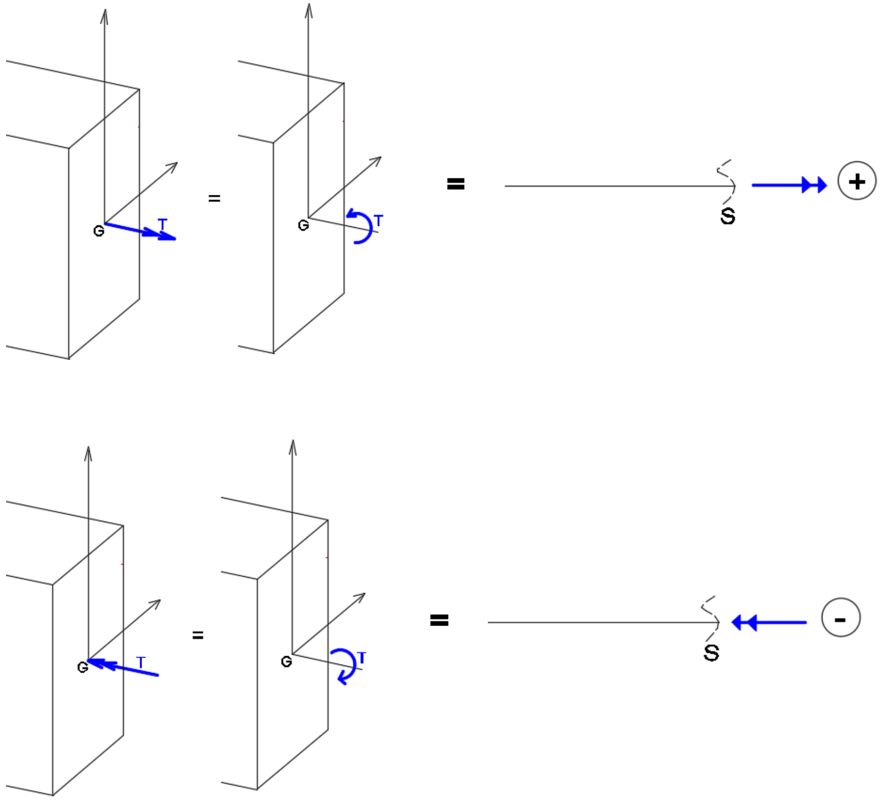
Momentos fletores: desenhar lado que traciona

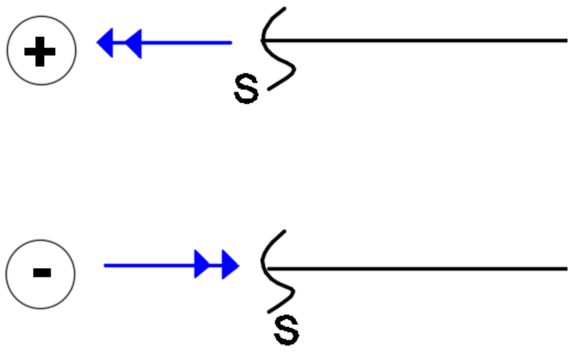




Convenção de sinais para diagramas

Momento torçor (T) > 0 se vetor sai da seção



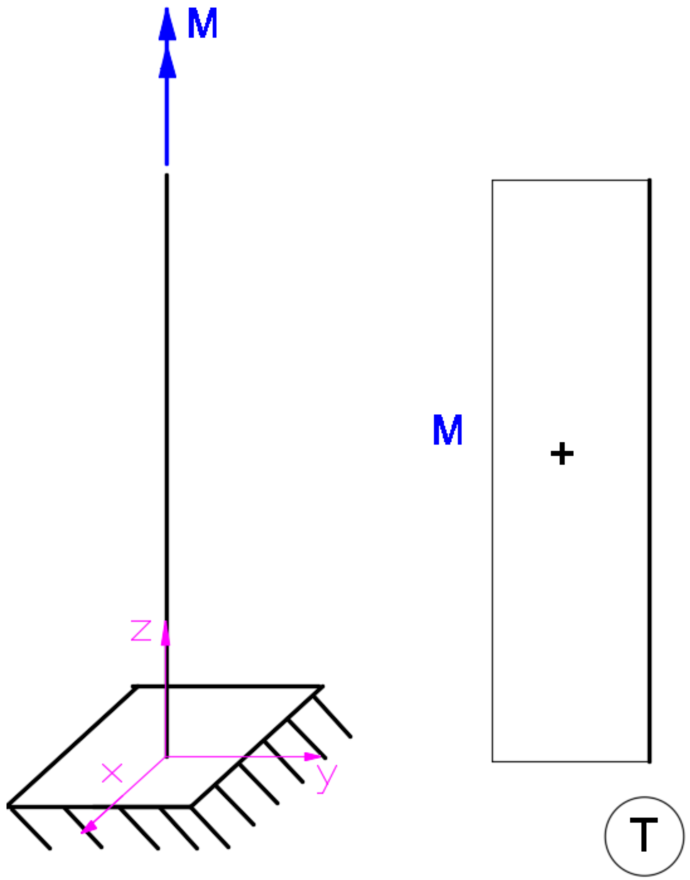


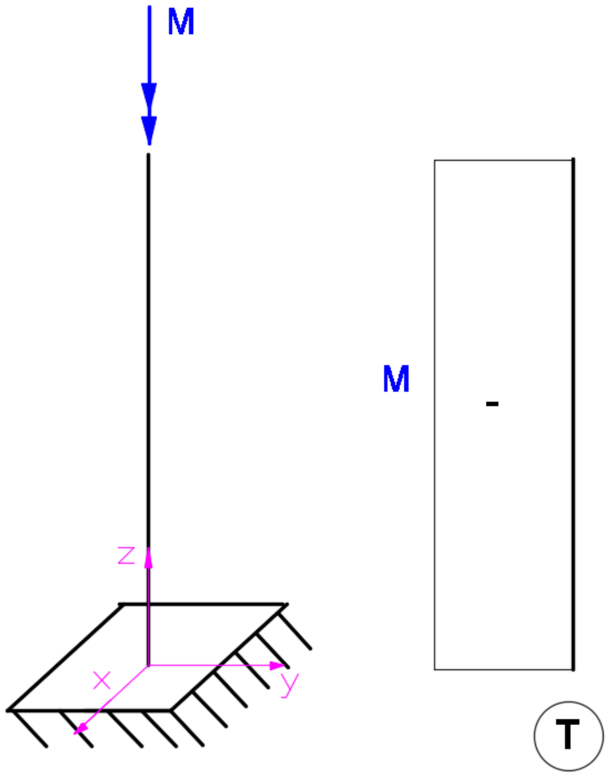
Momento de torção[2]	O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua	O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua

Rotacionar a seção no sentido anti-horário (T>0)

Convenção de sinais para diagramas

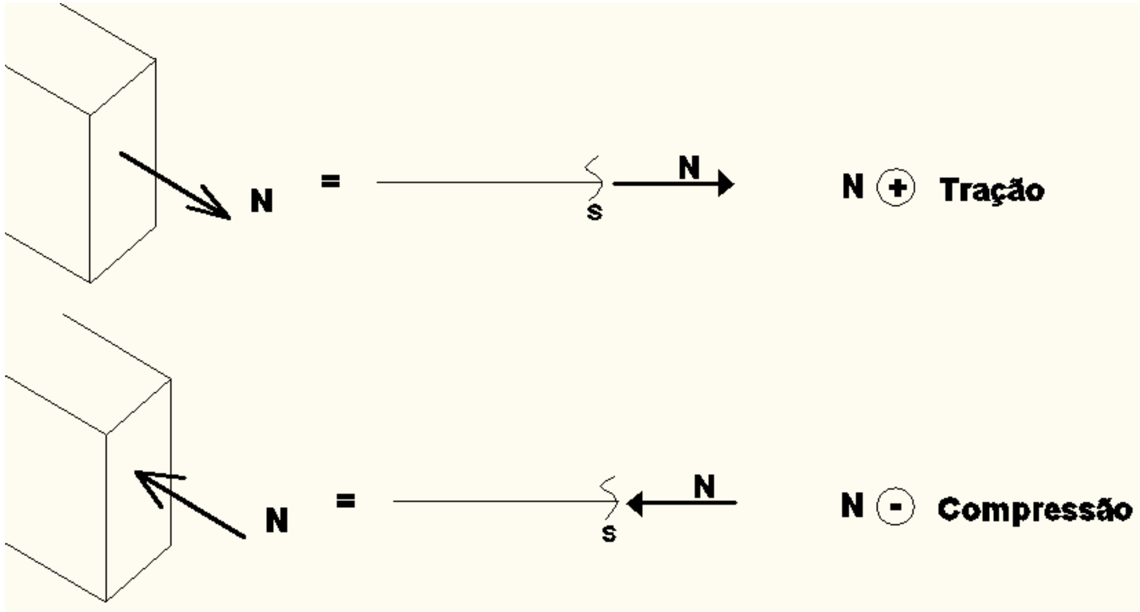
Momento torçor (T) > 0 se vetor sai da seção

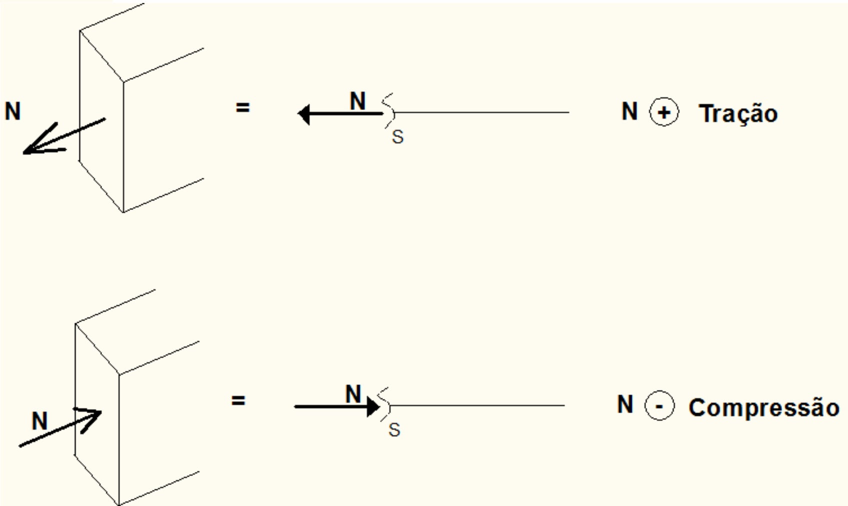




Convenção de sinais para diagramas

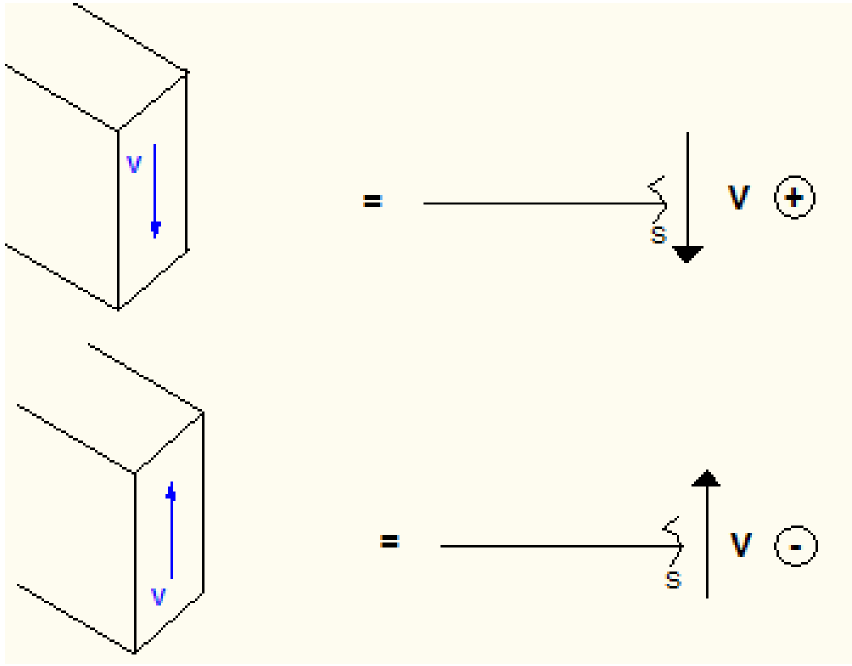
Normal (N) > 0 se vetor sai da seção

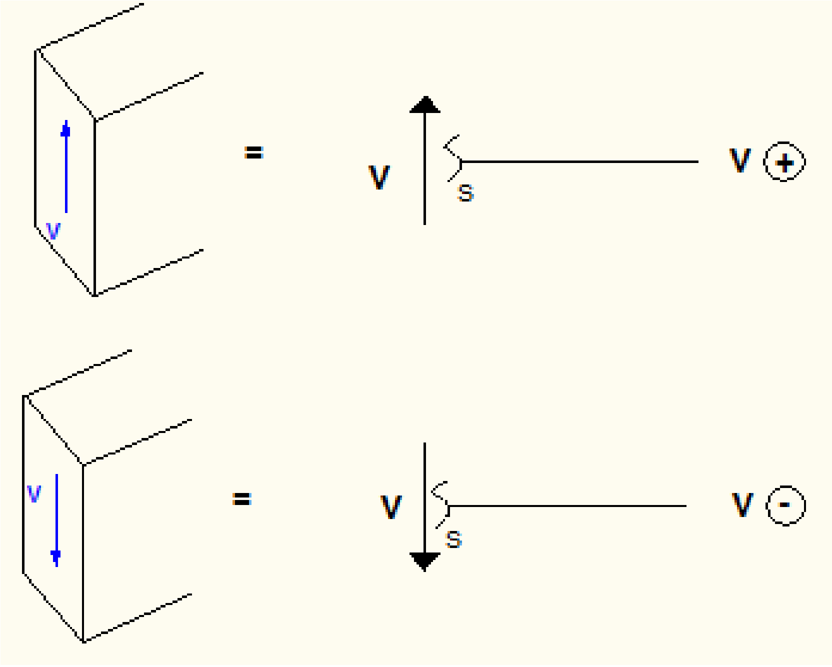




Convenção de sinais para diagramas

Cortantes > 0 se gira a barra no sentido horário



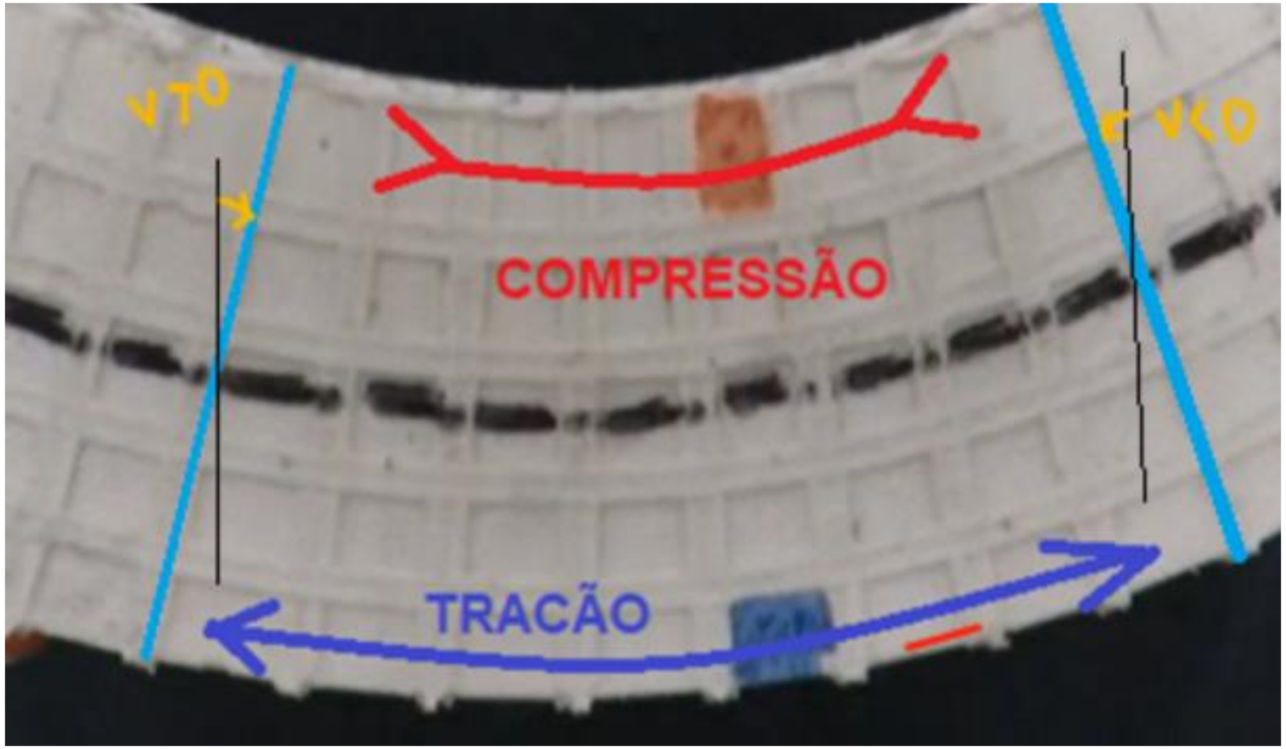


Força cortante	Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário	Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário

Convenção de sinais para diagramas

Cortantes > 0 se gira a barra no sentido horário

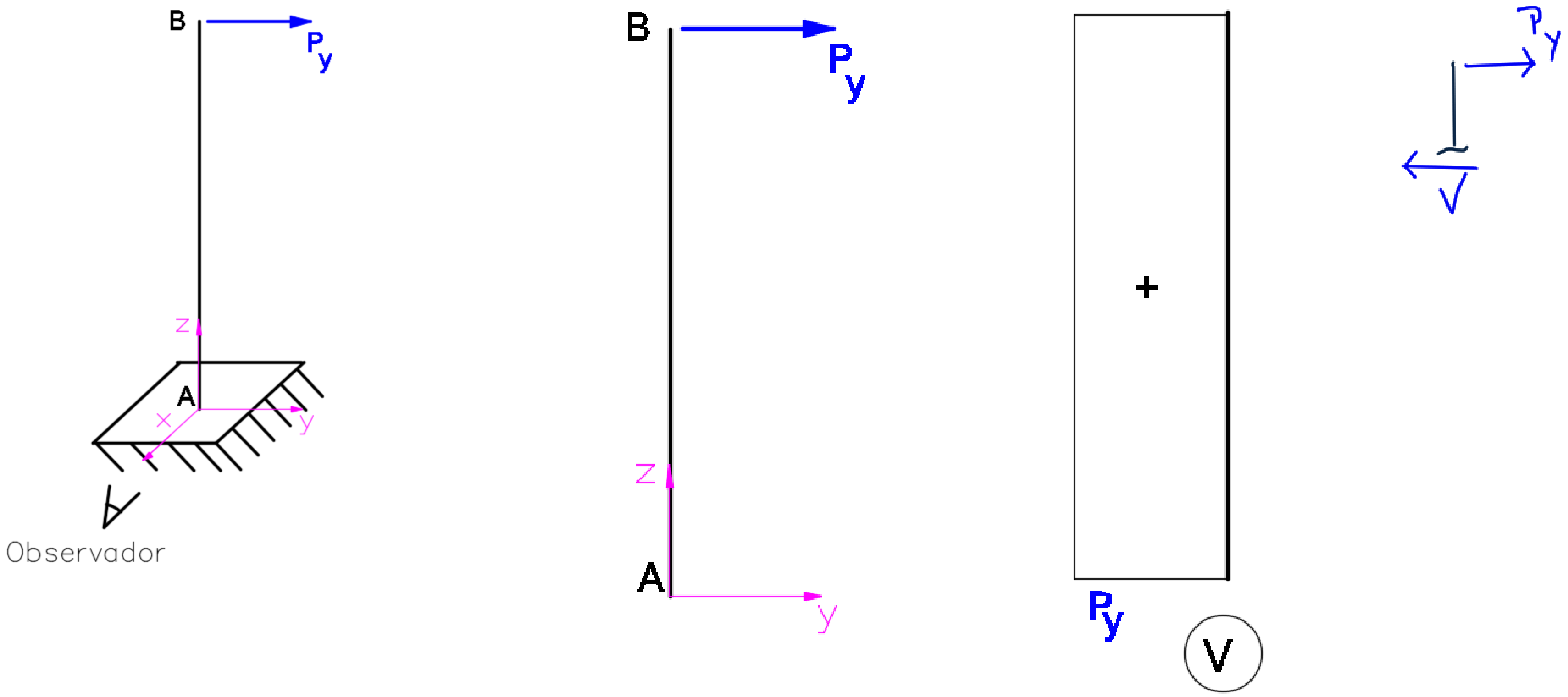
V > 0 **V < 0**



Convenção de sinais para diagramas

Cortantes > 0 se gira a barra no sentido horário

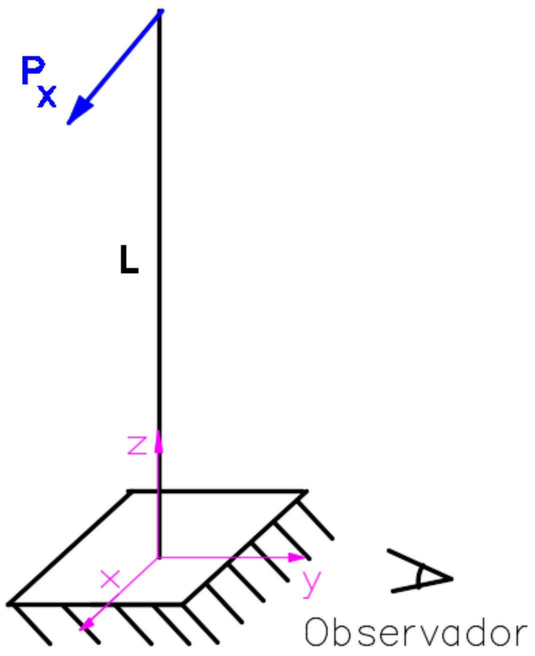
Visualizar a barra no plano pelo lado que está o eixo ortogonal positivo

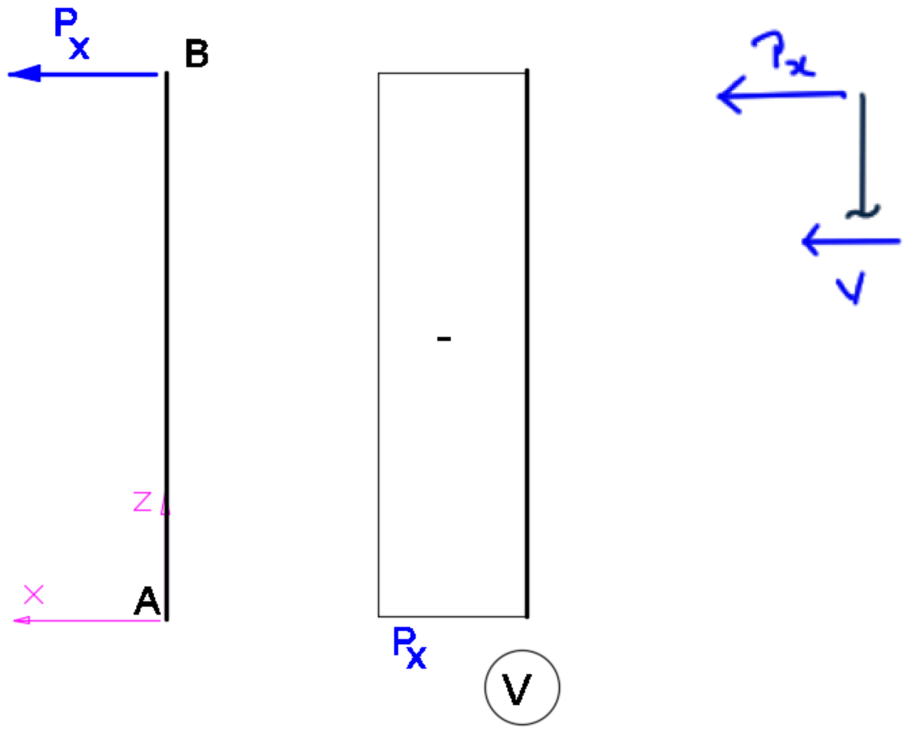


Convenção de sinais para diagramas

Cortantes > 0 se gira a barra no sentido horário

Visualizar a barra no plano pelo lado que está o eixo ortogonal positivo

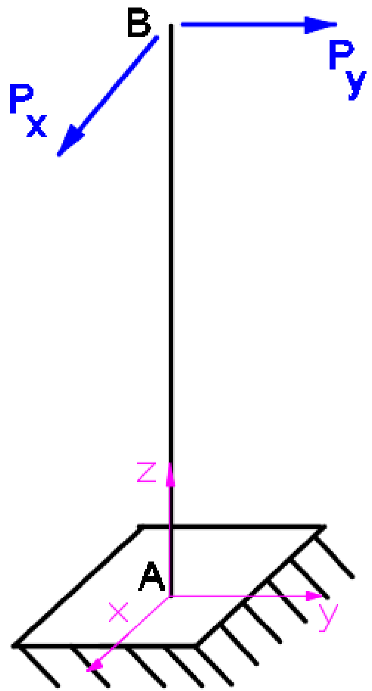


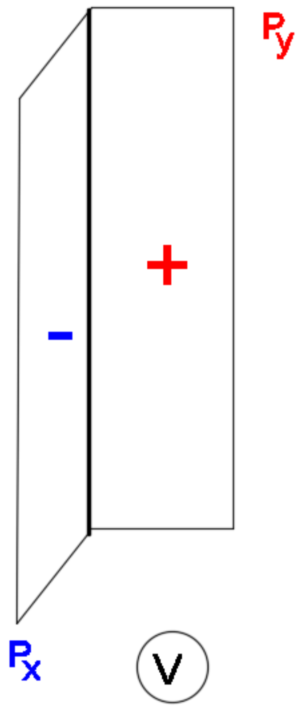


Convenção de sinais para diagramas

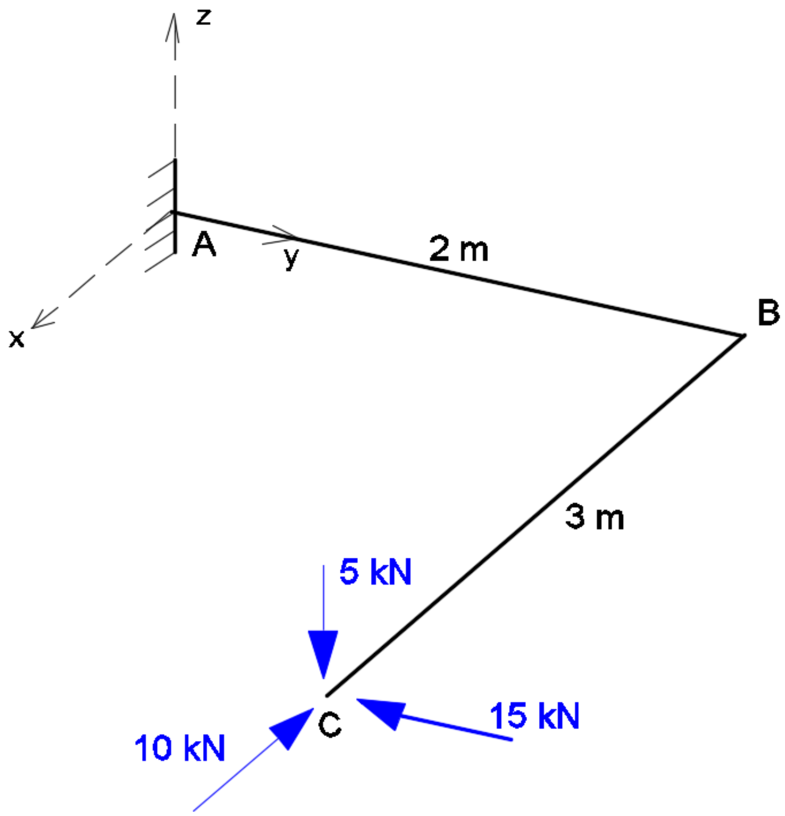
Cortantes > 0 se gira a barra no sentido horário

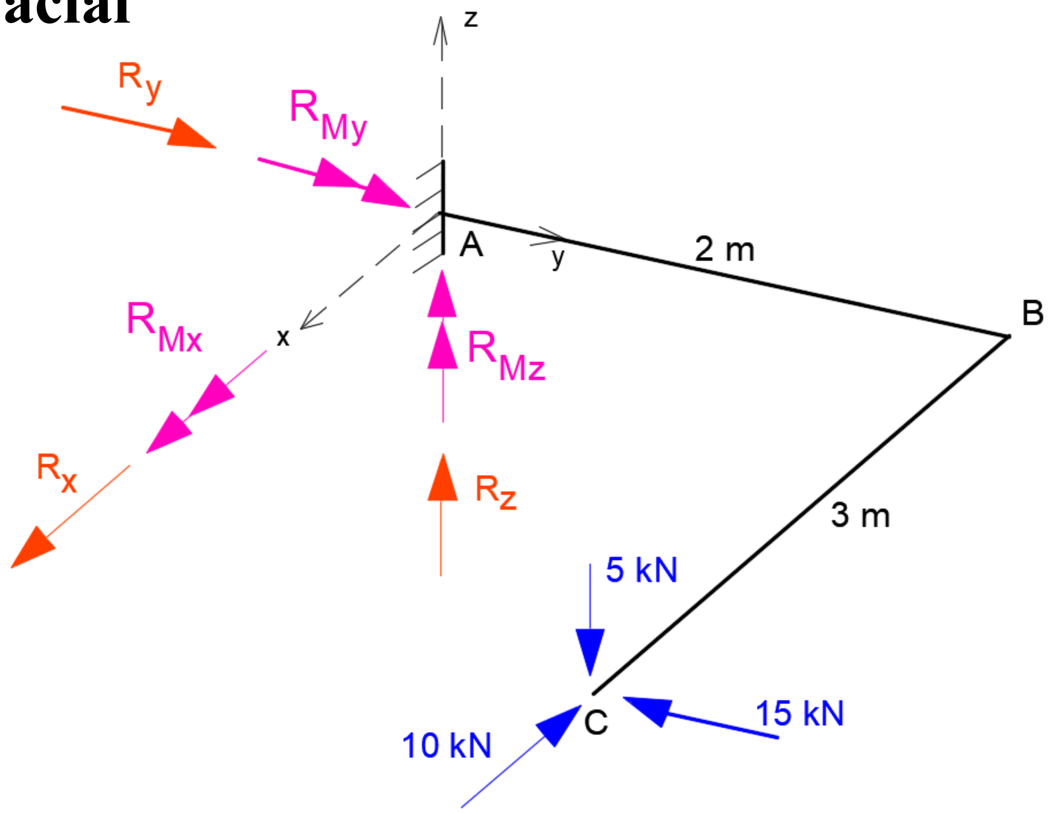
Visualizar a barra no plano pelo lado que está o eixo ortogonal positivo





Exemplo 4: Determinar os esforços na estrutura espacial

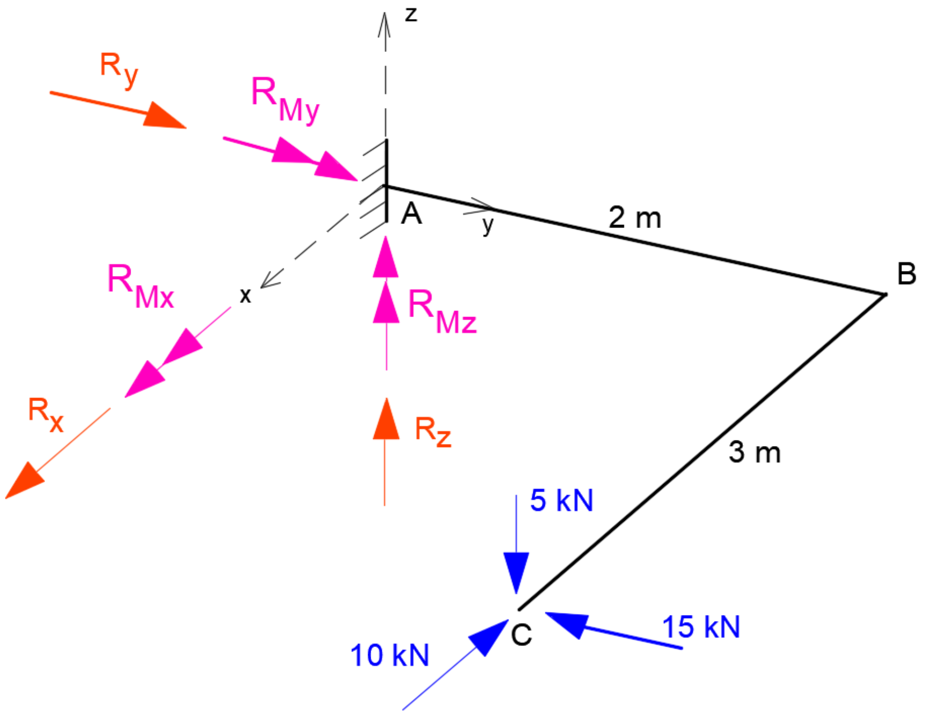




$$\sum F_x = 0: R_x - 10 = 0 \rightarrow R_x = 10\ kN$$

$$\sum F_y = 0: R_y - 15 = 0 \rightarrow R_y = 15\ kN$$

$$\sum F_z = 0: R_z - 5 = 0 \rightarrow R_z = 5\ kN$$



$$M_o = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M_x = (y_p - y_o)F_z - (z_p - z_o)F_y$$

$$M_y = (z_p - z_o)F_x - (x_p - x_o)F_z$$

$$M_z = (x_p - x_o)F_y - (y_p - y_o)F_x$$

$$\mathbf{F_x = -10\ kN; F_y = -15\ kN; F_z = -5kN}$$

$$\mathbf{x_p - x_0 = 3m} \qquad \mathbf{y_p - y_0 = 2m} \qquad \mathbf{z_p - z_0 = 0}$$

$$R_{My} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_y)_i = 0$$

$$R_{My} + (0m)(-10kN) - (3m)(-5kN) = 0$$

$$\mathbf{R_{My} = -15\ kNm}$$

$$R_{Mx} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_x)_i = 0$$

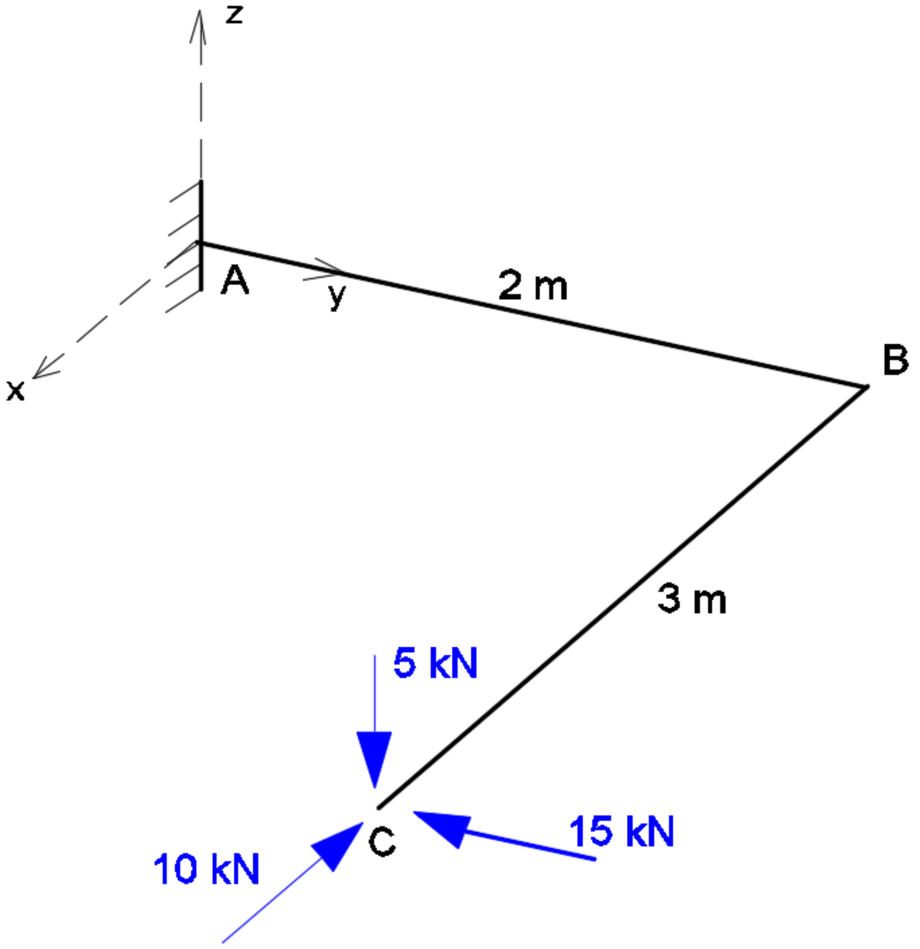
$$R_{Mx} + (2m)(-5kN) - (0m)(-15kN) = 0$$

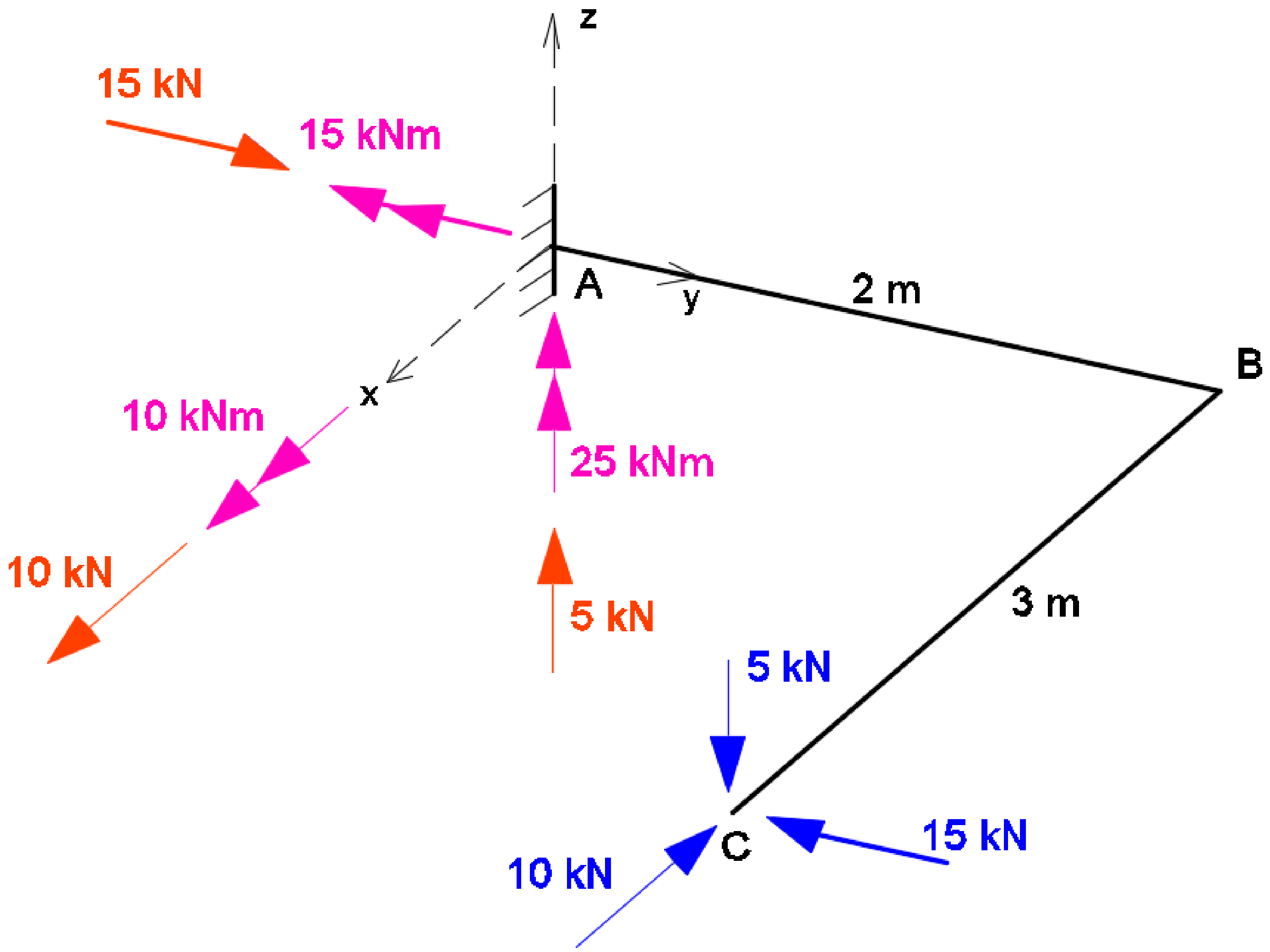
$$\mathbf{R_{Mx} = 10\ kNm}$$

$$R_{Mz} + \sum_{i=1}^{nr.\,forças} (M_z)_i = 0$$

$$R_{Mz} + (3m)(-15kN) - (2m)(-10kN) = 0$$

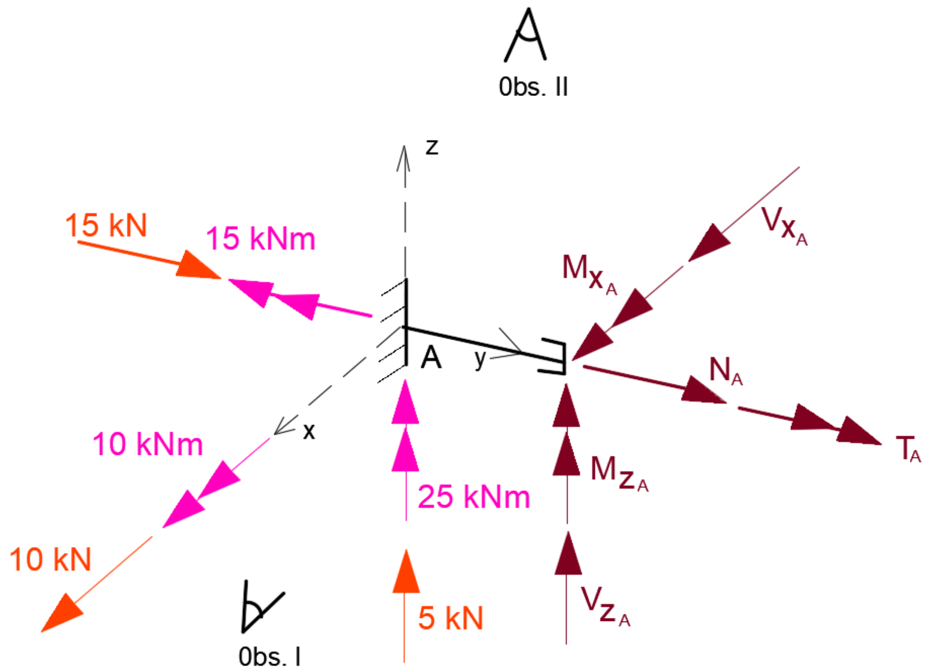
$$\mathbf{R_{My} = 25\ kNm}$$


z
x
A
y
2 m
B
3 m
5 kN
C
15 kN
10 kN


z
15 kN
15 kNm
A
y
2 m
B
x
10 kNm
25 kNm
10 kN
5 kN
3 m
5 kN
C
15 kN
10 kN

Esforços

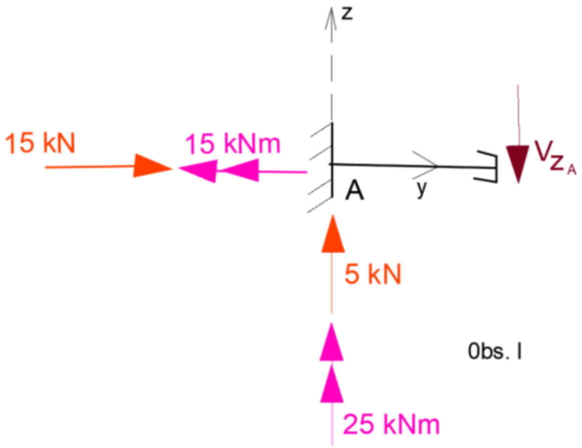
a) Corte junto ao engaste em A

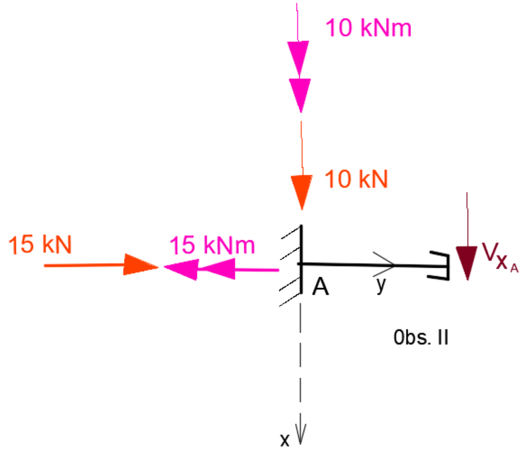


$$\Sigma M_{x_A} = 0$$
$$M_{x_A} + 10 = 0$$
$$M_{x_A} = -10 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_{y_A} = 0$$
$$T_A - 15 = 0$$
$$T_A = 15 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_{z_A} = 0$$
$$M_{z_A} + 25 = 0$$
$$M_{z_A} = -25 \text{ kNm}$$





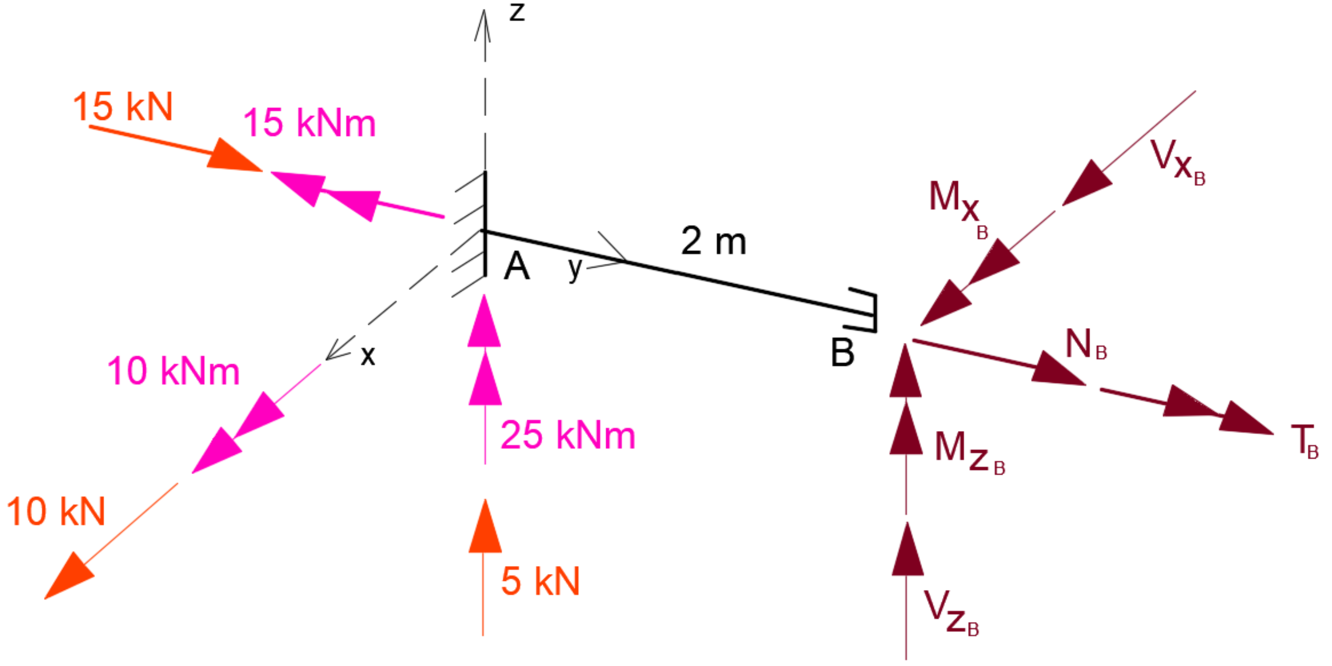
$$\Sigma F_z = 0$$
$$V_{z_A} - 5 = 0$$
$$V_{z_A} = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$
$$V_{x_A} + 10 = 0$$
$$V_{x_A} = -10$$

$$\Sigma F_{y_A} = 0$$
$$N_A + 15 = 0$$
$$N_A = -15 \text{ kN}$$

Exemplo 4

b) Corte junto a B



N_b, V_{zb}, V_{xb}:
idem a A

$\Sigma M_y = 0$

$T_B - 15 = 0$

$T_B = 15$ kNm

$\Sigma M_x = 0$

$M_{xB} + 10 - 5 \cdot 2 = 0$

$M_{xB} = 0$

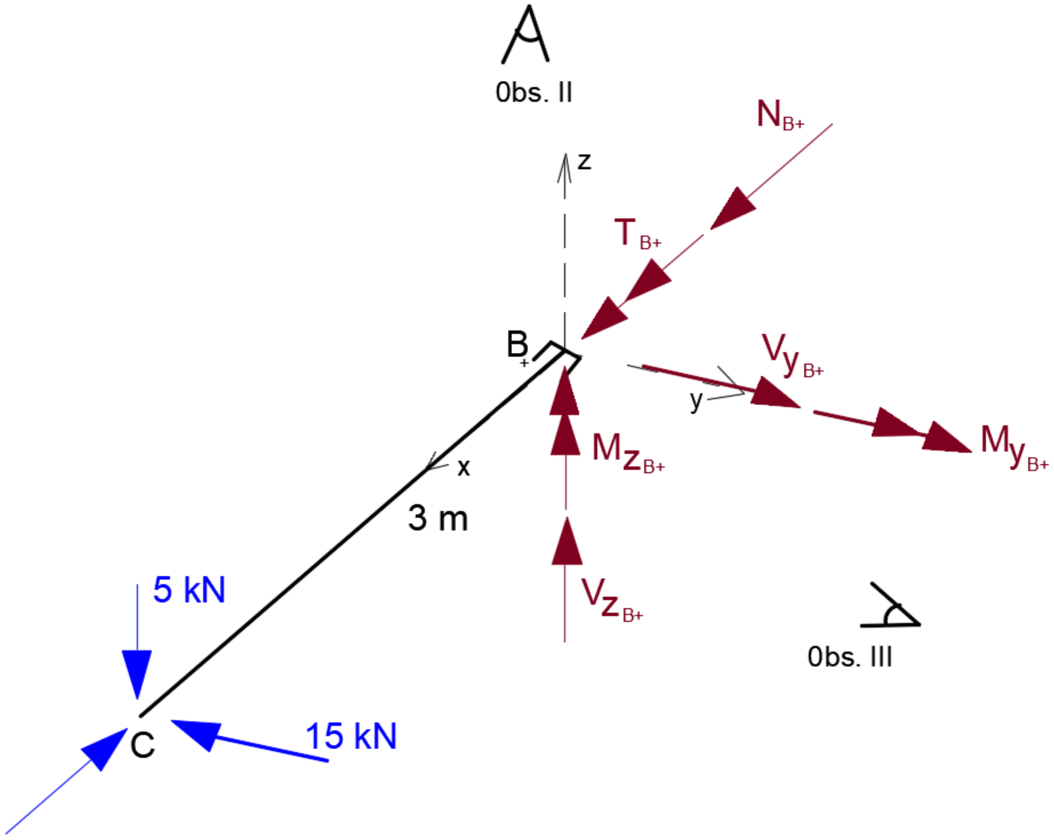
$\Sigma M_{zB} = 0$:

$M_{zB} + 25 + (10) \cdot 2 = 0$

$M_{zB} = -45$ kNm

Exemplo 4

c) Corte junto a B+



$$\Sigma M_{y_{B+}} = 0$$

$$M_{y_{B+}} + 5 \cdot 3 = 0$$

$$M_{y_{B+}} = -15 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_{z_{B+}} = 0$$

$$M_{z_{B+}} - 15 \cdot 3 = 0$$

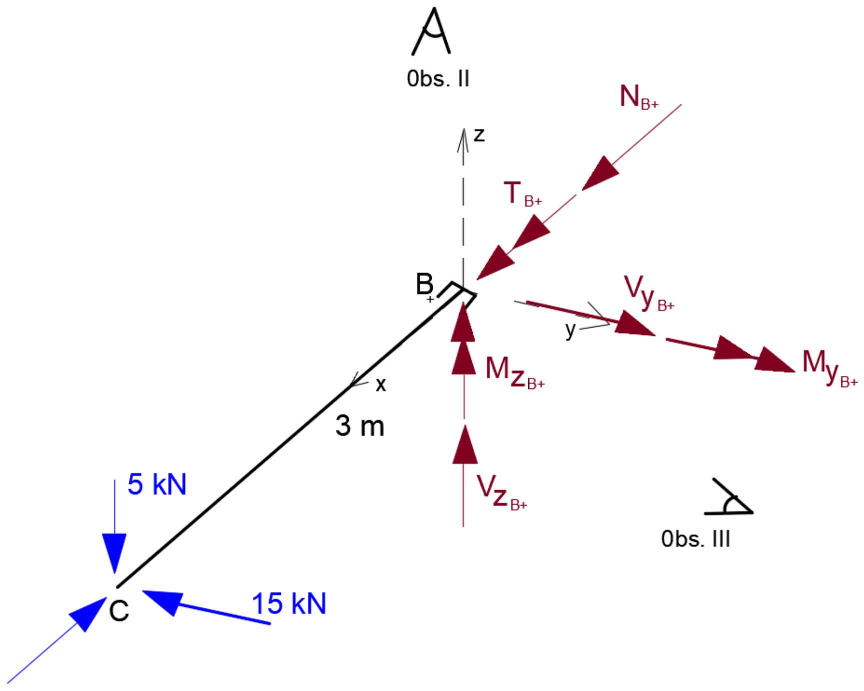
$$M_{z_{B+}} = 45 \text{ kNm}$$

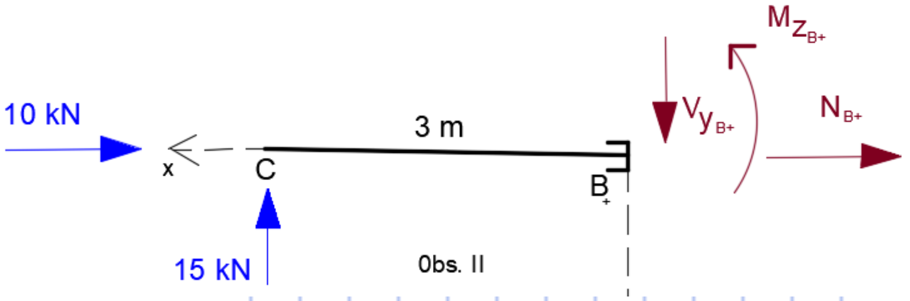
$$\Sigma M_{x_{B+}} = 0$$

$$T_{B+} = 0$$

Exemplo 4

c) Corte junto a B+





$\Sigma F_x = 0$

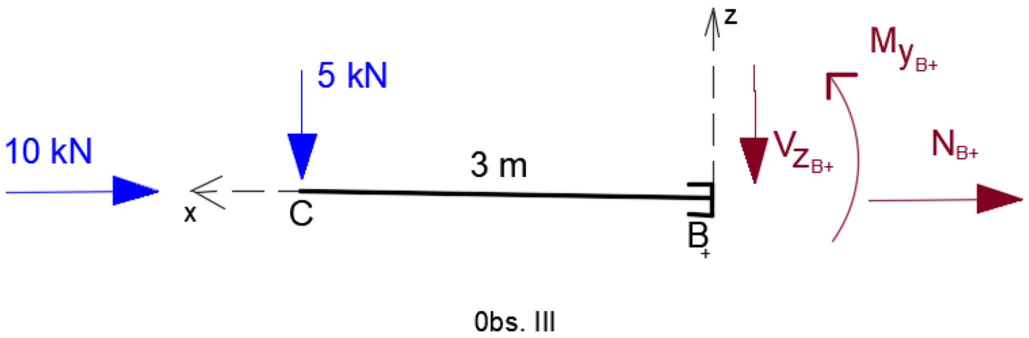
$N_{B+} = -10\ kN$

$\Sigma F_y = 0$

$V_{y_{B+}} = 15\ kN$

$\Sigma M_{B+} = 0$

$M_{z_{B+}} = 15 \cdot 3 = 45\ kNm$



$\Sigma F_z = 0$

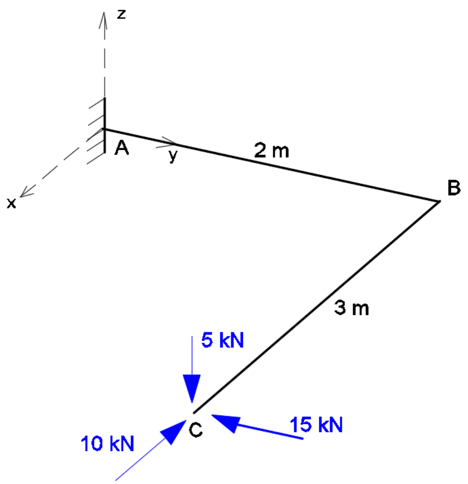
$V_{z_{B+}} = -5\ kN$

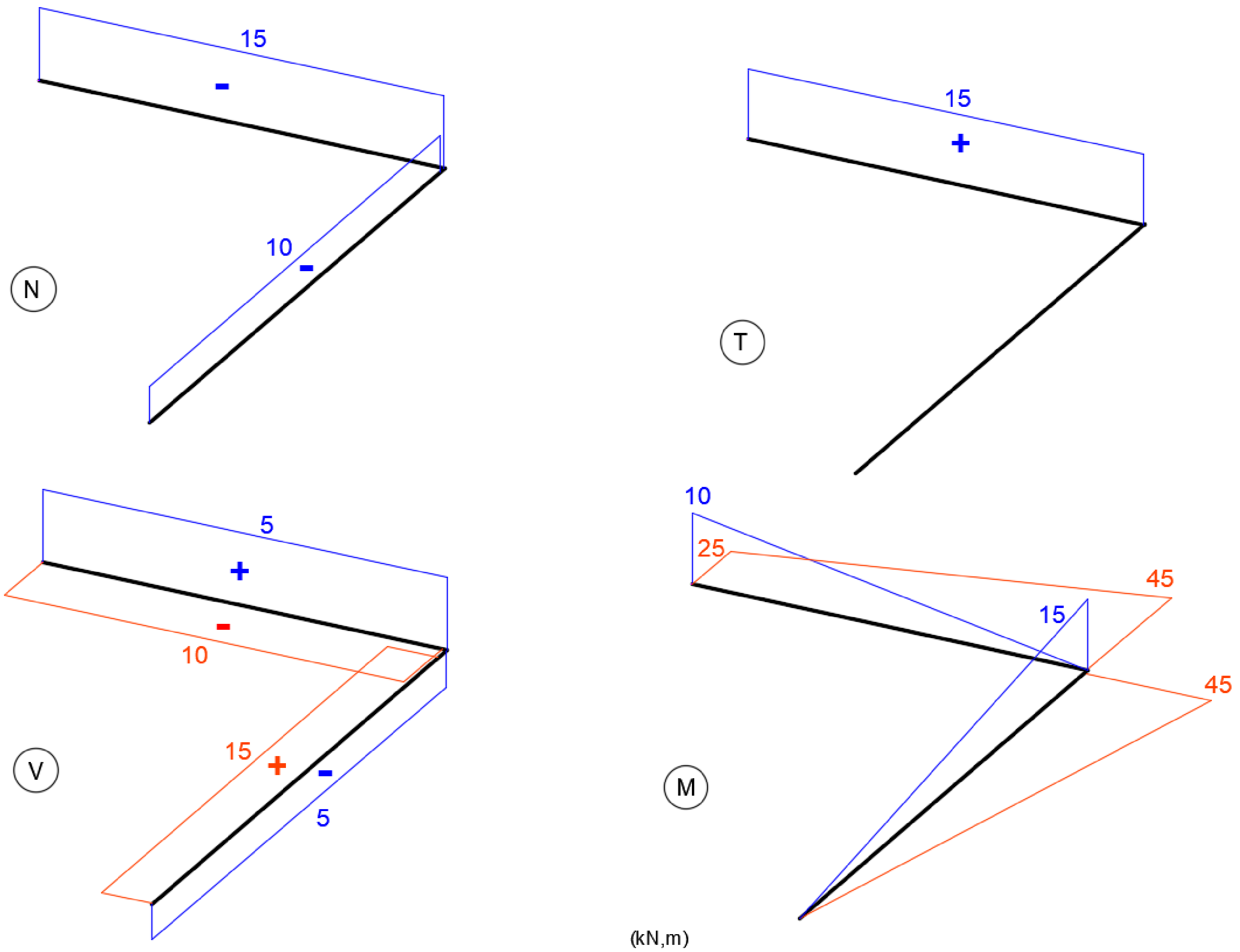
$\Sigma M_{y_{B+}} = 0$

$M_{y_{B+}} = -3 \cdot 5 = -15\ kNm$

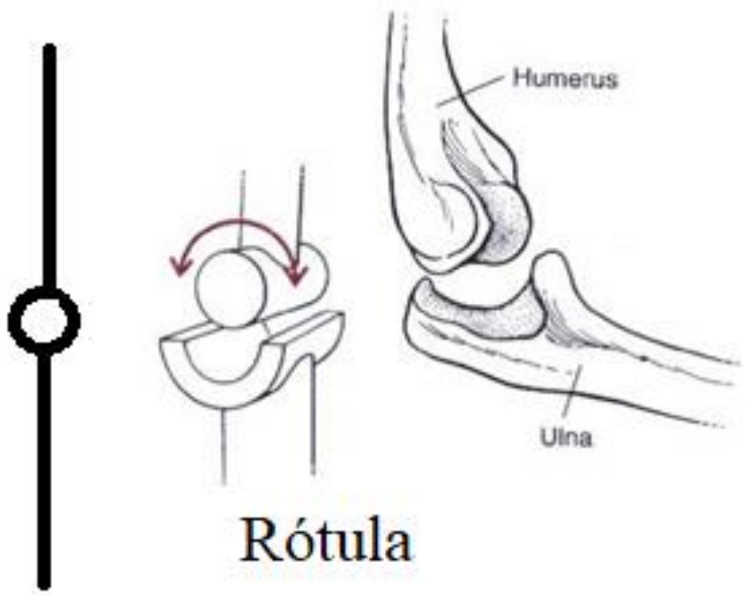
Exemplo 4

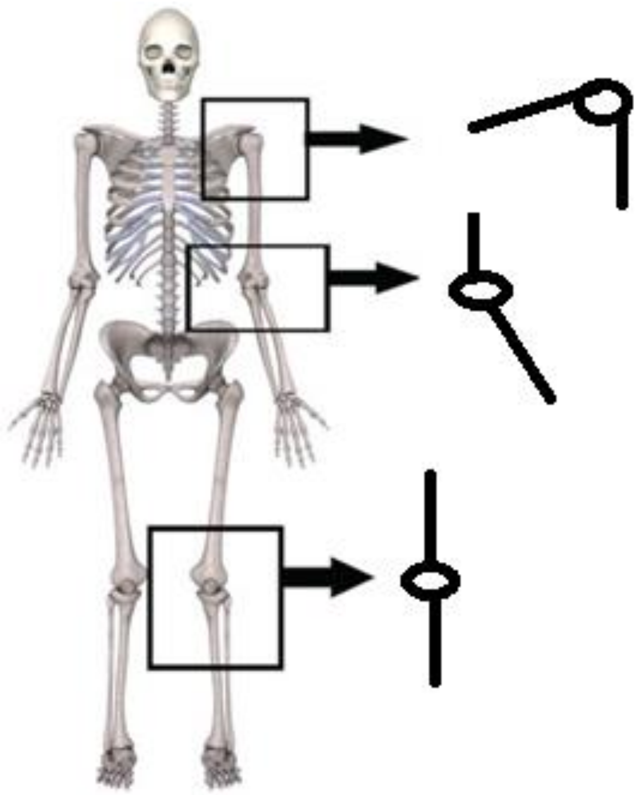
d) Diagramas





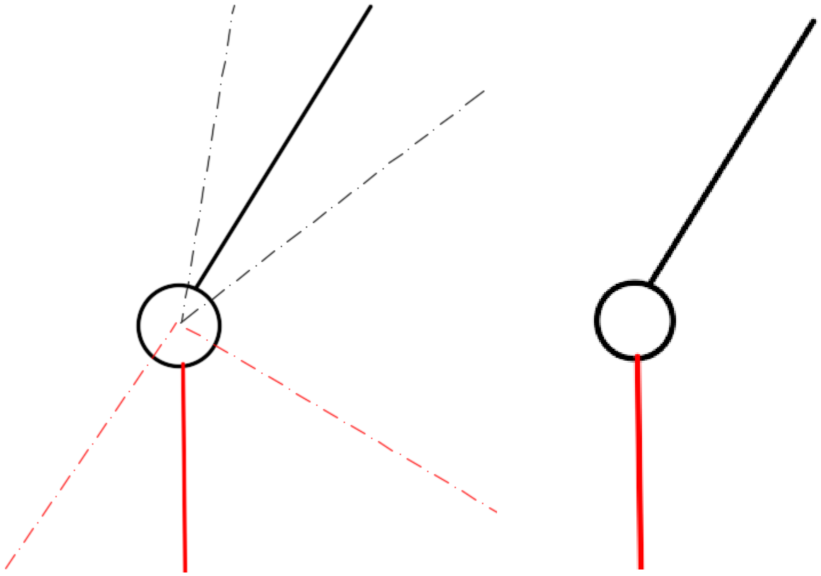
RÓTULAS



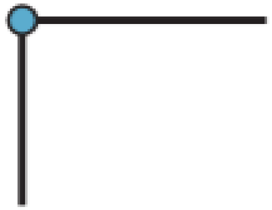


Conecta barras
Permite giro livre das barras

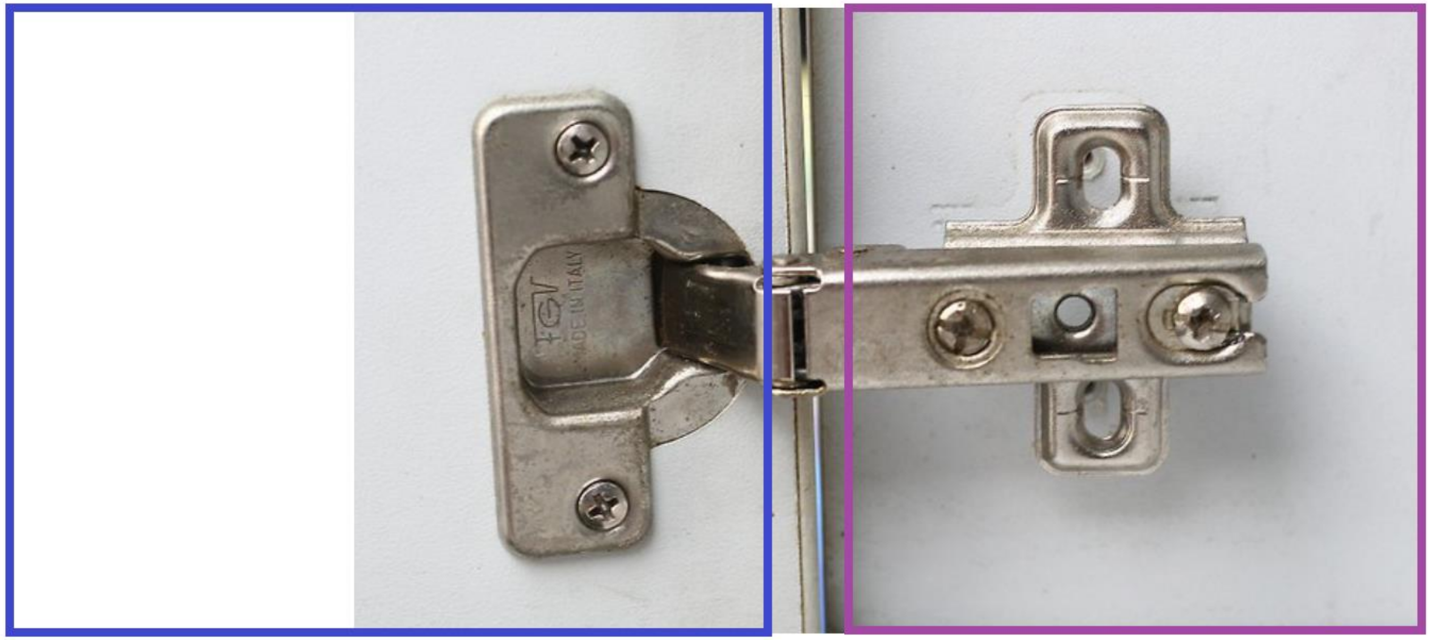
Rótulas



Conecta barras
Permite giro livre das barras

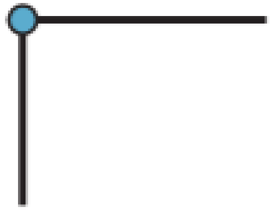


Rótulas

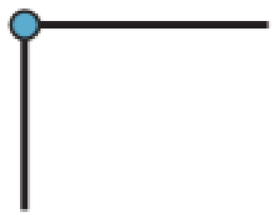


DOBRADIÇA

Conecta barras
Permite giro livre das barras

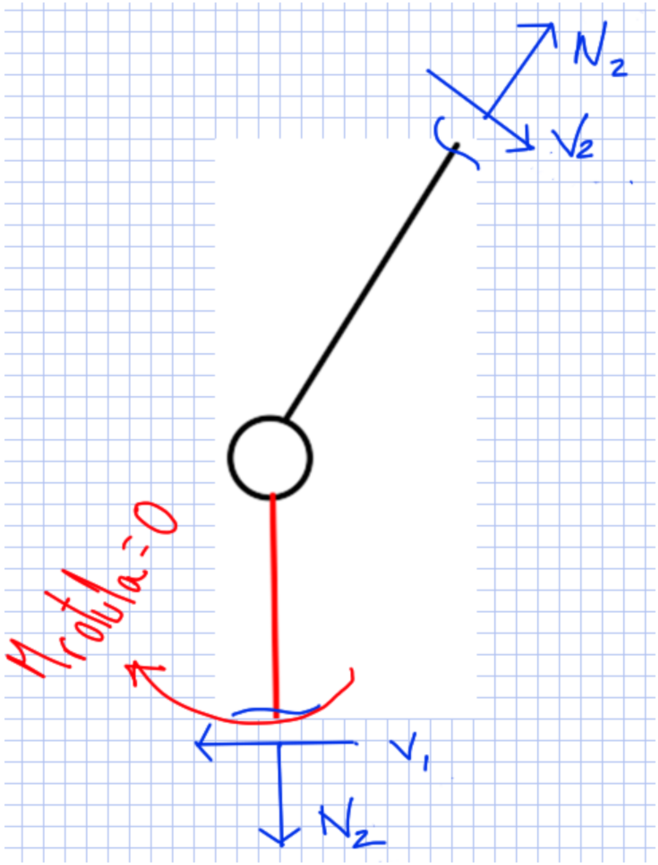


Rótulas



Conecta barras
Permite giro livre das barras

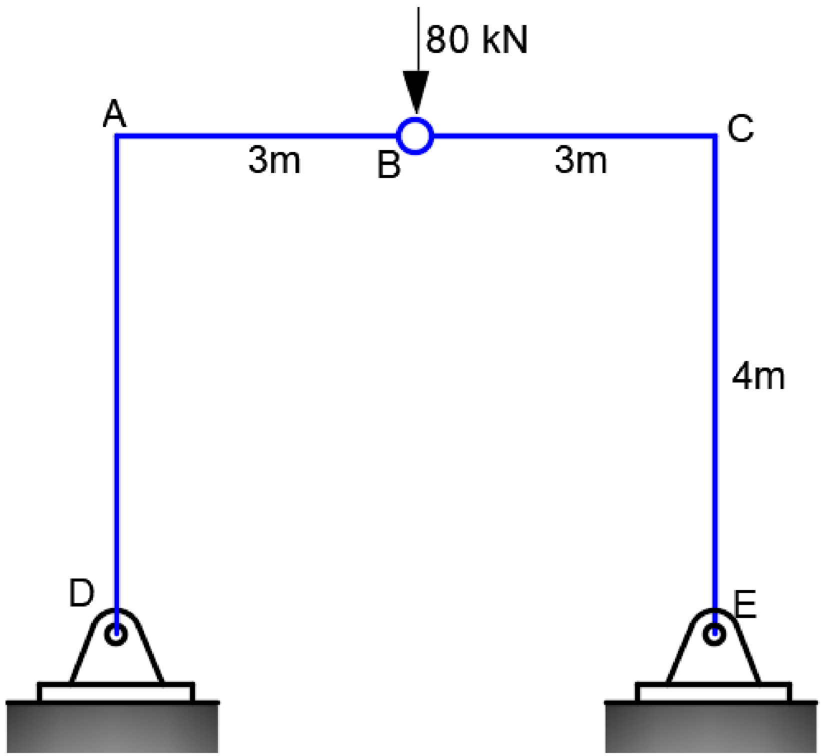
Não há momento fletor das barras junto à seção que liga à rotula

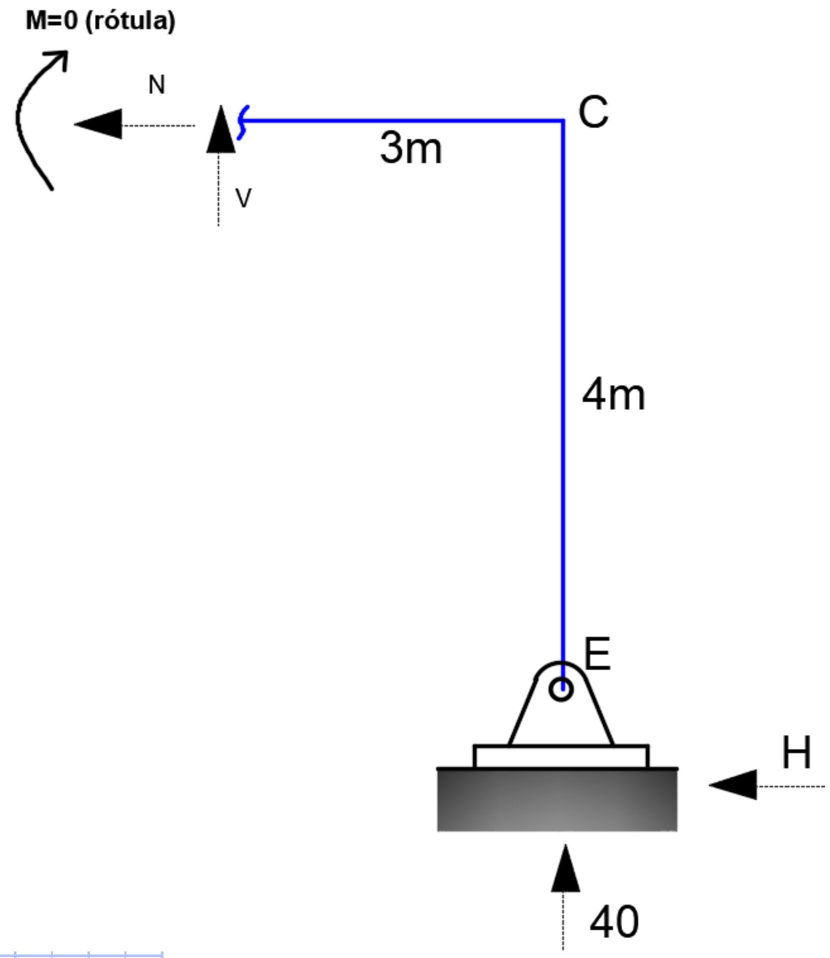


Corta-se a estrutura e usa-se a equação adicional:

$$\boldsymbol{M_{rótula} = 0}$$

Exemplo 5 Obter esforços no pórtico



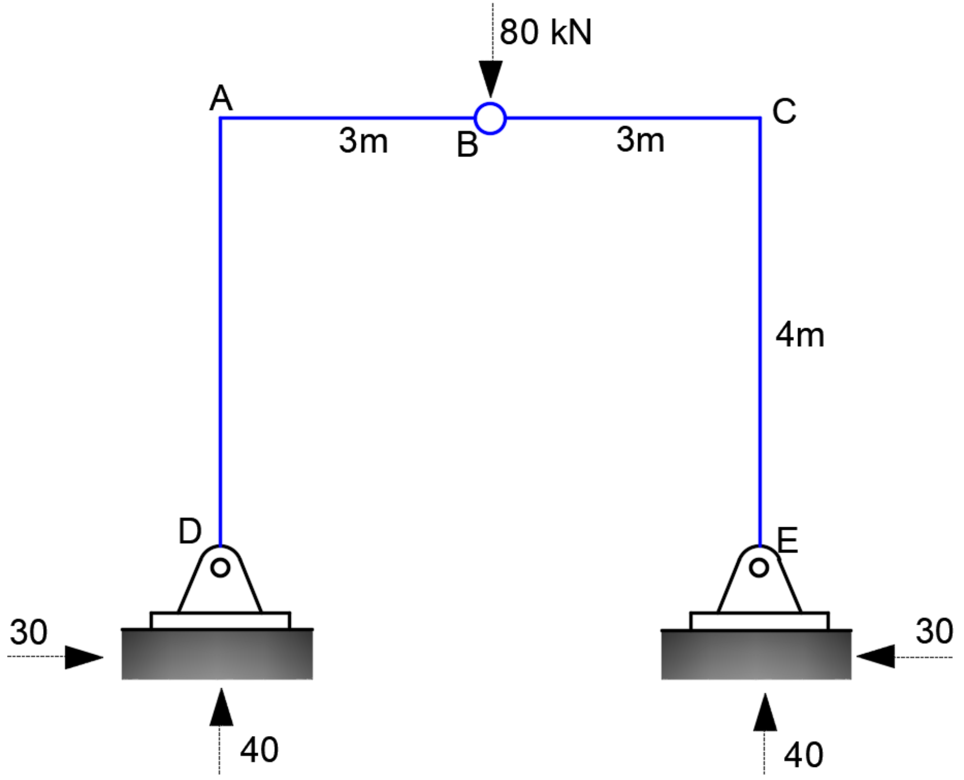


$\sum M_B = 0$

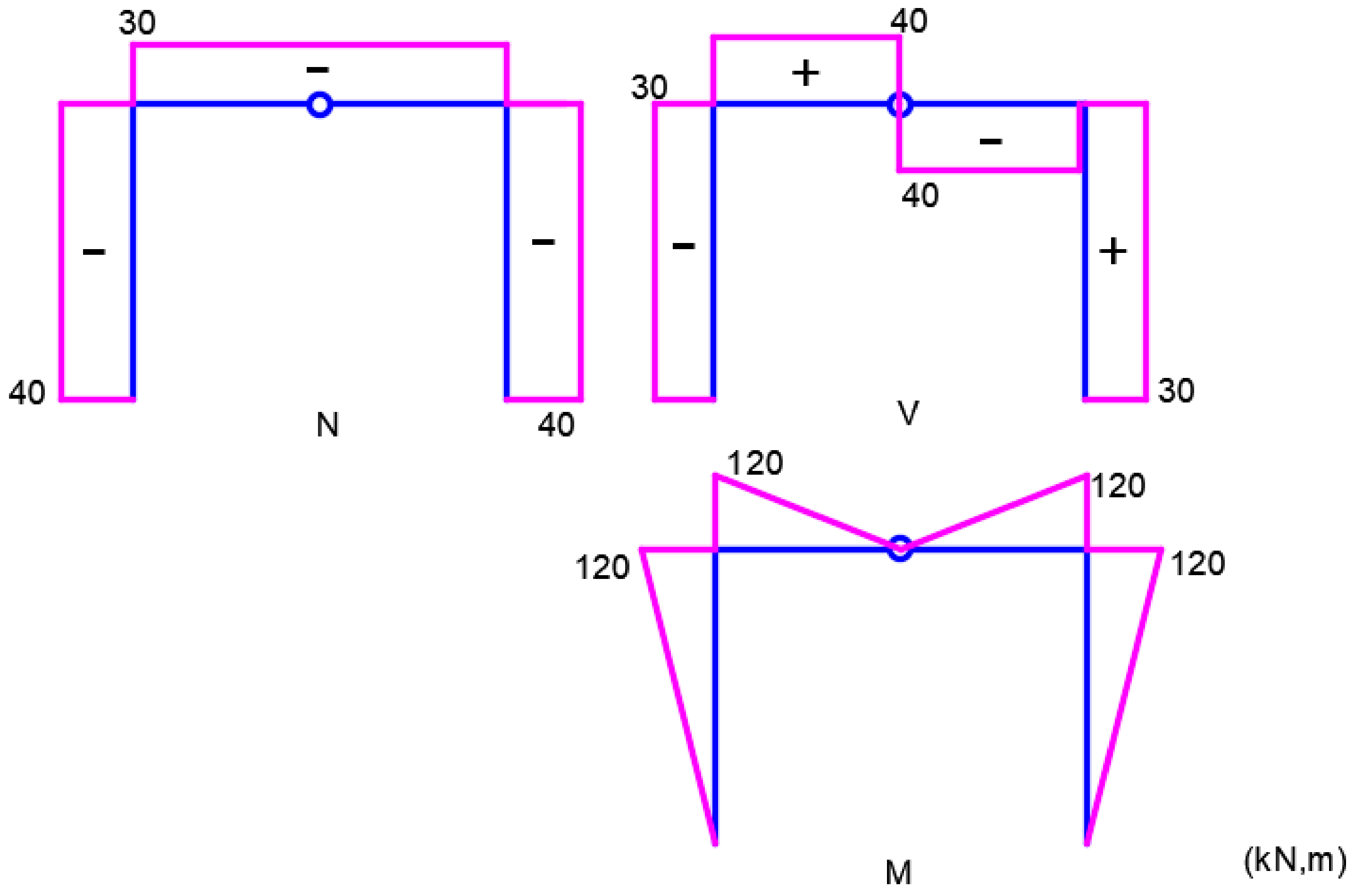
$M + 4 \cdot H = 40 \cdot 3$

0

$H = 30\,kN$


80 kN
A
B
C
3m
3m
4m
D
E
30
30
40
40

Diagramas


30
40
−
−
−
40
N
40
30
40
+
−
40
−
+
30
V
120
120
120
120
M
(kN,m)