# PEF 3307

## Resistência dos Materiais

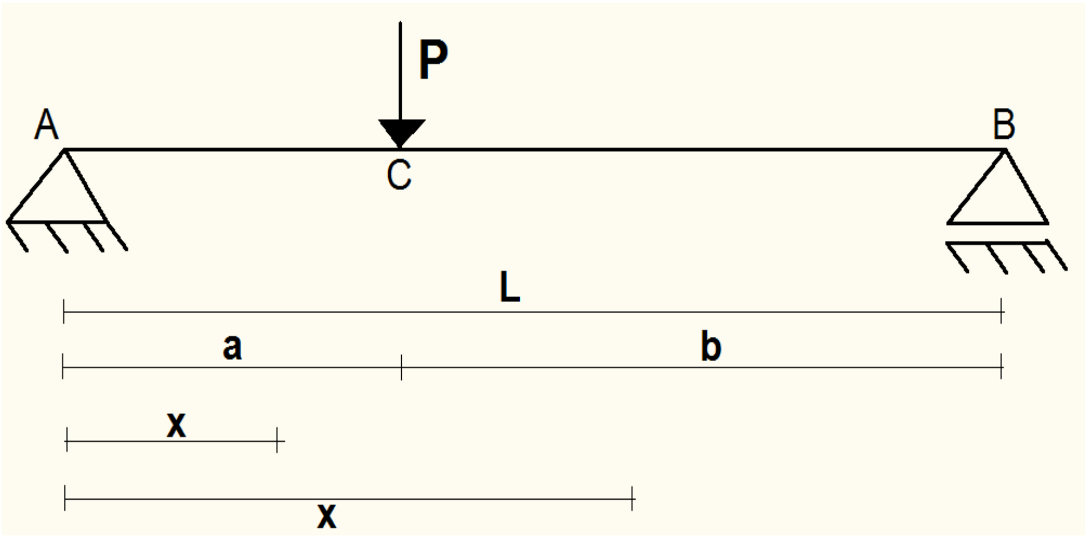
AULA 03

Valerio SA, valerio.almeida@usp.br

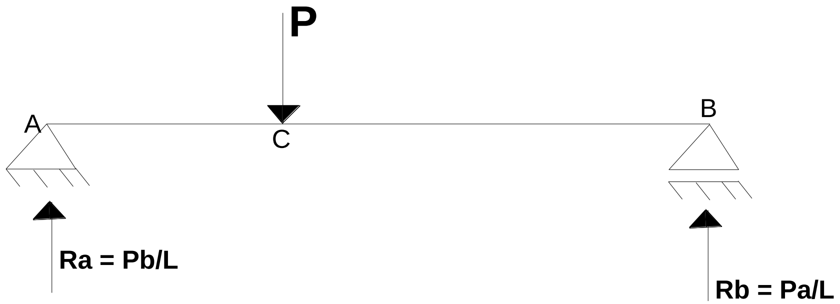
29/Abril/2021

# Exemplo 16: Viga bi apoiada






## 1. Obter reações:




## 2. Esforços em cada trecho:

Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho 1: $0 < x < a$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_a - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a$$

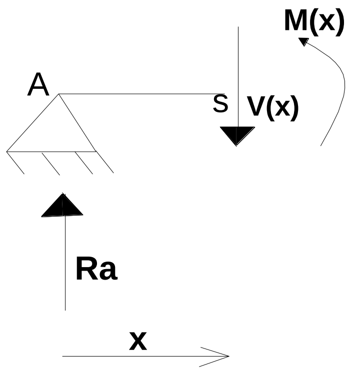
$V(x) = P \cdot b / L$ (constante)

$$\sum M_s = 0$$

$$M(x) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x$$

$M(x) = P \cdot b \cdot x / L$ (reta)

Para x = a : $M(a) = P \cdot b \cdot a / L$



# Exemplo 16: Viga bi apoiada

Trecho 2: $a < x < L$

$$\sum F_y = 0$$

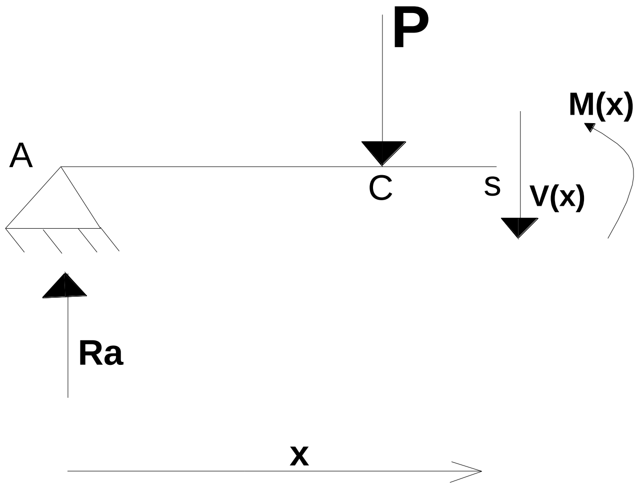
$$R_a - P - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - P = P \cdot b / L - P = P(b/L - 1) = -P \cdot a / L$$

$V(x) = -P \cdot a / L$ (constante)

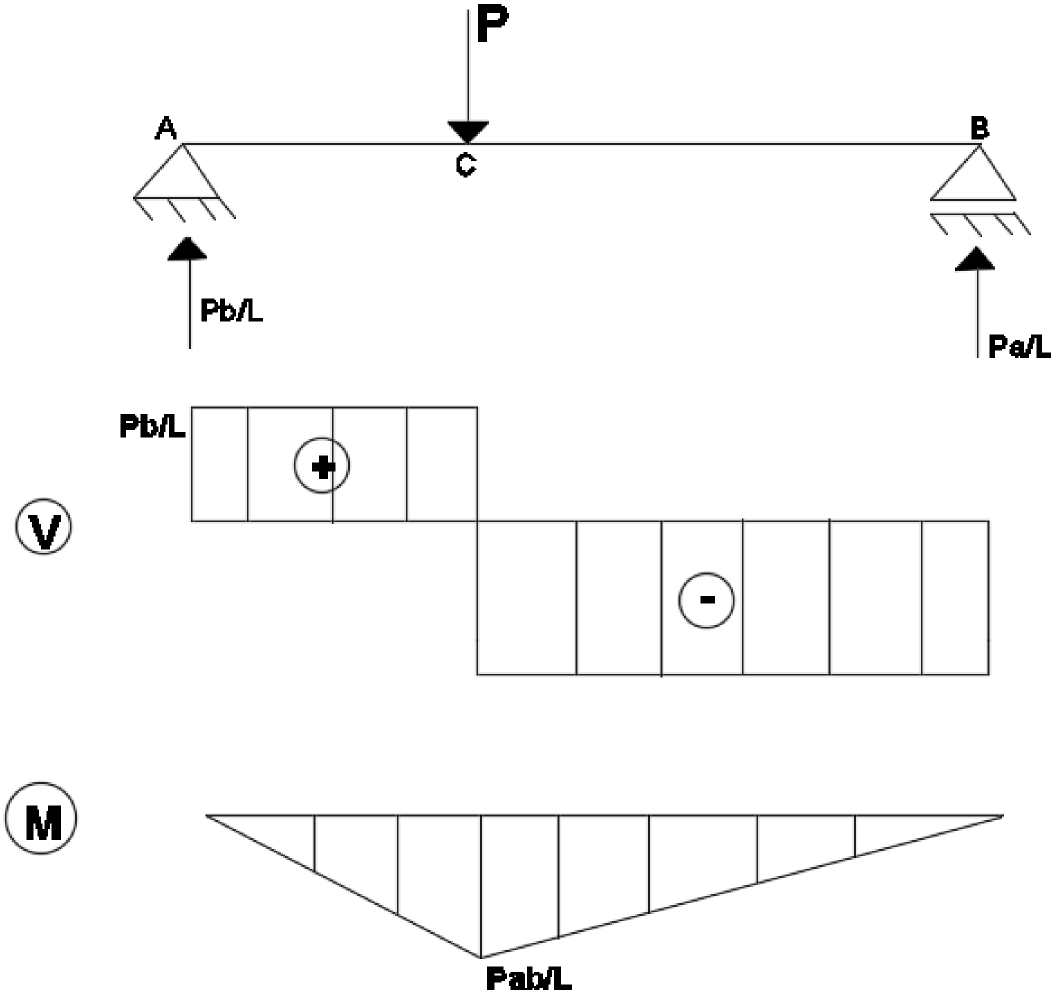
$$\sum M_s = 0$$

$$M(x) + P \cdot (x - a) - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = P \cdot b \cdot x / L - P(x - a)$$

$M(x) = P \cdot a - (P \cdot a / L) \cdot x$ (reta)

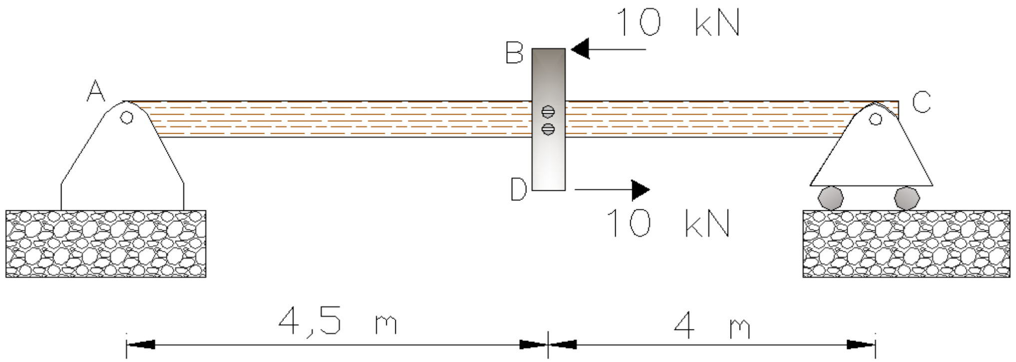



## 3. Diagramas:



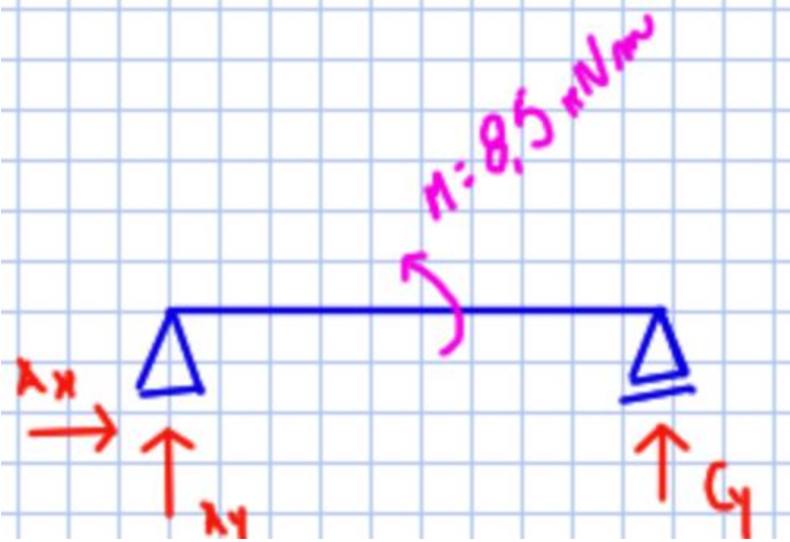
# Exemplo 17: Viga bi-apoiada e momento concentrado*

Determinar os esforços solicitantes (M,V e N) na viga AC, sob a ação do binário indicado, onde a barra rígida BD tem dimensão de 85 cm.




$$\sum F_X = 0: \rightarrow A_x = 0; \sum M_C = 0: \rightarrow 8,5 . A_y = 10 . 0,85 \rightarrow$$

$$A_y = 1 \quad kN \quad (\uparrow); C_y = -1 \quad kN \quad (\downarrow)$$




*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

Dois trechos para realizar os cortes:

*Trecho 1:* $0 < x < 4{,}5$

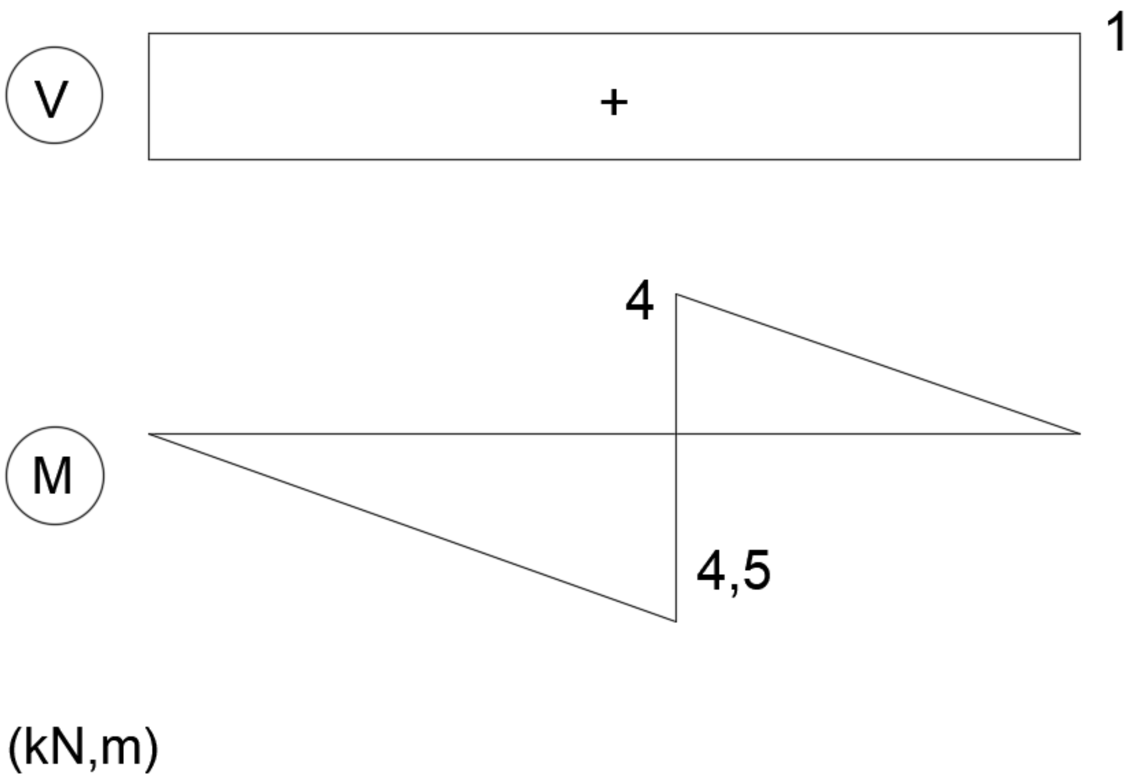
$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x$

Valores nos extremos do intervalo:

*Trecho 2:* $4{,}5 < x < 8{,}5$

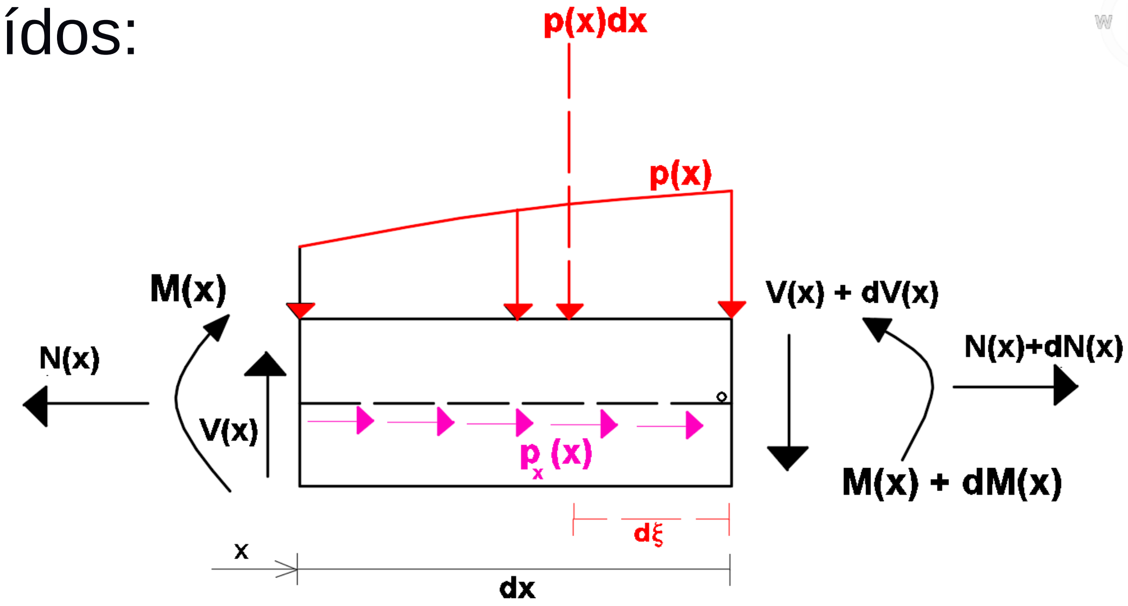
$\sum F_y = 0: \rightarrow V(x) = 1 \rightarrow V(x) = 1; \sum M_S = 0: \rightarrow M(x) = x - 8{,}5$

## Diagramas:



# Equações Diferenciais de Equilíbrio

Seja um trecho da barra sujeito a carreg. distribuídos:




## a) Paralelo ao eixo, $p_x$

$$\sum F_x = 0 \qquad dN(x) + p_x(x)dx = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -p_x(x)$$

## b) Perpendicular ao eixo, p

$$\sum F_y = 0$$

$$V - p(x) \cdot dx - (V + dV) = 0$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\sum M_o = 0$$

$$(M + dM) + [p(x) \cdot dx] \cdot d\xi - M - V \cdot dx = 0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$$

# Equação Diferencial de Equilíbrio



$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \qquad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

a) Caso p(x) = 0

Sem carga distribuída no trecho $x_1 < x < x_2$

$V(x) = C_1 = cte \rightarrow$ Função (diagrama) de esforço cortante constante

$M(x) = C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Função (diagrama) de momento fletor linear

b) Caso p(x) = p = cte

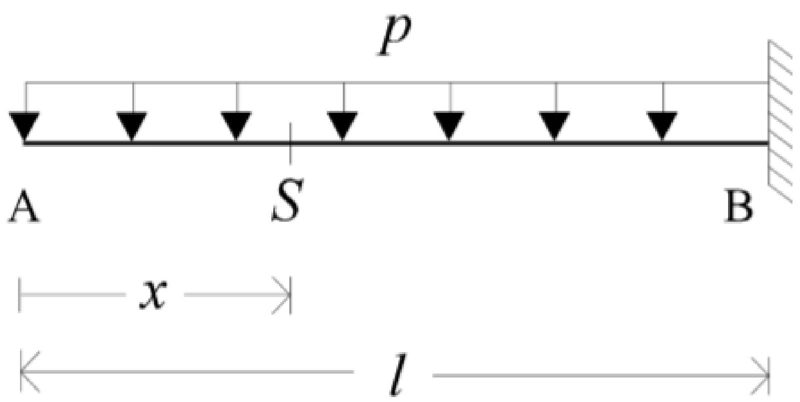
Carga distribuída uniforme no trecho $x_1 < x < x_2$

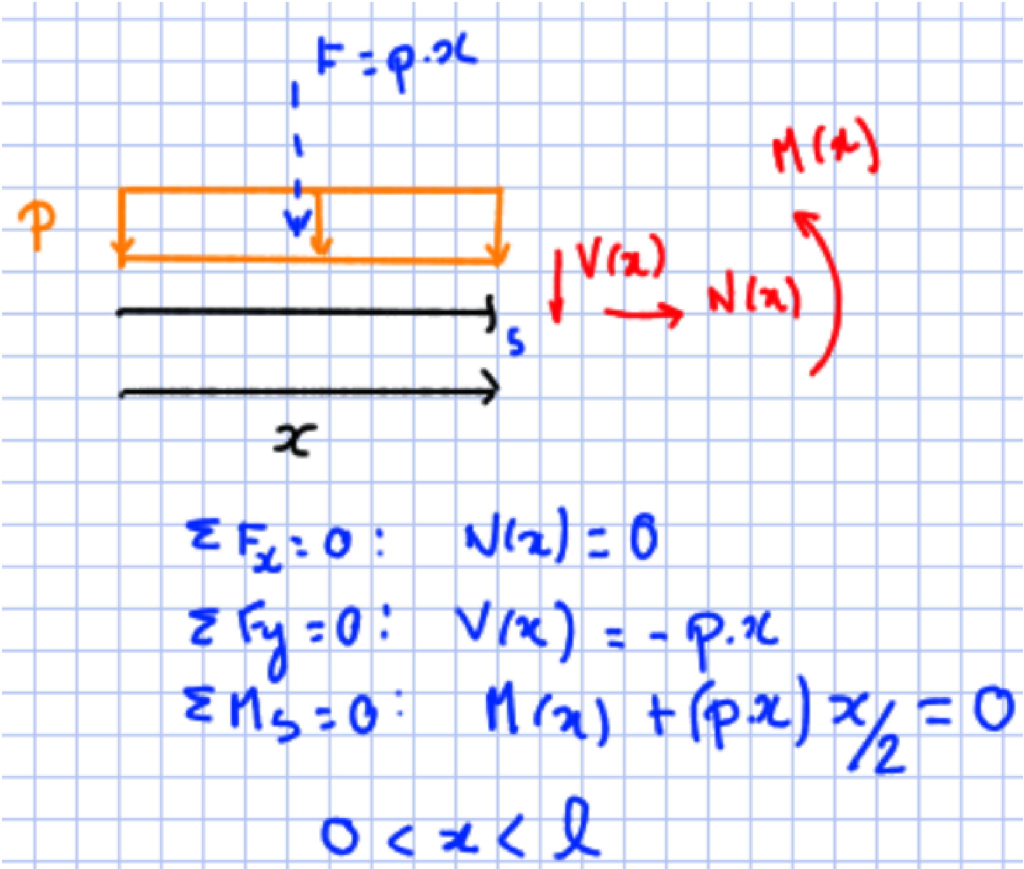
$V(x) = -\,p\,x + C_1 \rightarrow$ Função (diagrama) de esforço cortante linear

$M(x) = -\,p\,\frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \rightarrow$ Função (diagrama) de momento fletor é parábola

c) Generalização para $\forall$ p(x) é imediata

# Exemplo 17: Carregamento distribuído constantemente



# Exemplo 17: Carregamento distribuído constantemente

Substituindo valores dos extremos do trecho:

- $V(x) = -px$

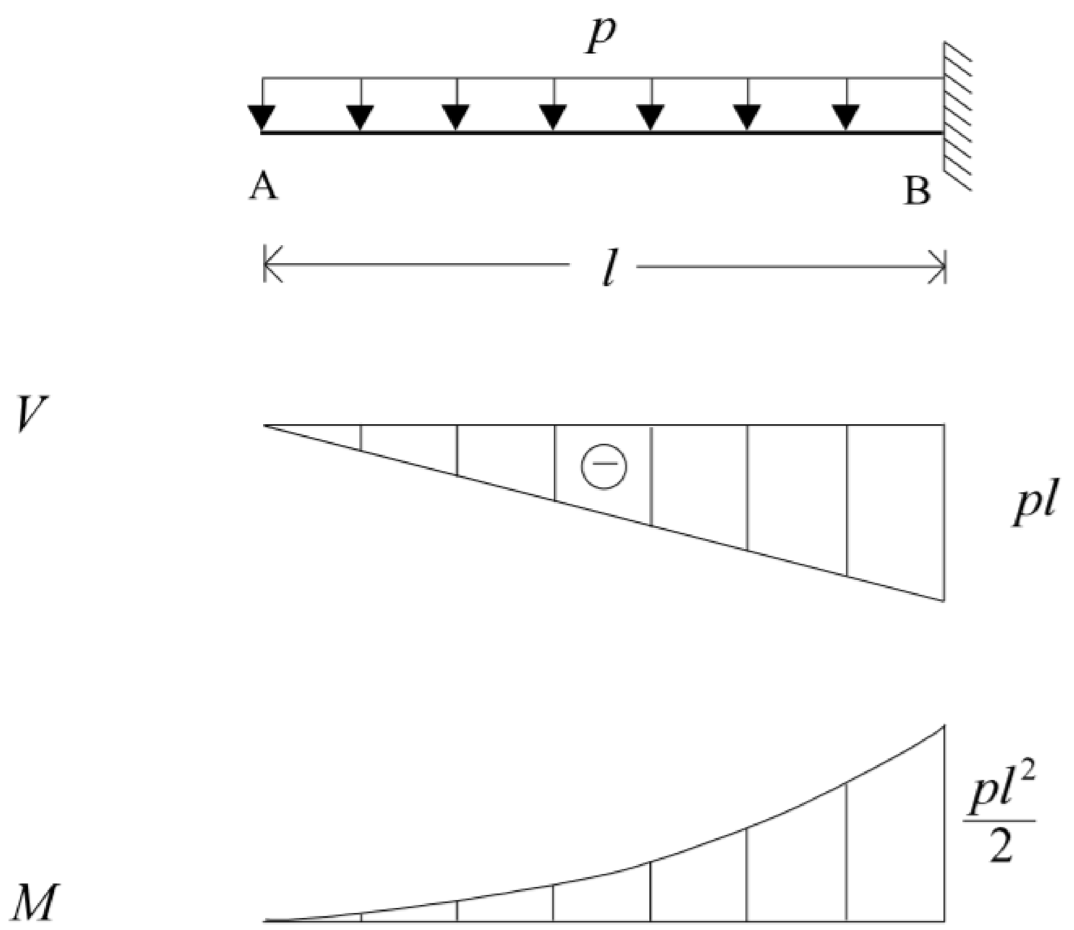
  $V(0) = 0$
  $V(l) = -pl$

- $M(x) = -\dfrac{px^2}{2}$

  $M(0) = 0$

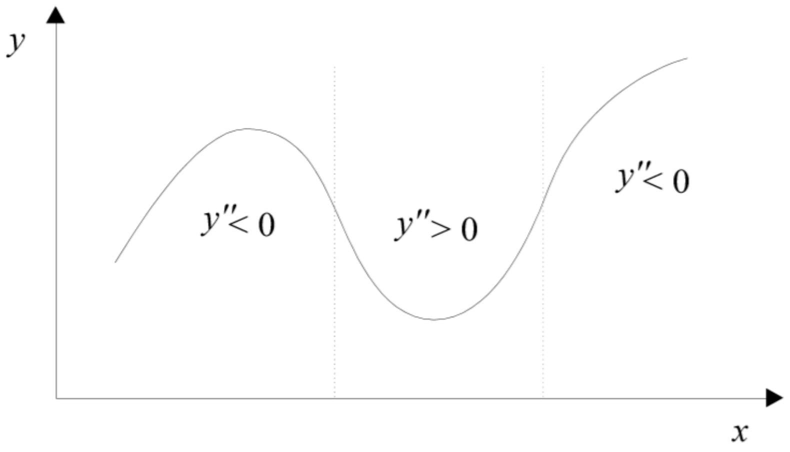
  $M(l) = -\dfrac{pl^2}{2}$

Diagramas:

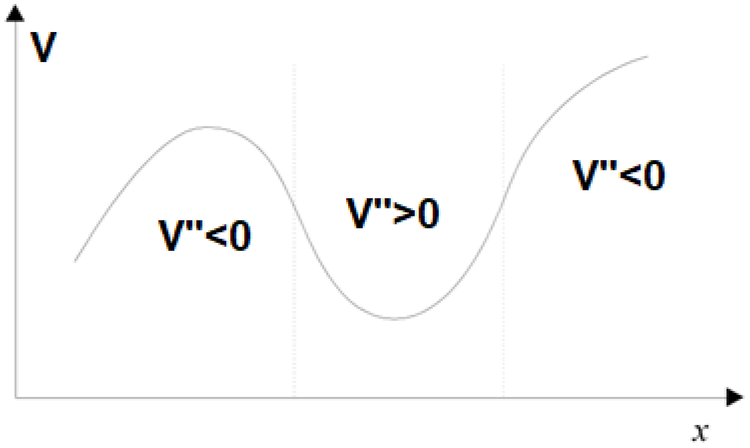


# Estudo da concavidade de funções

Lembrar do cálculo:

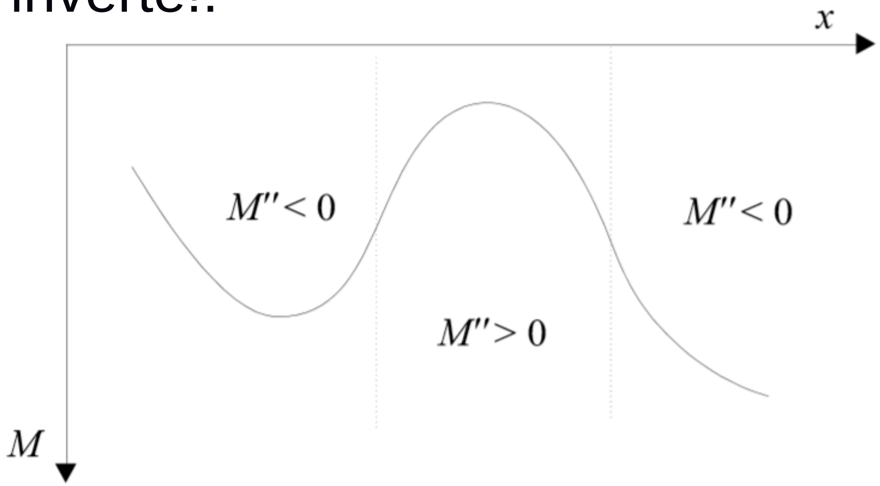



Para o cortante: imediato

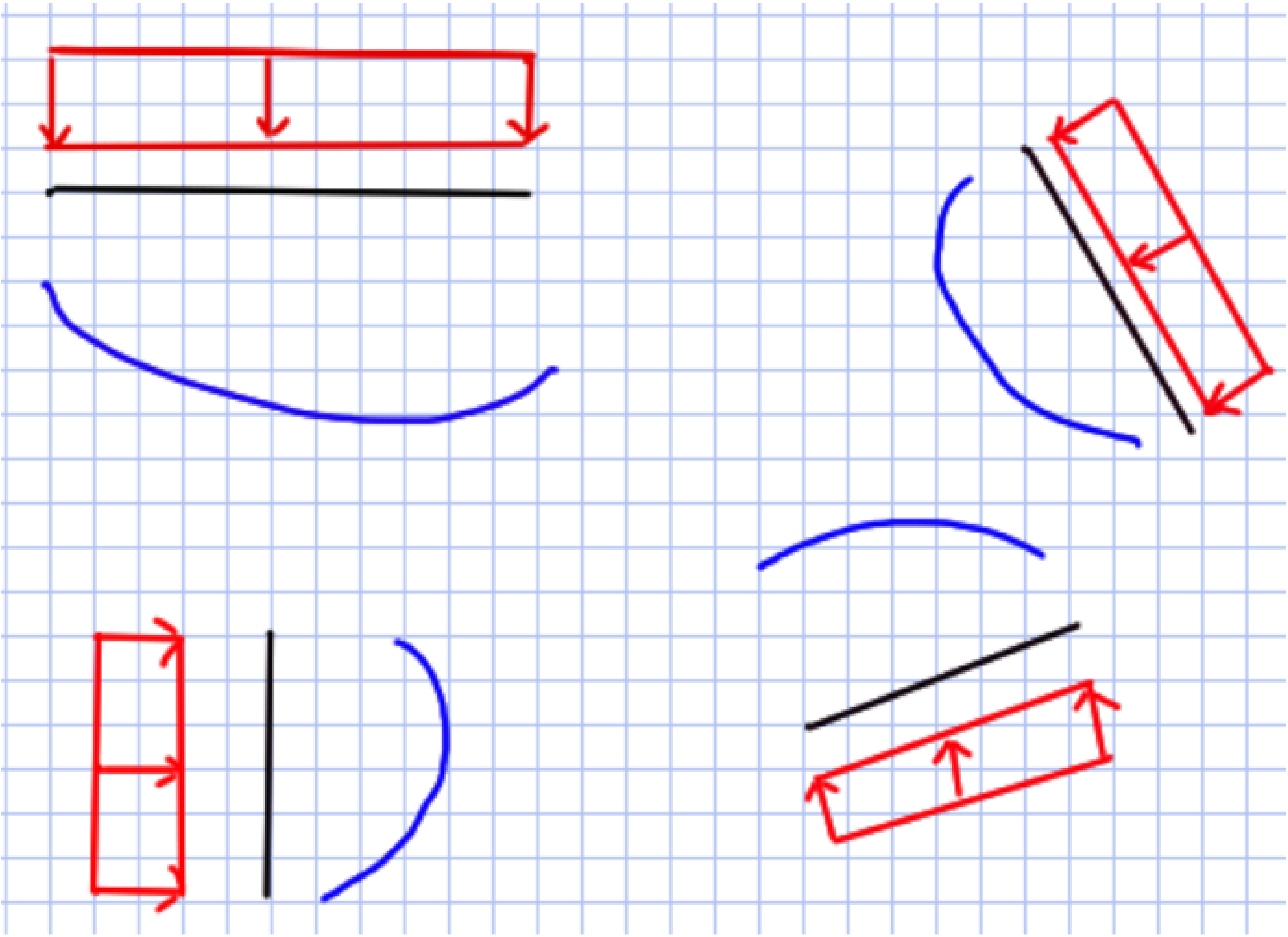



Para o momento, inverte!:

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x)$$



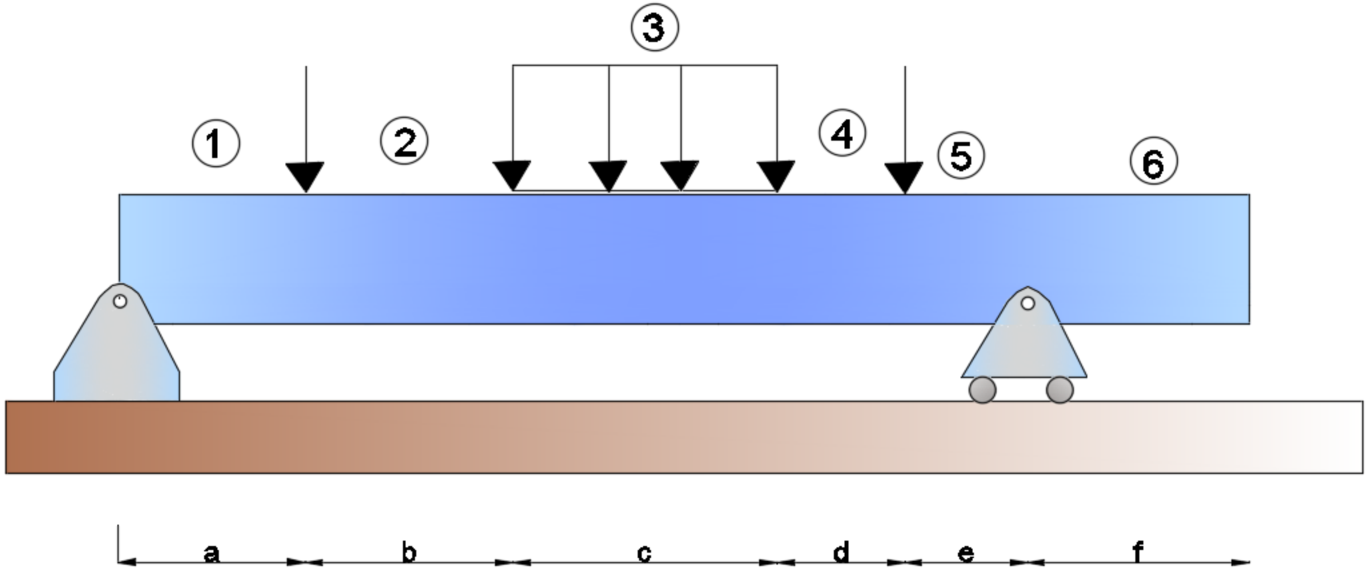
# Estudo da concavidade de funções



# DIAGRAMAS DE ESFORÇOS CORTANTE E MOMENTO FLETOR (DCM)

## Roteiro para obter V(x) e M(x):

1. Dividir estrutura em trechos onde não há alteração de ações/reações;




Trecho 1: $0 < x < a$

Trecho 2: $a < x < a + b$

Trecho 3: $a + b < x < a + b + c$

Trecho 4: $a + b + c < x < a + b + c + d$

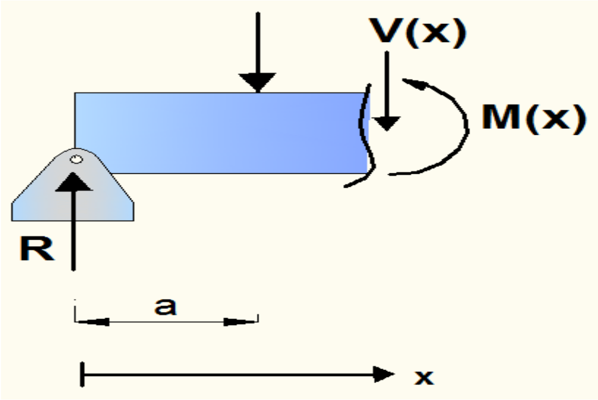
Trecho 5: $a + b + c + d < x < a + b + c + d + e$

Trecho 6: $a + b + c + d + e < x < a + b + c + d + e + f$

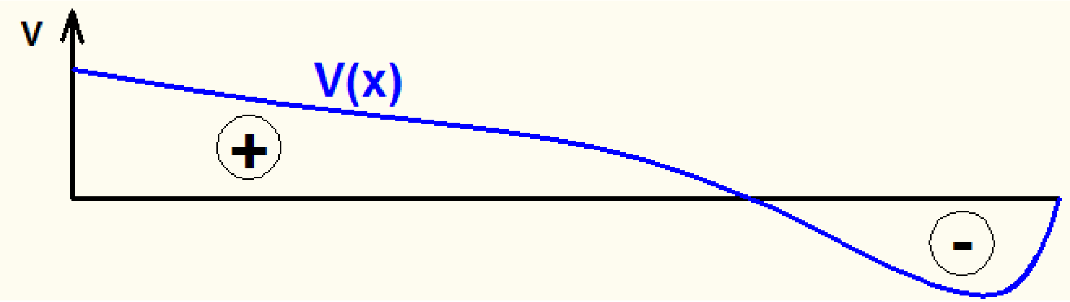
# DIAGRAMAS DE ESFORÇOS CORTANTE E MOMENTO FLETOR (DCM)

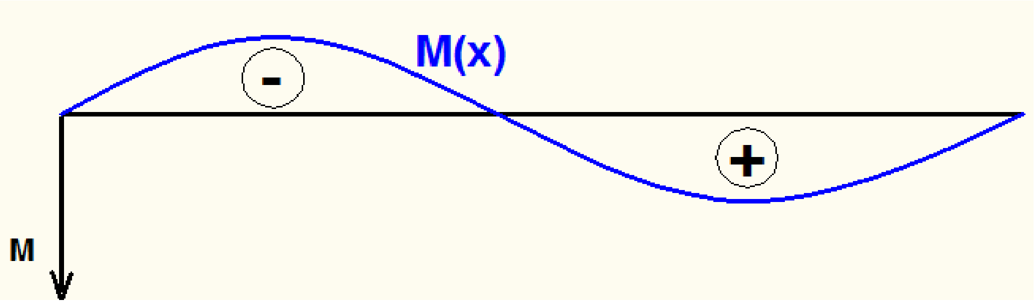
## Roteiro para obter V(x) e M(x):

2. Fazer um corte no trecho, usar equações de equilíbrio $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_S = 0$

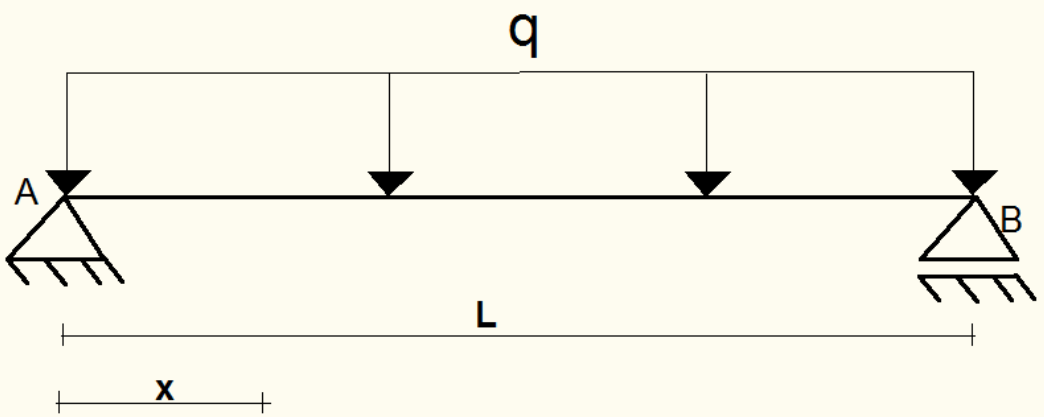



3. Desenhar V(x) e M(x) seguindo convenção

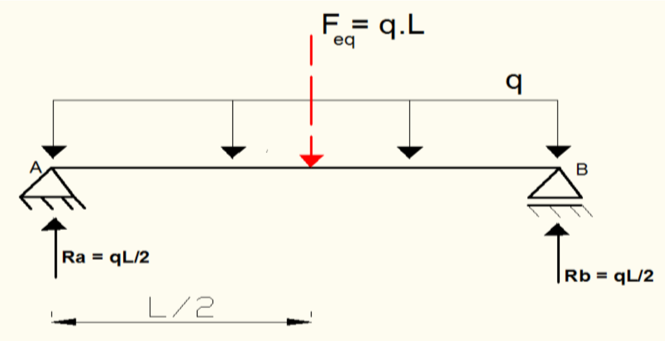


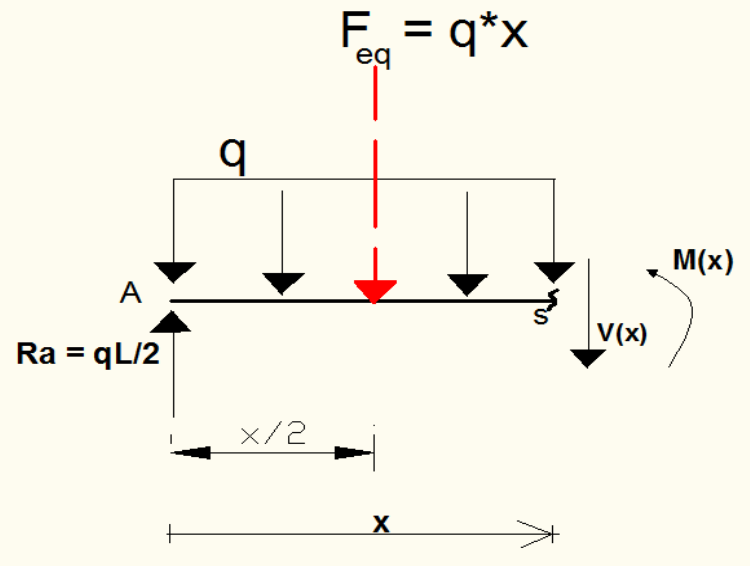
# Exemplo 18: Viga bi-apoiada p(x) = q




## 1. Obter reações:




## 2. Corte em cada trecho




Determinação das equações nos cortes de cada trecho:

Trecho único: $0 < x < L$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_a - q \cdot x - V(x) = 0 \rightarrow V(x) = R_a - q \cdot x$$

$V(x) = q \cdot L / 2 - q \cdot x$ (linear)

$$\sum M_s = 0 \rightarrow M(x) + (q \cdot x) \cdot x / 2 - R_a \cdot x = 0 \rightarrow M(x) = R_a \cdot x - q \cdot x^2 / 2$$

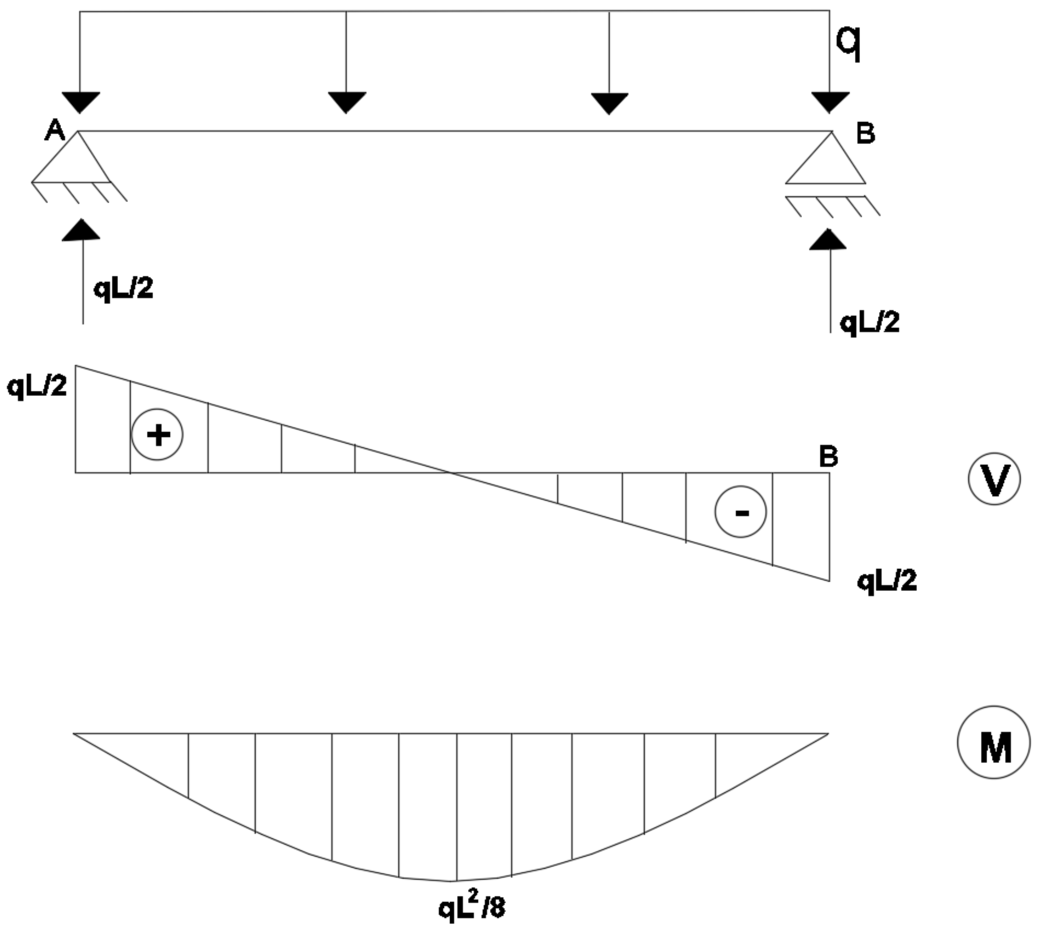
$M(x) = (q \cdot L / 2) \cdot x - q \cdot x^2 / 2$ (parábola)

# Exemplo 18: Viga bi-apoiada p(x) = q

## 3. Diagramas:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 \rightarrow q \cdot L/2 - q \cdot x = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$$

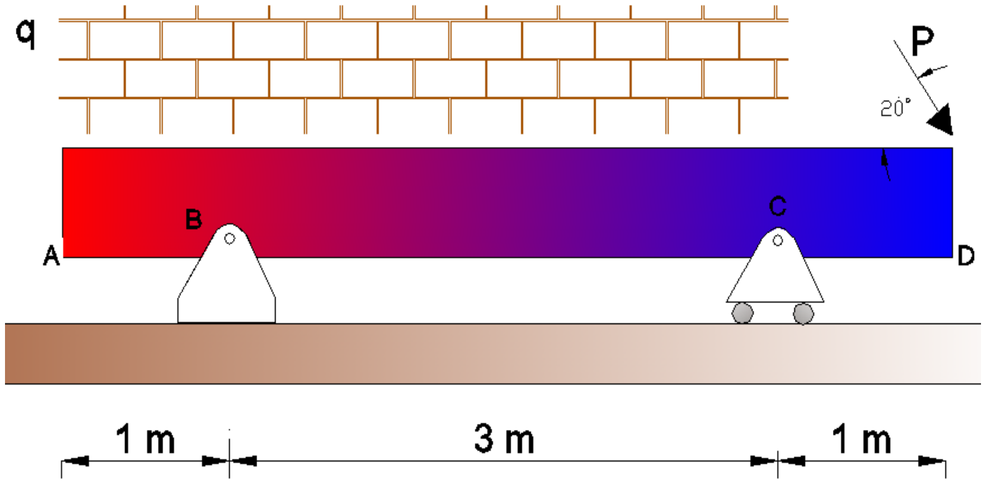
$$M(L/2) = (q \cdot L/2) \cdot L/2 - q \cdot (L/2)^2/2 = \frac{q \cdot L^2}{8}$$



# Exemplo 19: Viga bi-apoiada e balanço*



Determinar os diagramas de esforços. Dados q = 28 kN/m e P = 5 kN.




Calcular reações:

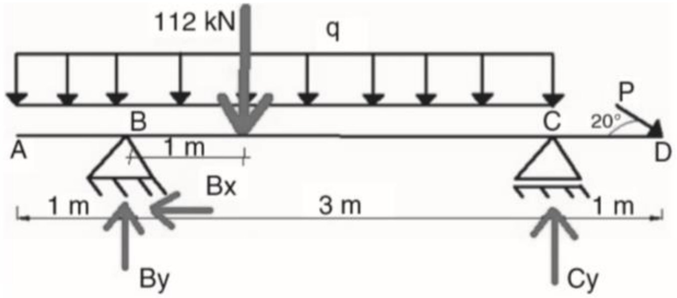
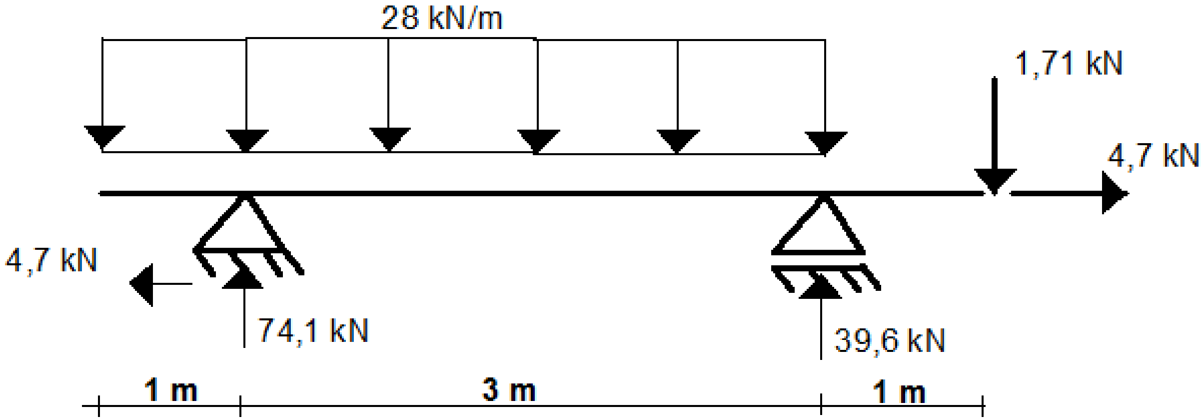



FIGURA 1.56B **Indicação das reações e forças resultantes na viga.**

$$\sum F_X = 0 : \rightarrow B_x - 5 \cdot \cos 20° = 0 \rightarrow B_x = 4{,}7 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$\sum M_B = 0 : \rightarrow 3 \cdot C_y = 112 \cdot 1 + 1{,}71 \cdot 4 \rightarrow C_y = 39{,}6 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow B_y = 112 + 1{,}71 \quad 39{,}6 = 74{,}1 \text{ kN } (\uparrow)$$




*Resistência do Materiais: Um guia prático. Valerio Almeida; Marcelo Greco, Daniel Maciel. Elsevier, 2018

*Trecho 1: 0 < x < 1*

$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) = 0 \rightarrow N(x) = 0$$

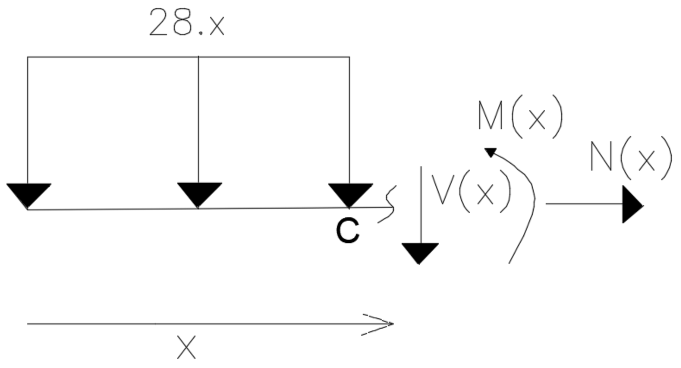
$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 28x = 0 \rightarrow V(x) = -28 \cdot x$$

$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 28x \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M(x) = -14 \cdot x^2$$

Valores nos extremos do intervalo: $N(0) = N(1) = 0; V(0) = 0; V(1) = -28$

$M(0) = 0;\ \ M(1) = -14$

*Não tem derivada nula nesse intervalo para construir M(x)*



*Trecho 2: 1 < x < 4*

$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) - 4{,}7 = 0 \rightarrow N(x) = 4{,}7$$

$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 28 \cdot x - 74{,}1 = 0 \rightarrow V(x) = -28 \cdot x + 74{,}1$$

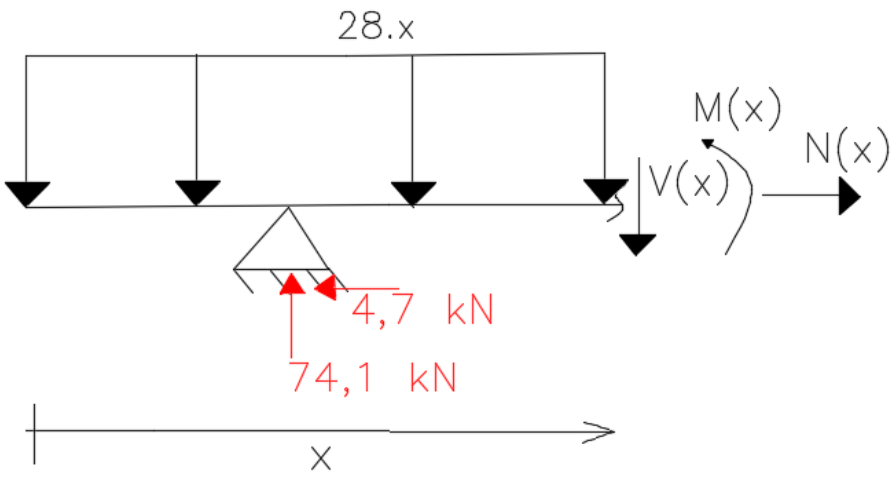
$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 28 \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 74{,}1 \cdot (x-1) = 0 \rightarrow M(x) = -14 \cdot x^2 + 74{,}1 \cdot x - 74{,}1$$

Valores nos extremos do intervalo: $N(1) = N(4) = 4{,}7$; $V(1) = 46{,}1$; $V(4) = -37{,}9$

$M(1) = -14$; $M(4) = -1{,}7$

*Obter ponto de extremo de M, fazendo:* $V(x) = -28x + 74{,}1 = 0 \rightarrow x = 2{,}65$ m

$$M(x = 2{,}65) = -14 \cdot (2{,}65^2) + 74{,}1 \cdot (2{,}65) - 74{,}1 = 23{,}9$$



*Trecho 3: 4 < x < 5*

$$\sum F_x = 0 : \rightarrow N(x) - 4{,}7 = 0 \rightarrow N(x) = 4{,}7$$

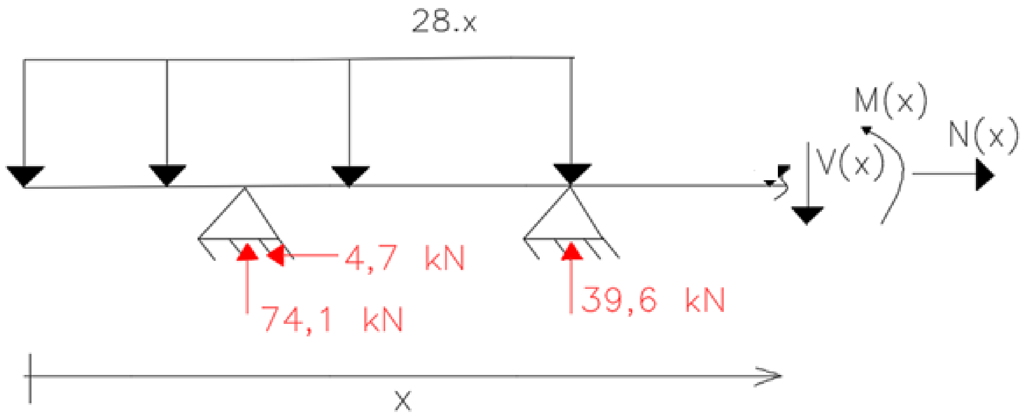
$$\sum F_y = 0 : \rightarrow V(x) + 112 - 74{,}1 - 39{,}6 = 0 \rightarrow V(x) = 1{,}71$$

$$\sum M_S = 0 : \rightarrow M(x) + 112 \cdot (x-2) - 74{,}1 \cdot (x-1) - 39{,}6 \cdot (x-4) = 0 \rightarrow$$

$$M(x) = 1{,}71x - 8{,}55$$

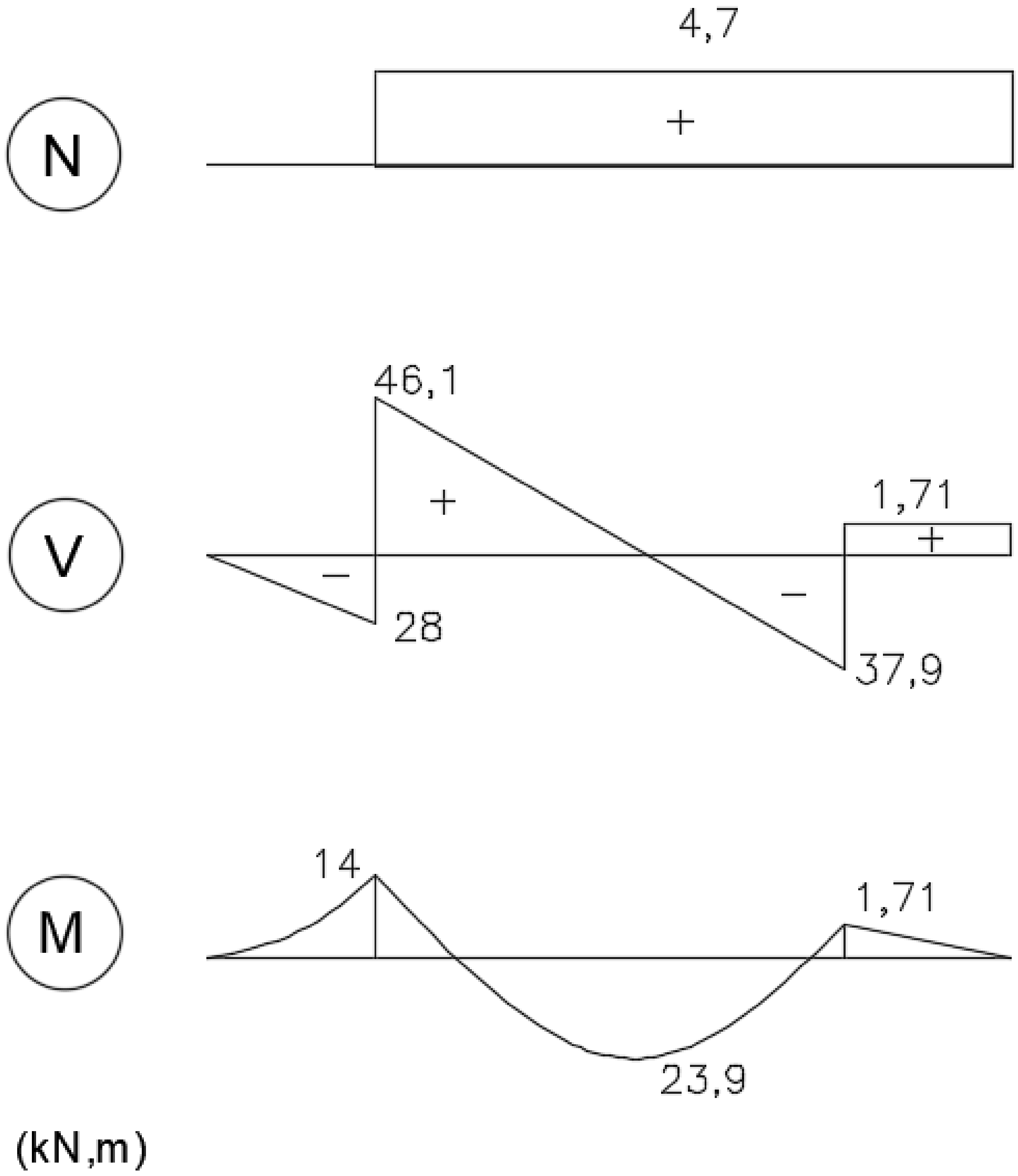
Valores nos extremos do intervalo: $N(4) = N(5) = 4{,}7$; $V(4) = V(5) = 1{,}71$

$M(4) = -1{,}71$; $M(5) = 0$

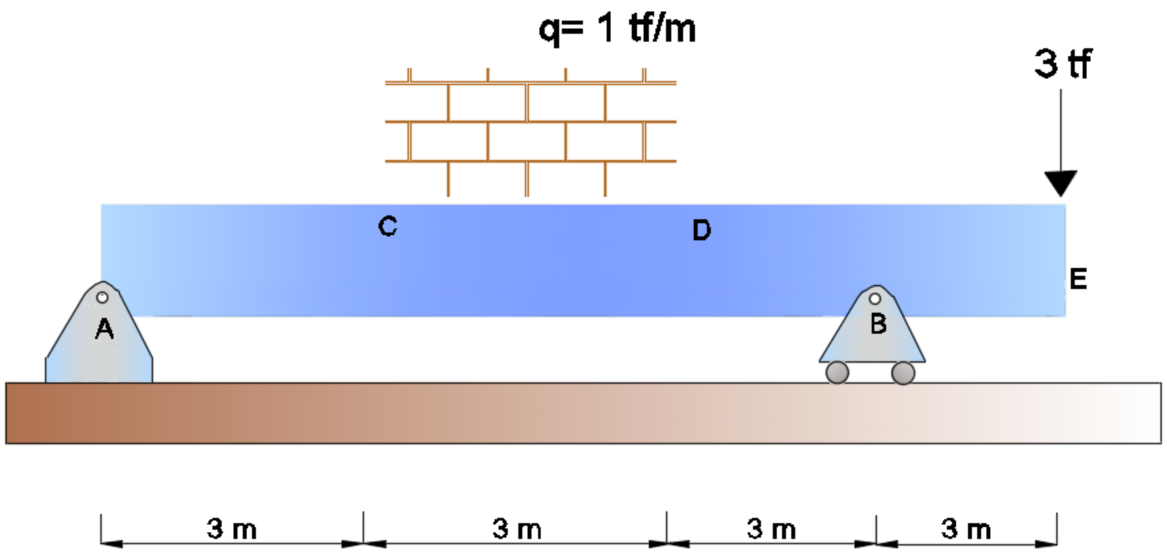


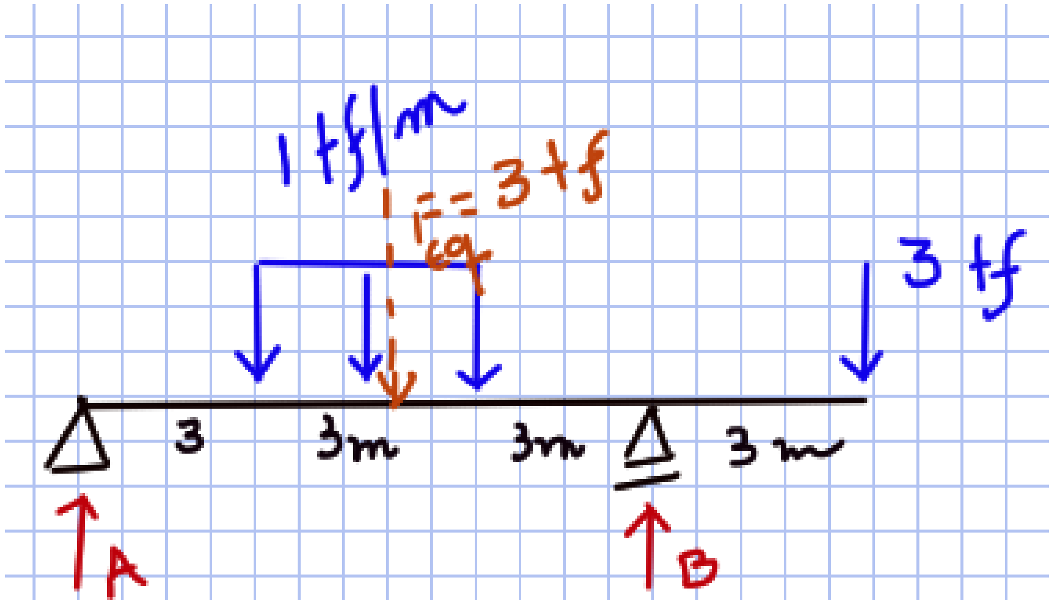
## Exemplo 20: Viga bi-apoiada e balanço

### Diagramas:



# Exemplo 21: Viga bi-apoiada e balanço sem resolver por equação




## 1. Reações

$$\Sigma M_A = 0$$

$$9B = 12 \cdot 3 + 4{,}5 \cdot 3$$

$$B = 5{,}5\ tf$$

$$A = 0{,}5\ tf$$

# Trecho 1: 0<x<3m

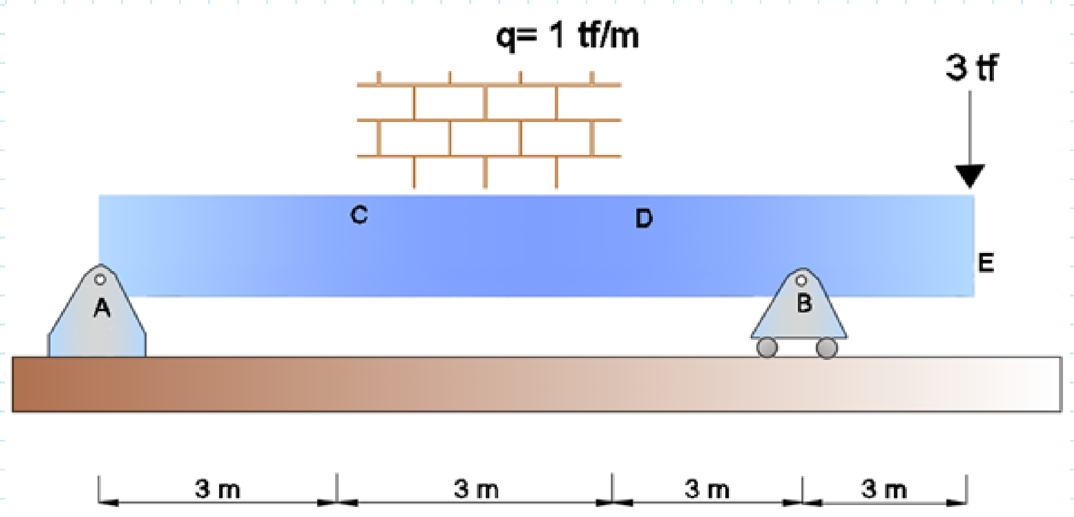
## 2. Esforços

Trecho 1: 0<x<3m

Trecho 2: 3<x<6m

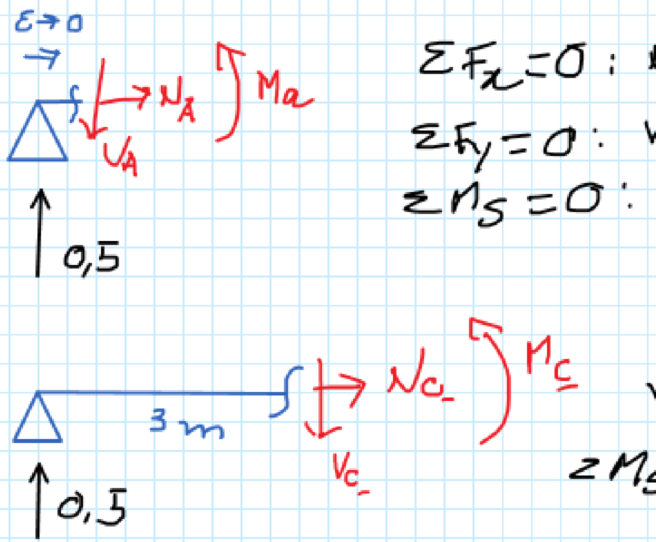
Trecho 3: 6<x<9m

Trecho 4: 9<x<12m




trecho ① : AC

Cortar no início e fim:




$\Sigma F_x = 0 : N_A = 0$

$\Sigma F_y = 0 : V_A = 0{,}5\,tf$

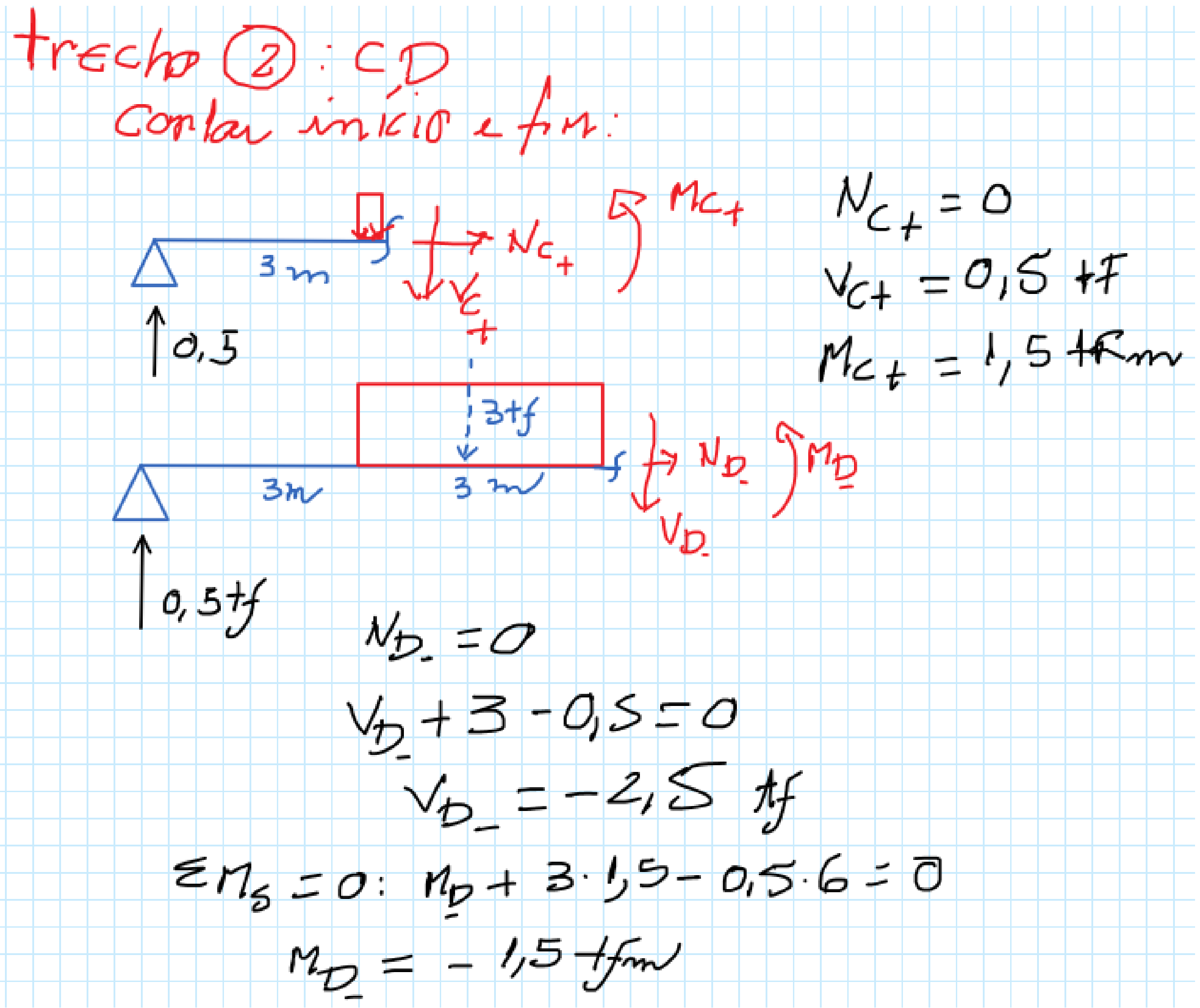
$\Sigma M_s = 0 : M_A = 0{,}5 \cdot 0 = 0$

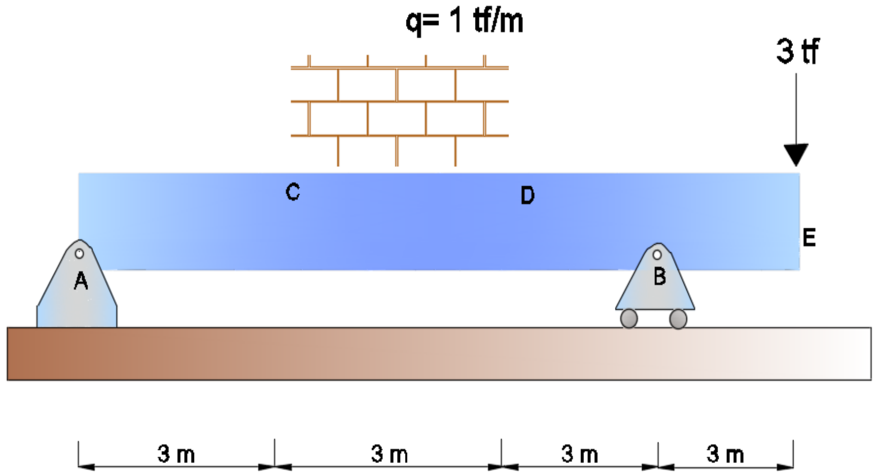
$N_C = 0$

$V_C = 0{,}5$

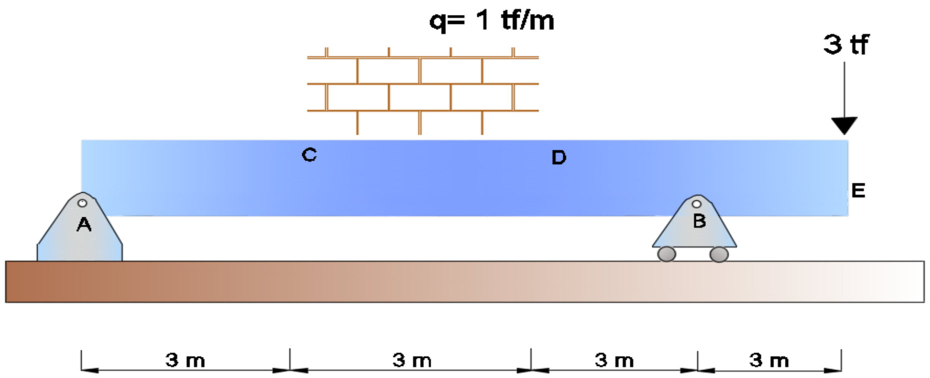
$\Sigma M_s = 0 : M_C = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5\,tf\,m$

# Trecho 2: 3<x<6m



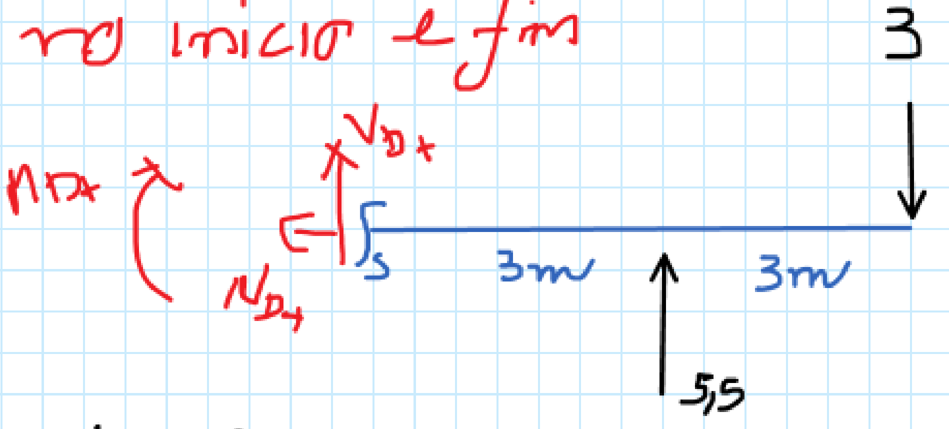



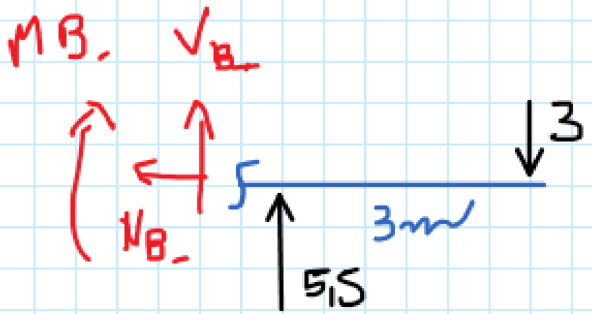
# Trecho 3: 6<x<9m




trecho 3: DB

Corte no início e fim




$N_{D+} = 0$

$V_{D+} + 5{,}5 - 3 = 0 \Rightarrow V_{D+} = -2{,}5$ tf

$\Sigma M_S = 0: \; M_{D+} + 3 \cdot 6 = 5{,}5 \cdot 3$

$M_{D+} = 16{,}5 - 18 = -1{,}5$ tfm

$N_{B-} = 0$

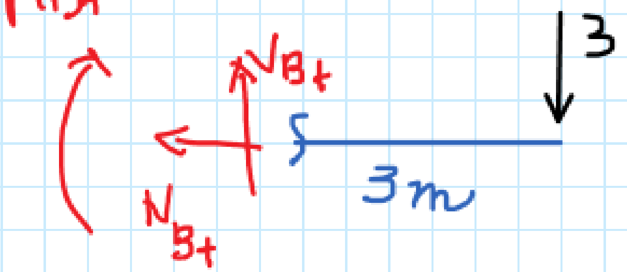
$V_{B-} = -2{,}5$

$\Sigma M_S = 0: \; M_{B-} = -9$ tfm

# Trecho 4:   9<x<12m

trecho 4 : BE

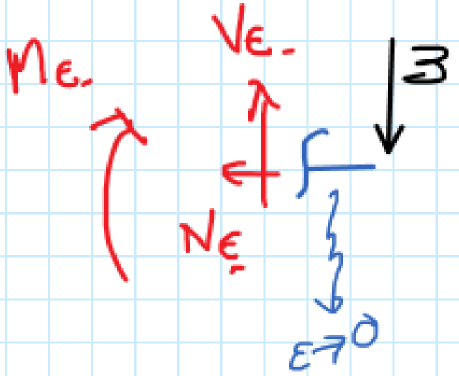
Cortar no início e fim




$N_{B+} = 0$

$V_{B+} = 3$

$\Sigma M_s = 0: \quad M_{B+} = -9$

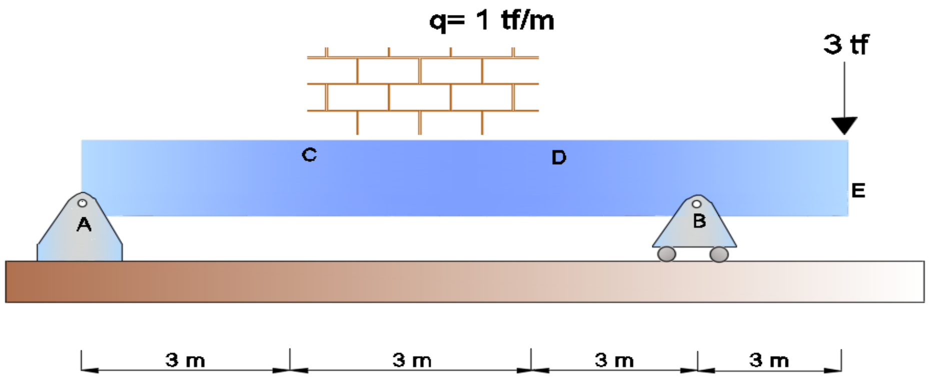



$N_{E-} = 0$

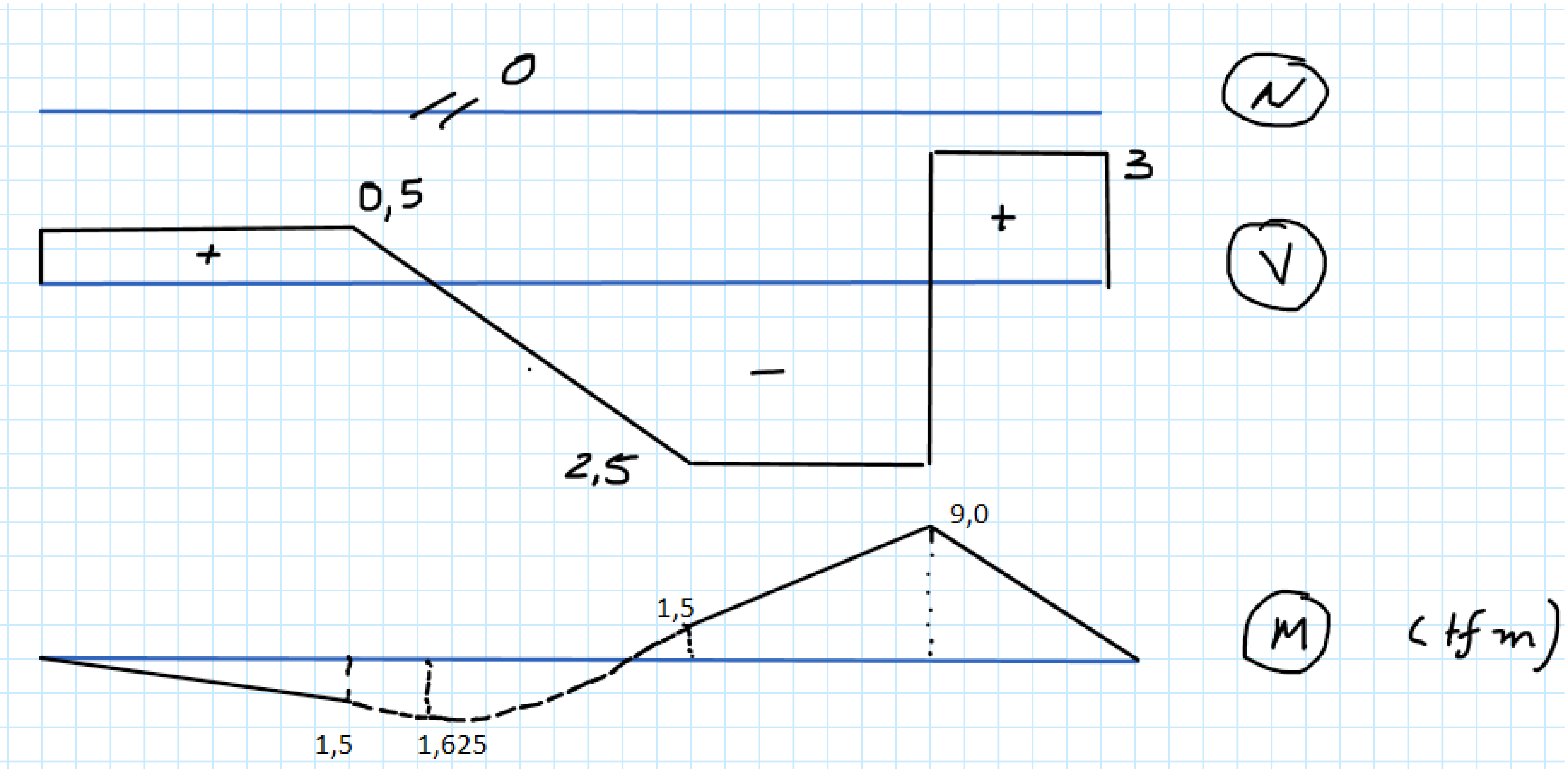
$V_{E-} = 3$

$\Sigma M_s = 0: \quad M_{E-} + 3\varepsilon = 0$ ($3\varepsilon \to 0$)

$M_{E-} = 0$



# Exemplo 21: Viga bi-apoiada e balanço sem resolver por equação

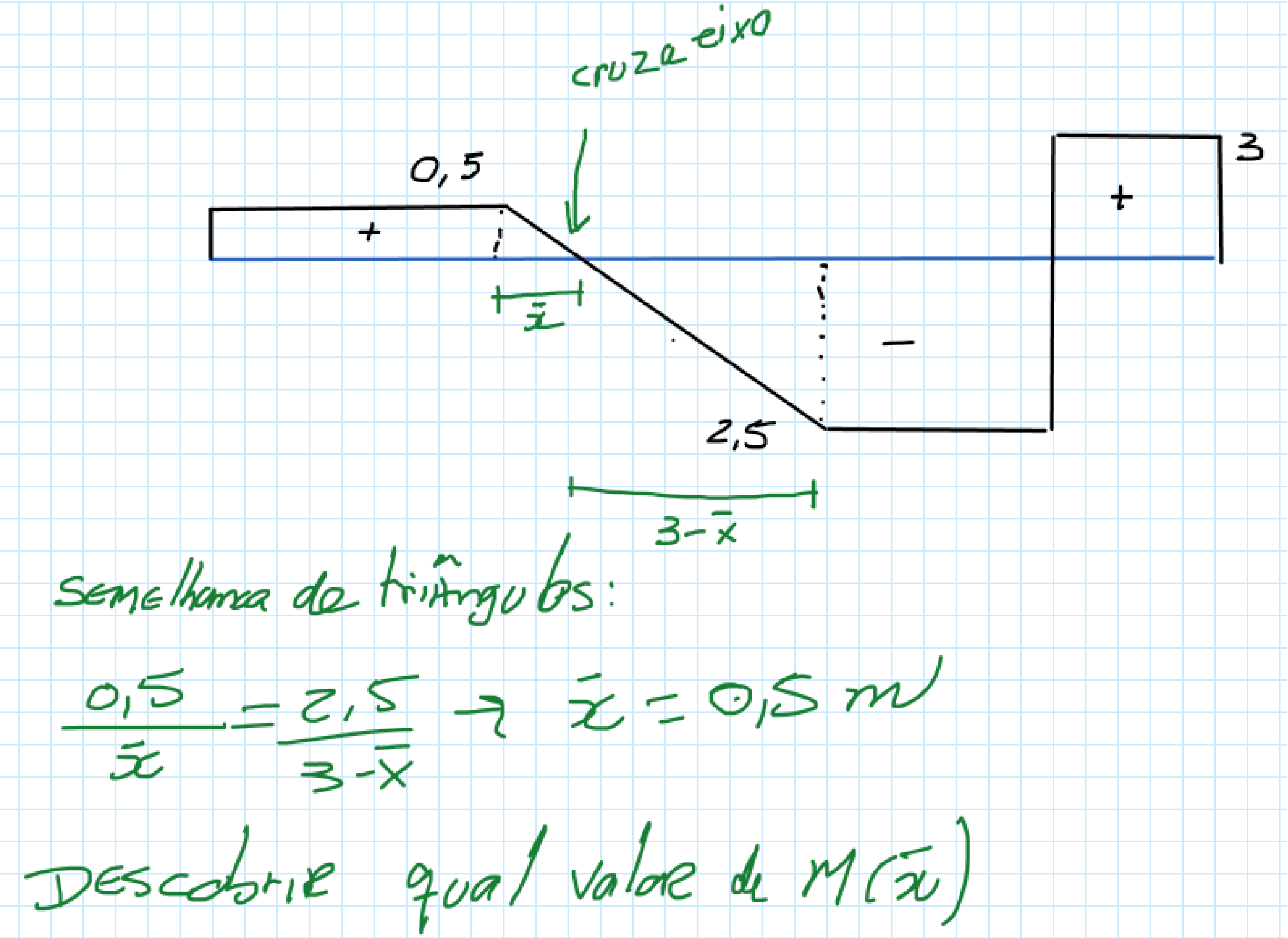


# Como descobrir os valores extremos do momento?

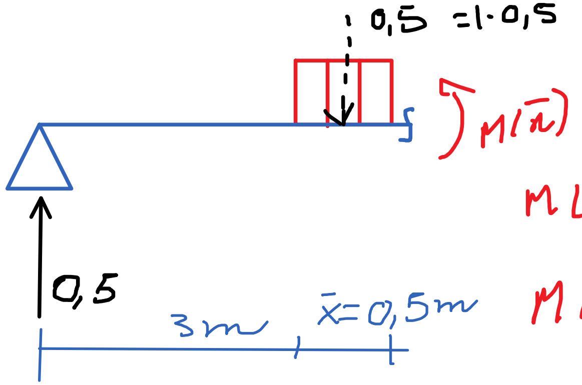
$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

Onde V = 0 ➡ $M_{extremo}$

Veja se no trecho com carga distribuída, o cortante cruza o eixo da barra



1) cortar em $\bar{x}$ e obter $M(\bar{x})$




$$M(\bar{x}) + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}5}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 3{,}5 = 0$$

$$M(\bar{x}) = 1{,}625 \text{ tfm}$$

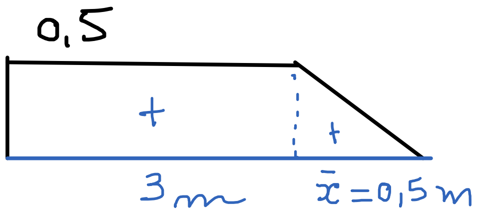
2) Por área do cortante (V)

$$\frac{dM}{dx} = V \Rightarrow \int_{\text{TRECHOS}} \frac{dM}{dx} = \int_{\text{TRECHOS}} V + \text{CTE}$$

$$M_{\bar{x}} = \int_{\text{TRECHOS}} V\,dx + \text{CTE} \Rightarrow M_{\bar{x}} = \int_0 V\,dx + \text{CTE}$$

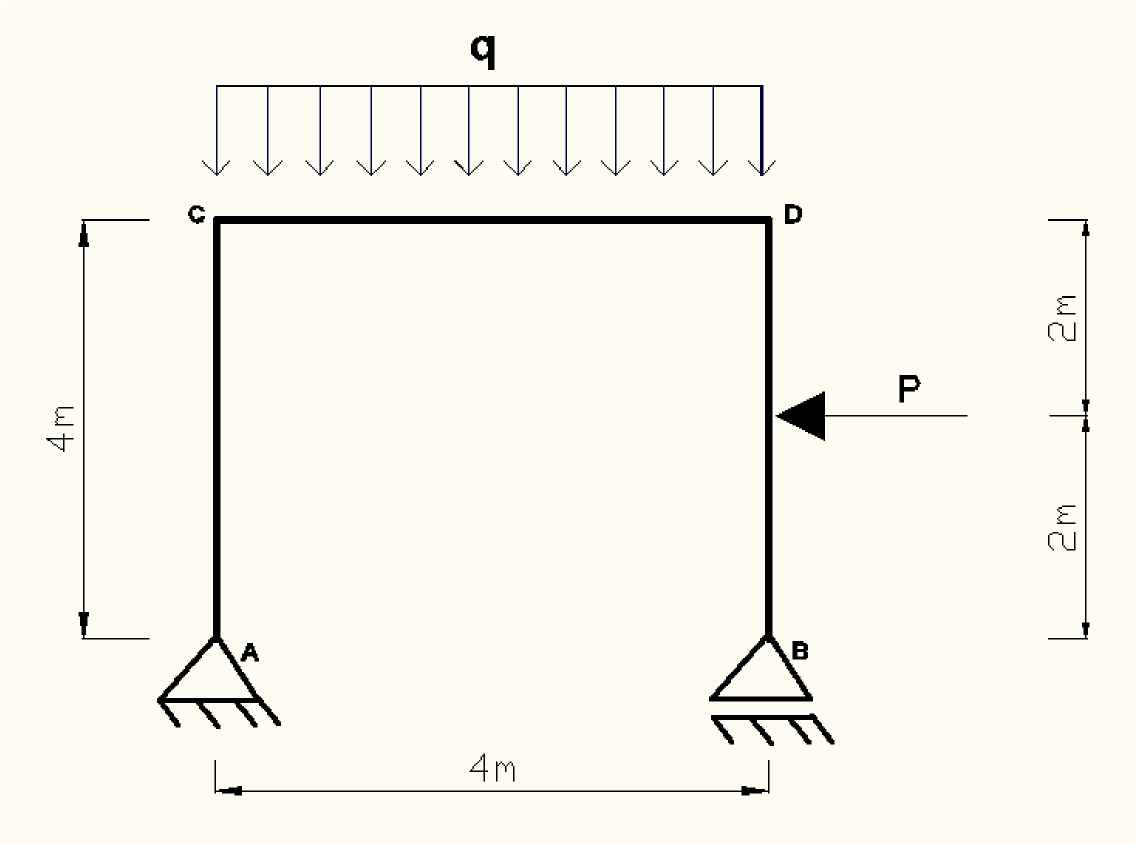
$$M_{\bar{x}} = \text{ÁREA}(V) + \text{CTE}$$

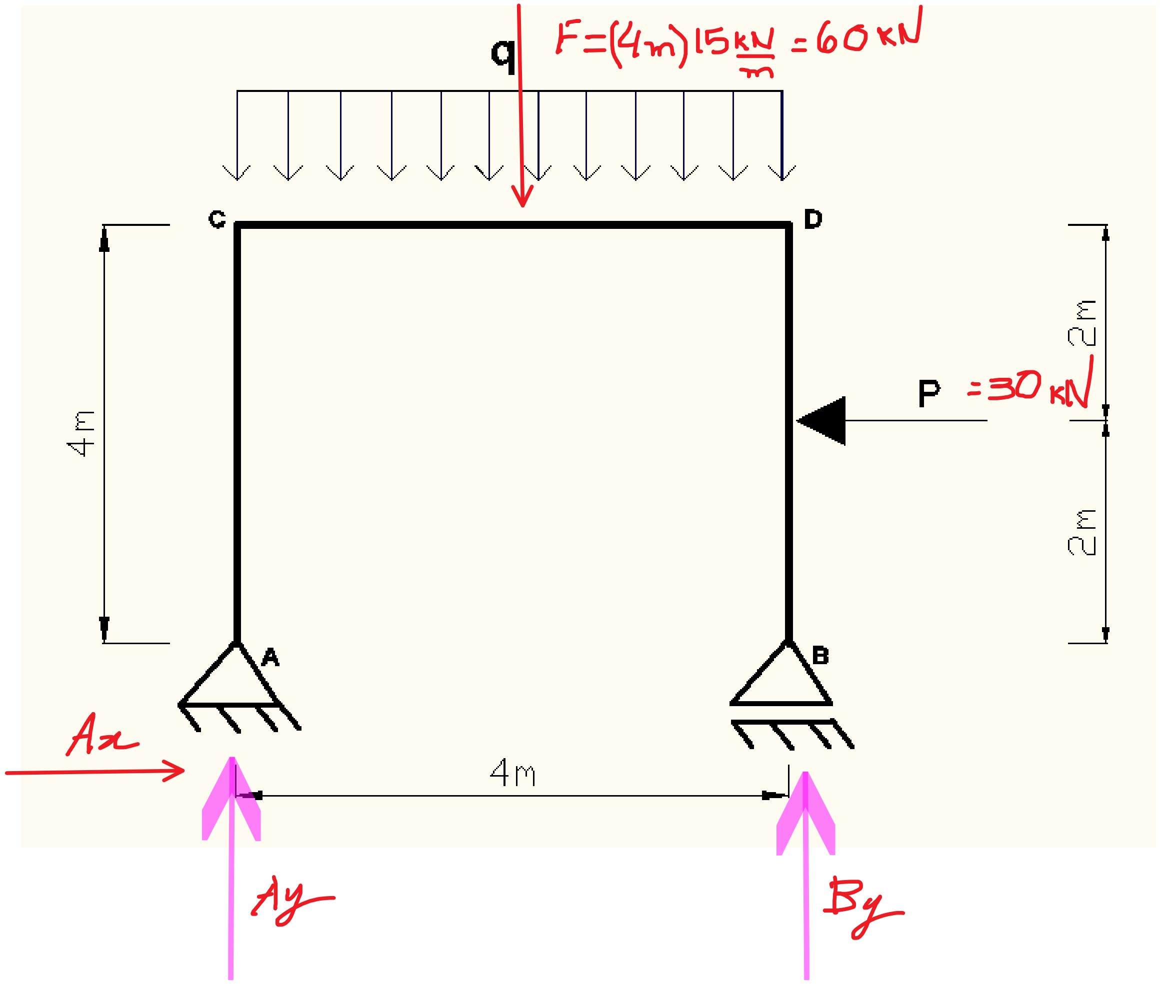
- CTE: MOMENTOS CONCENTRADOS c/ SINAL
- ÁREA (V): c/ SINAL (atento!)




$$M_{\bar{x}} = (0{,}5 \cdot 3) + \left(\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{2}\right) = 1{,}625 \text{ tfm}$$

**Exemplo 22:** Determine os diagramas de momento fletor, esforço cortante e normal, explicitando os pontos relevantes de cada diagrama. Dados: q = 15 kN/m; P = 30 kN



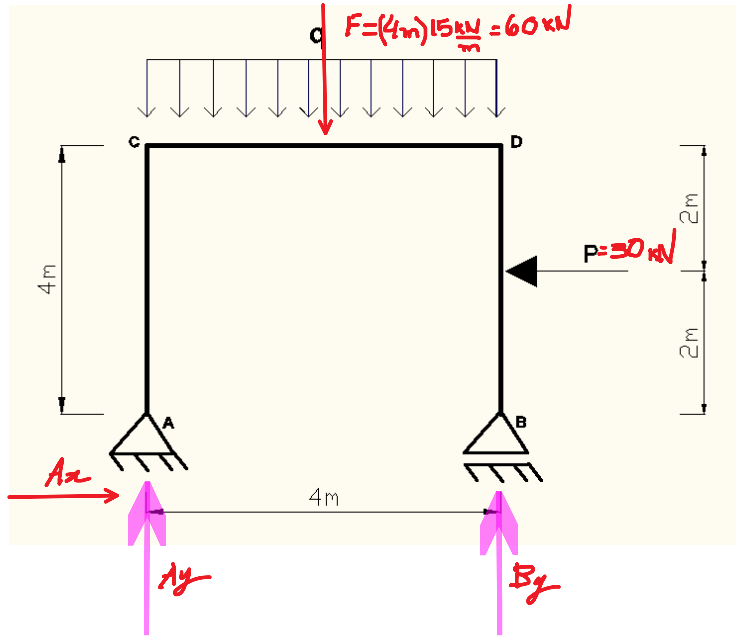
$\Sigma F_x = 0 : \quad A_x = 30\,kN \; (\rightarrow)$

$\Sigma F_y = 0 : \quad A_y + B_y = 60$

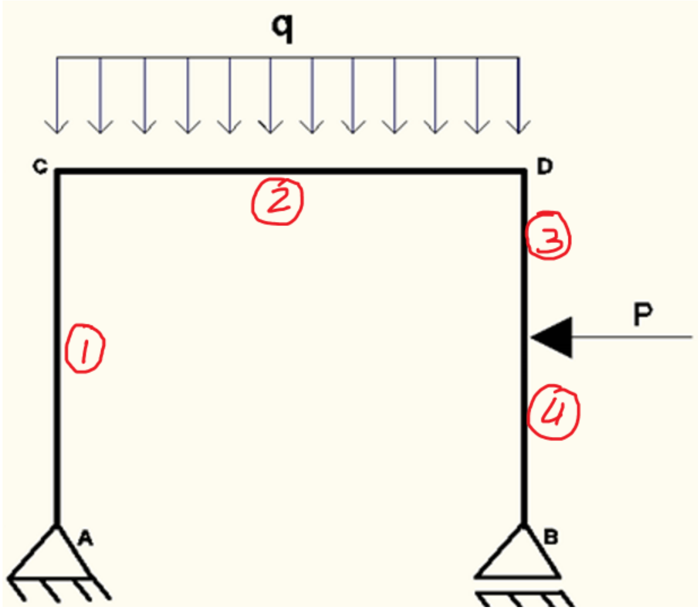
$\Sigma M_A = 0 : \quad 4B_y + 30 \cdot 2 = 60 \cdot 2$

$B_y = 15\,kN \; (\uparrow)$

$A_y = 45\,kN \; (\uparrow)$



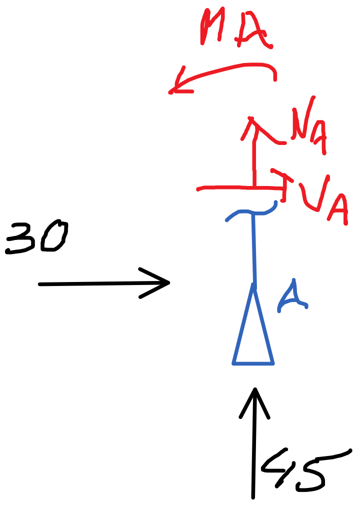

**Dividir em trechos**




**Isolar cada trecho**

**Cortar, equilibrar início/fim de cada trecho, obter esforços.**

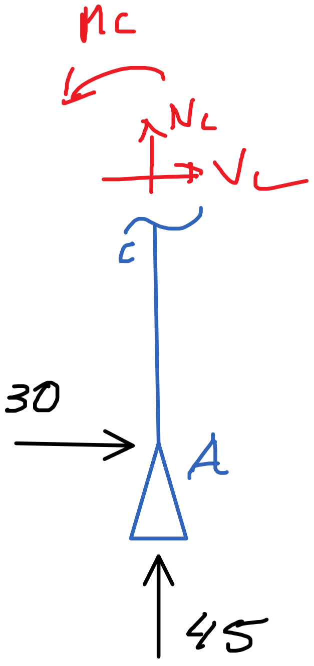
## Trecho 1 (AC)




$N_A = -45$

$V_A = -30$

$M_A = 0$

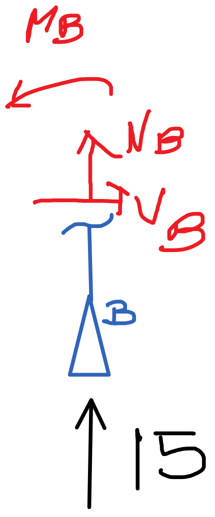



$N_C = -45$

$V_C = -30$

$M_C = -30 \cdot 4 = -120$

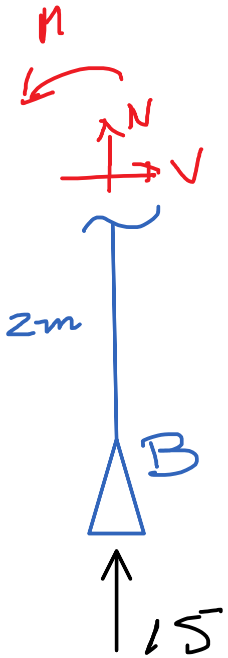
## Trecho 4




$N_B = -15$

$V_B = 0$

$M_B = 0$

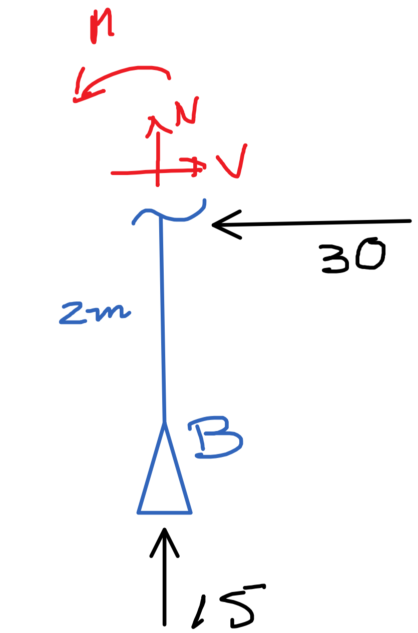


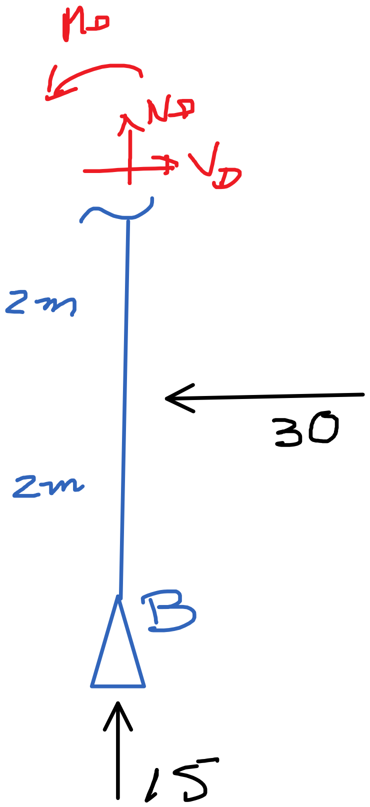

$N = -15$

$V = 0$

$M = 0$

# Trecho 3




$N = -15$

$V = 30$

$M = 0$

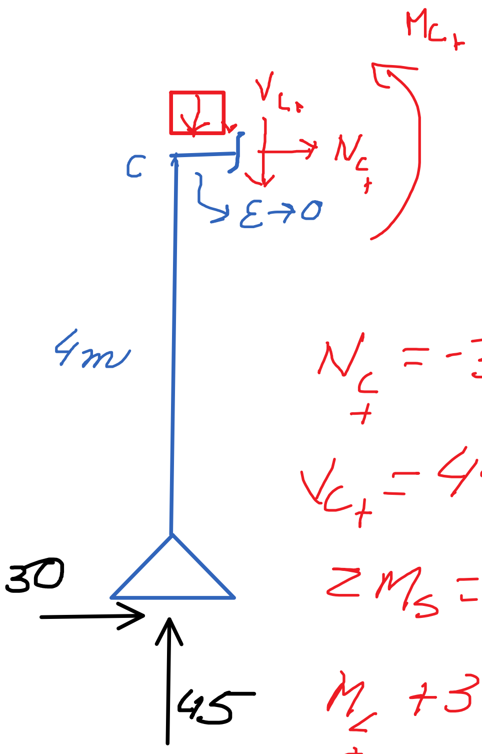
$N_D = -15$

$V_D = 30$

$\Sigma M_S = 0: M_D - 30 \cdot 2 = 0$

$M_D = 60\ kNm$

# Trecho 2 (CD)



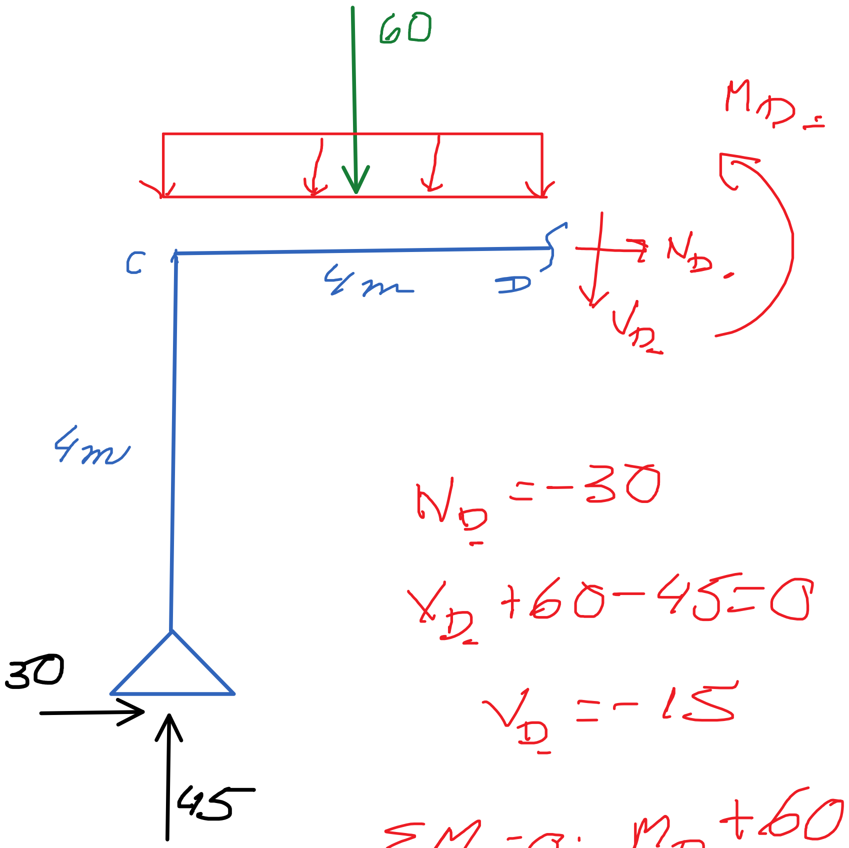

$N_{C+} = -30$

$V_{C+} = -45$

$\Sigma M_S = 0$

$M_{C+} + 30 \cdot 4 = 0$

$M_{C+} = -120$




$N_D = -30$

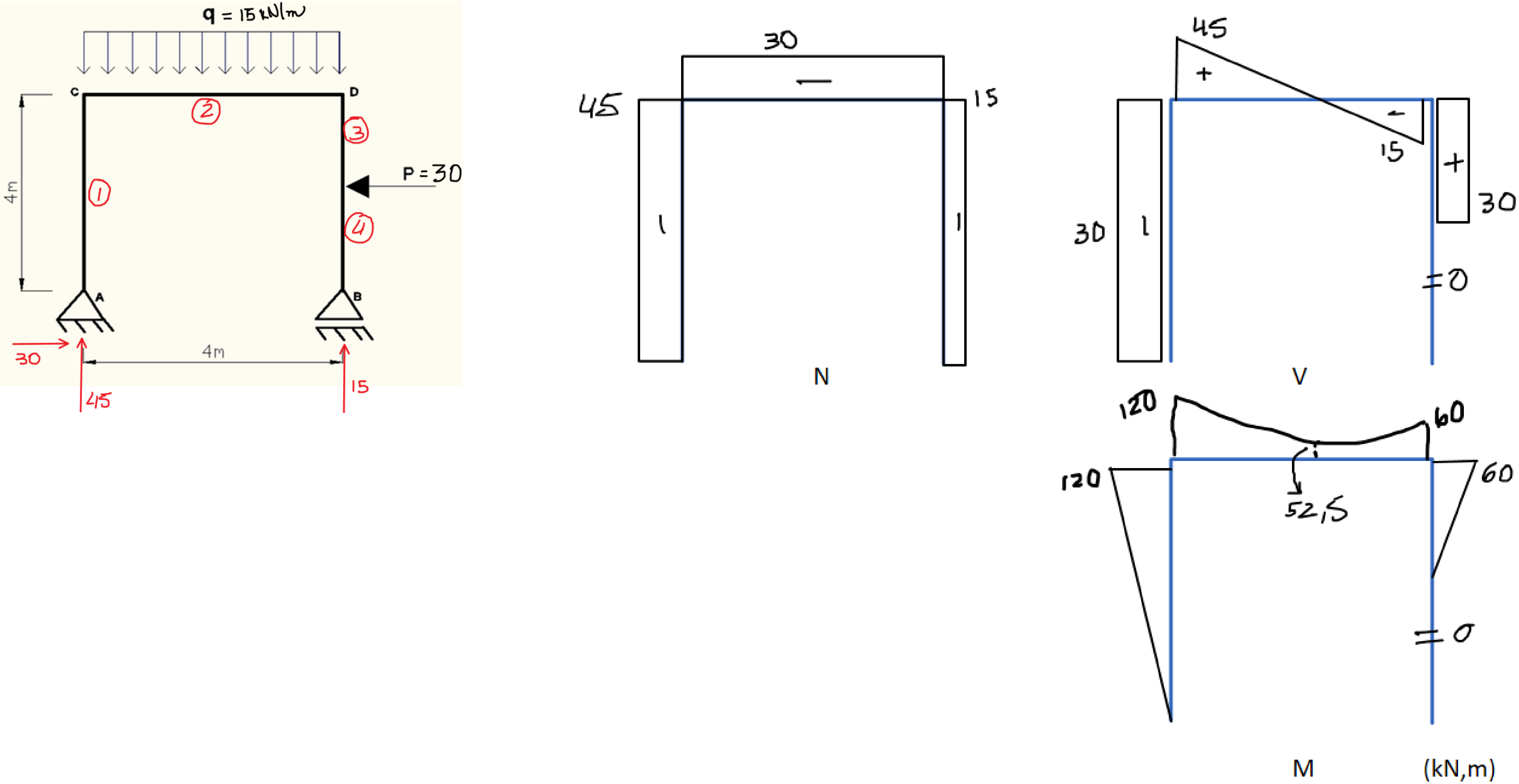
$V_D + 60 - 45 = 0$

$V_D = -15$

$\Sigma M_S = 0: \; M_D + 60 \cdot \frac{4}{2} + 30 \cdot 4 - 45 \cdot 4 = 0$

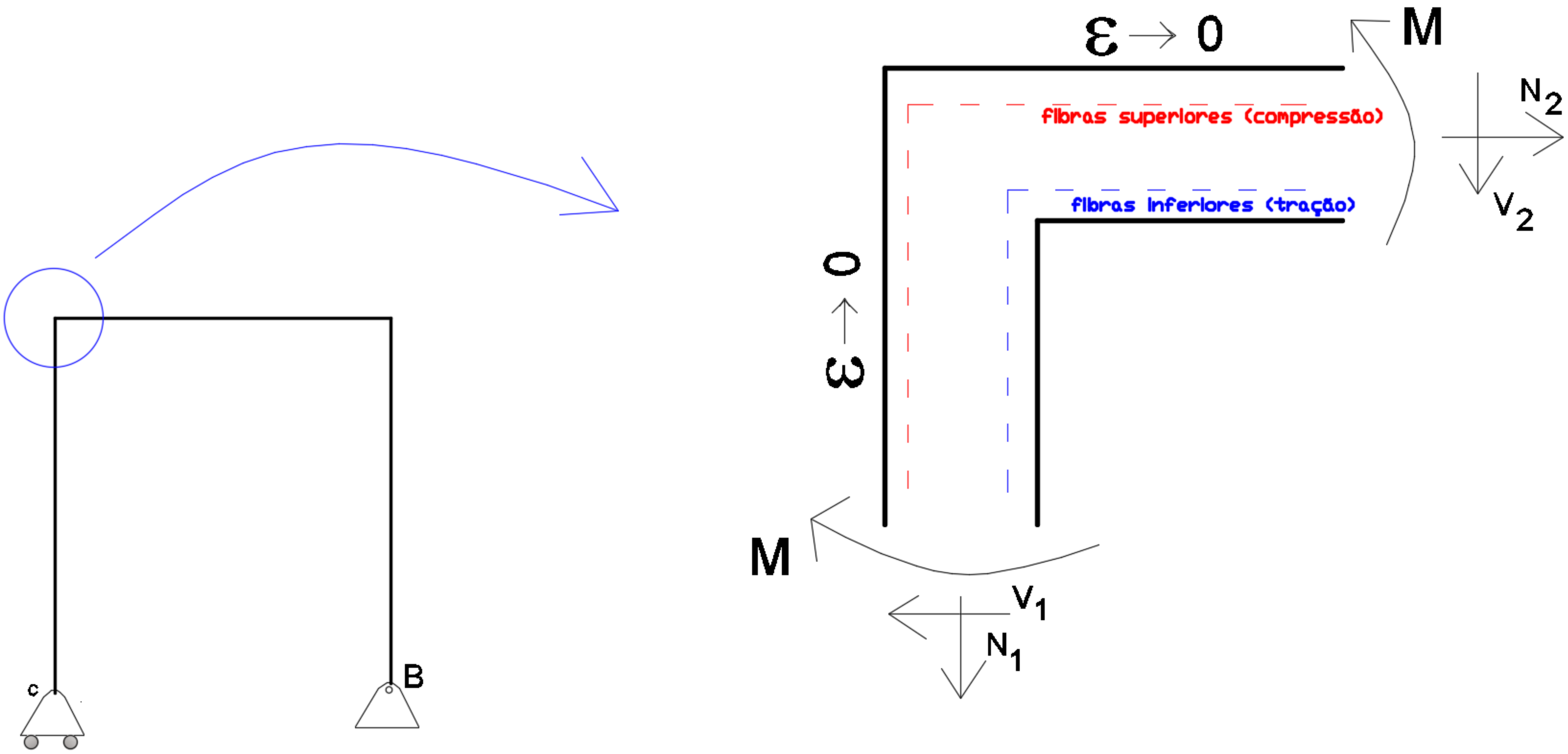
$M_D = -60$

# Diagramas

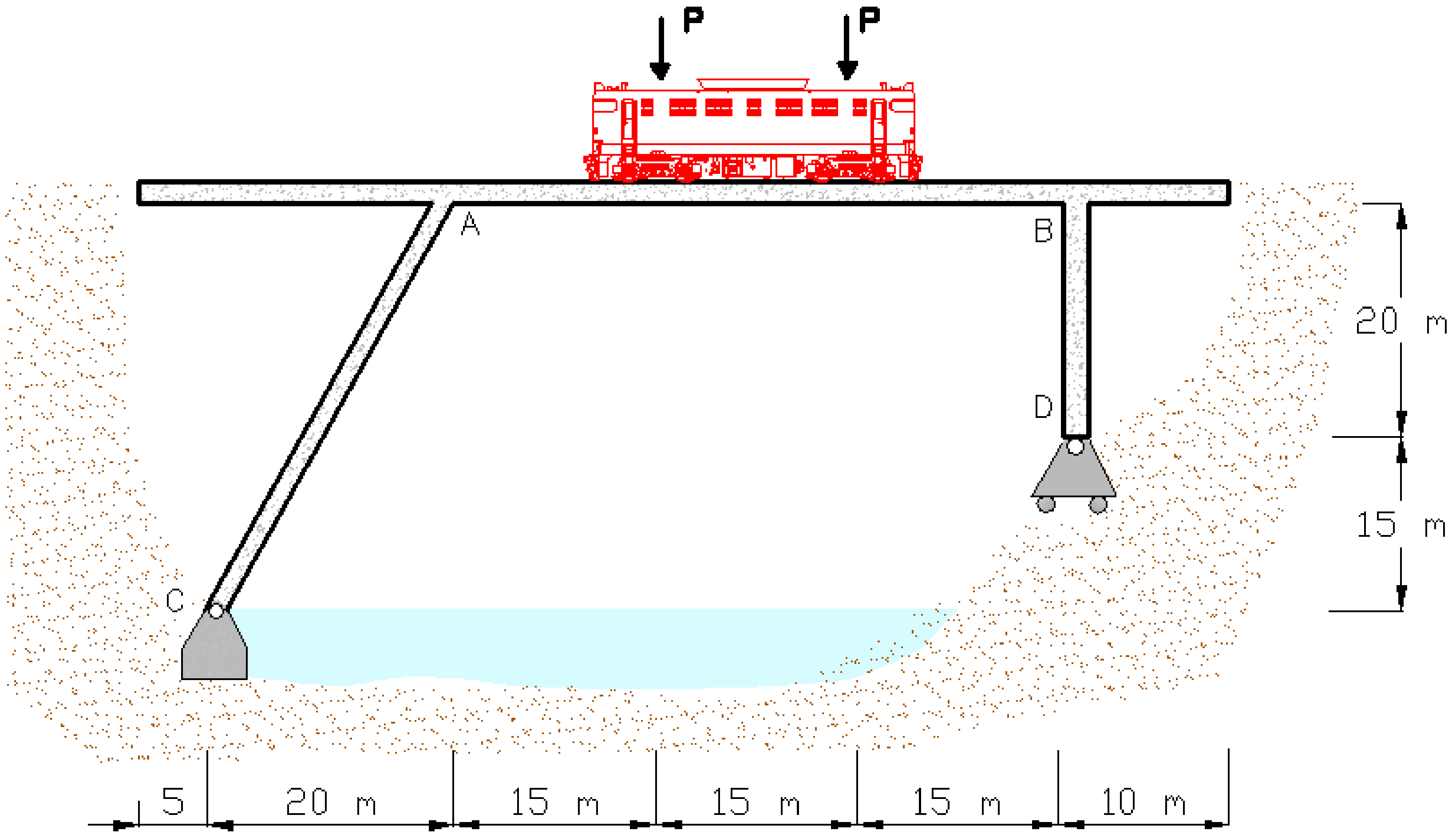


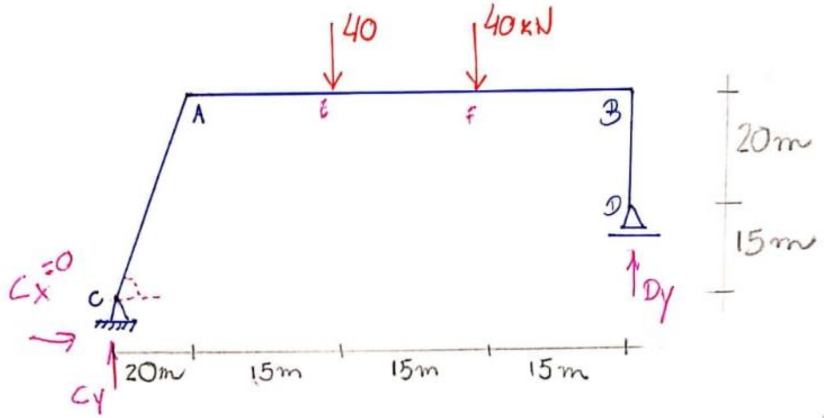
q = 15 kN/m
C
D
A
B
P = 30
4 m
4m
30
45
15
30
45
15
N
45
15
30
30
V
120
60
120
60
52,5
M
(kN,m)

# Continuidade das fibras na peça



**Exemplo 23:** A ponte está sujeita ao peso da locomotiva considerado como duas forças concentradas de valor P = 40 kN. Obtenha os diagramas de esforços normal, cortante e momento fletor para o trecho CABD.





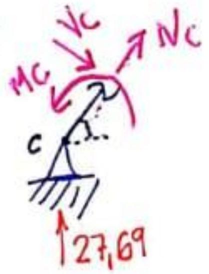

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0: \quad 40 \cdot 35 + 40 \cdot 50 = D_y \cdot 65 \rightarrow D_y = 52{,}31\,kN$$

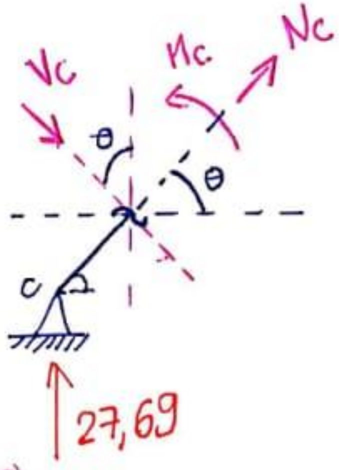
$$\sum F_y = 0: \quad C_y + D_y = 80 \rightarrow C_y = 27{,}69\,kN$$

DIVIDIR EM TRECHOS:

- CA ①
- AE ②
- EF ③
- FB ④
- BD ⑤

trecho ①:
(início)




$\cos\theta = 0{,}4961$

$\text{sen}\,\theta = 0{,}8682$

$\sum F_x = 0$

$$N_C \cdot \cos\theta + V_C \cdot \text{sen}\,\theta = 0 \quad ①$$

$\sum F_y = 0$

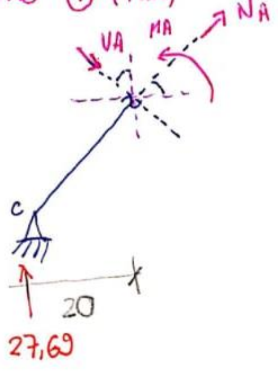
$$N_C \cdot \text{sen}\,\theta - V_C \cdot \cos\theta + 27{,}69 = 0 \quad ②$$

$N_C = -24\,kN$

$V_C = 13{,}74\,kN$

$$\sum M_C = 0: \quad M_C = 0$$

trecho ① (Fim)

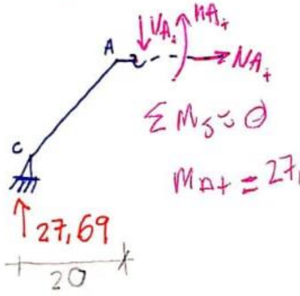



$\Sigma M_S = 0: \; M_A - 27{,}69 \cdot 20 = 0$

$M_A = 553{,}8 \text{ kN}\,m$

$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$

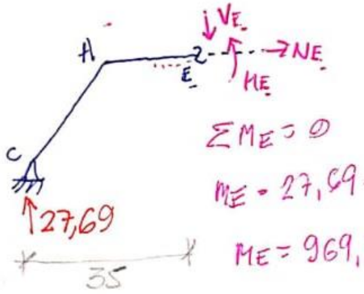
trecho ② (início)




$\Sigma M_S = 0$

$M_{A+} = 27{,}69 \cdot 20$

trecho ② (Fim)

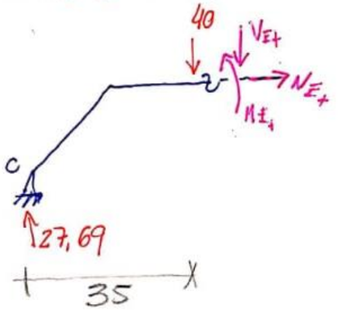



$\Sigma M_E = 0$

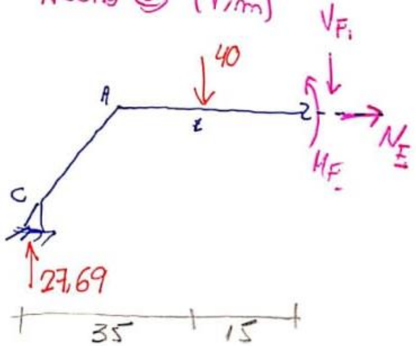
$M_E - 27{,}69 \cdot 35 = 0$

$M_E = 969{,}2 \text{ kN}\,m$

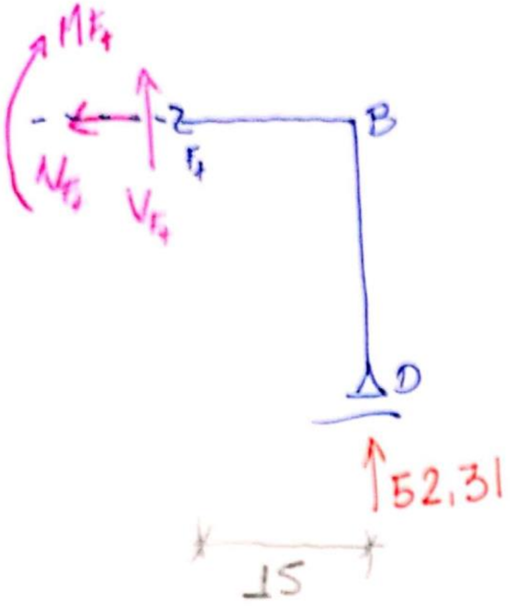
trecho ③ (início)



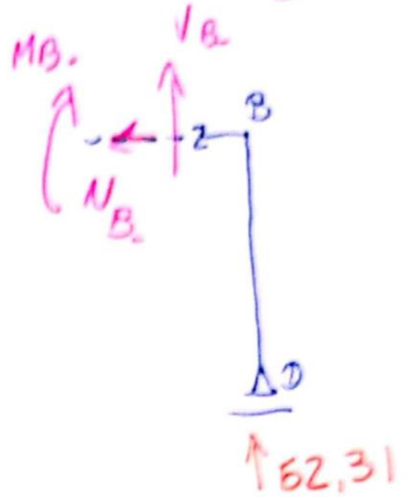

trecho ③ (Fim)



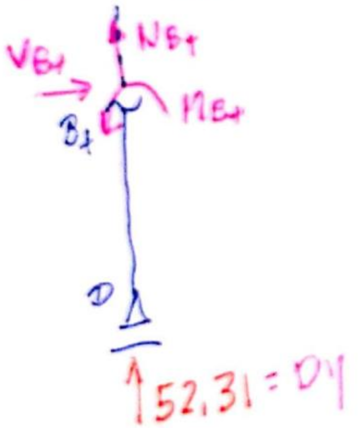
trecho ④ (início)



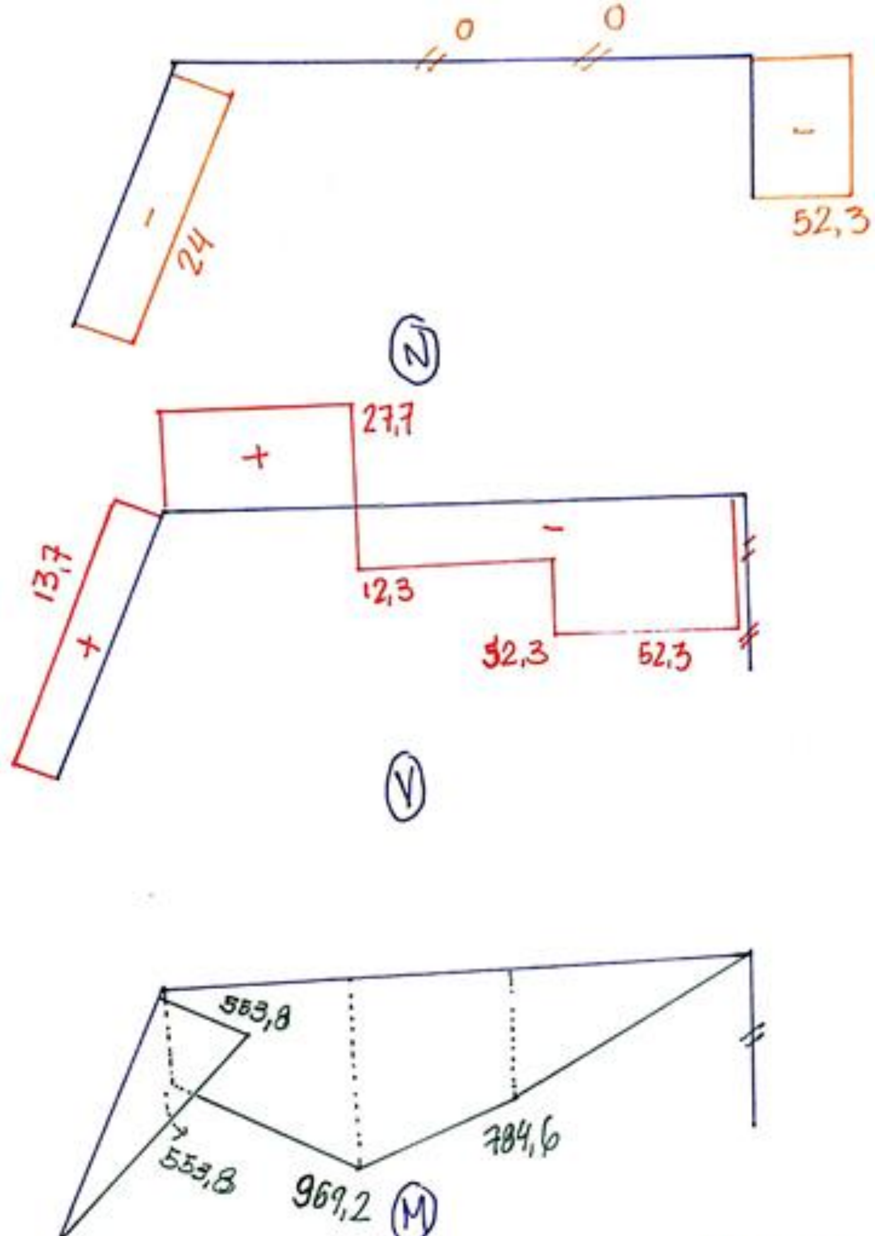

trecho ④ (Fim)



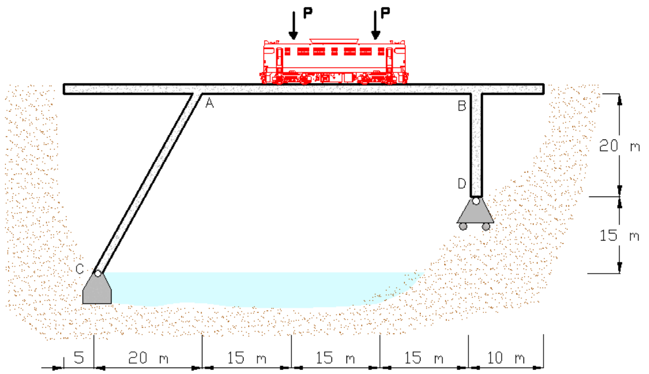

trecho ⑤ (início)



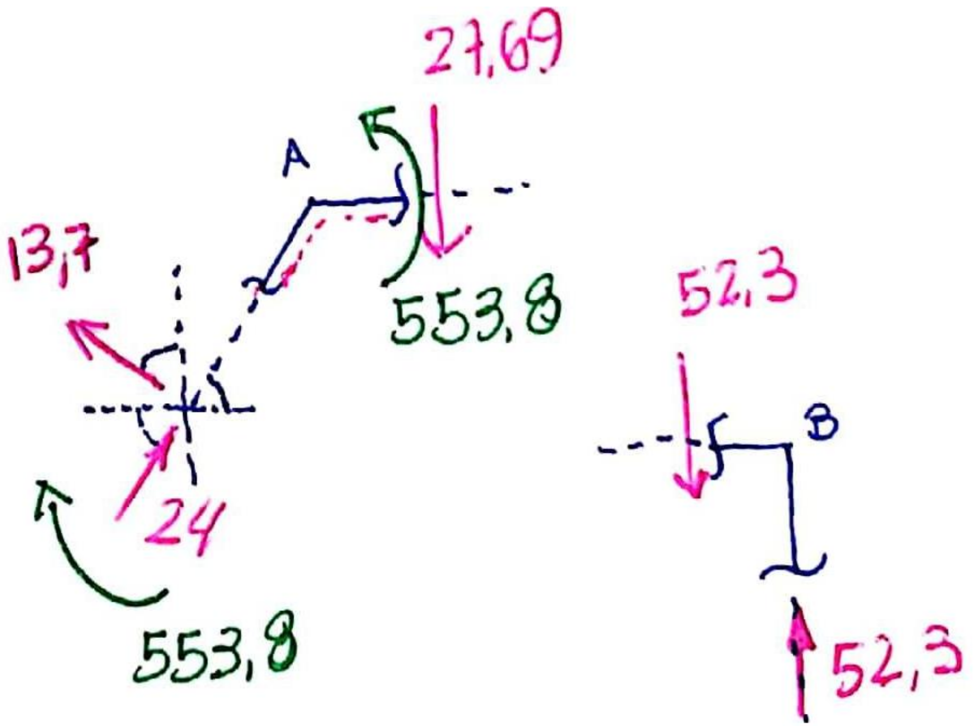

trecho ⑤ (Fim)

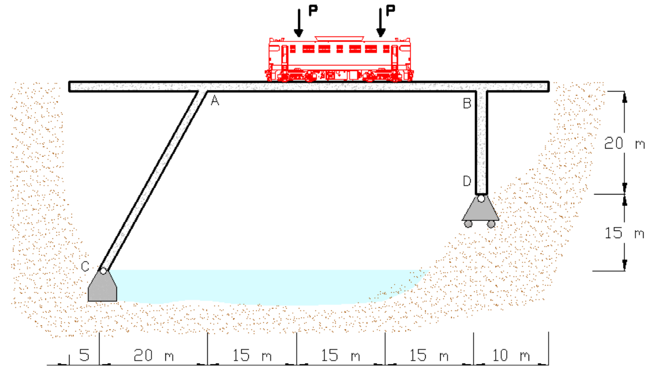

0
0
–
24
–
52,3
N
27,7
+
13,7
+
–
12,3
52,3
52,3
V
553,8
553,8
969,2
784,6
M

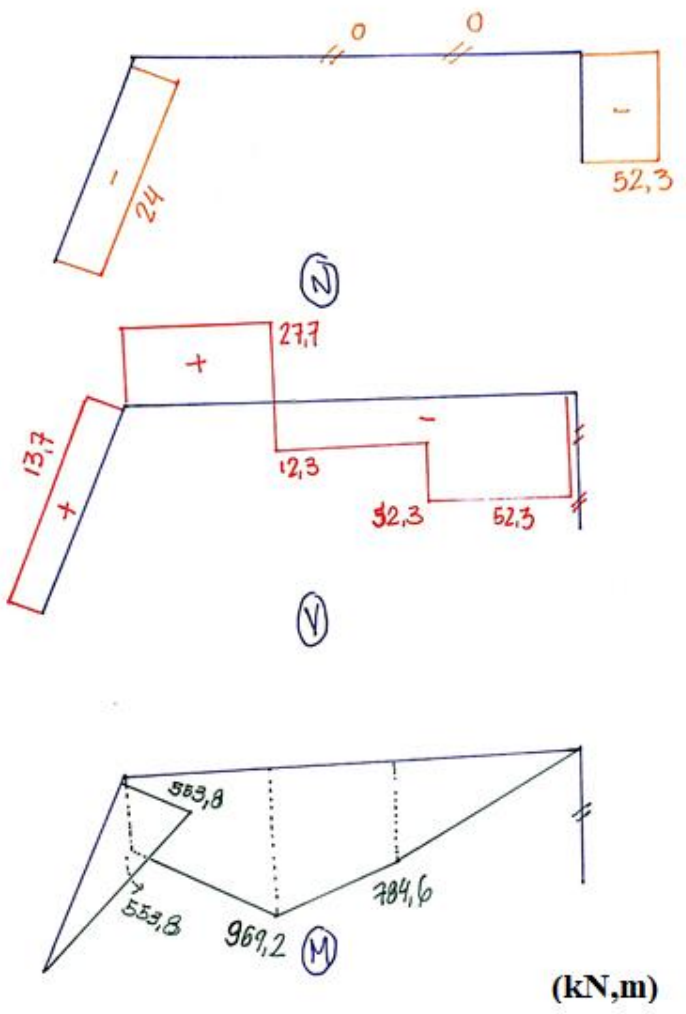
(kN,m)


P
P
A
B
C
D
20 m
15 m
5
20 m
15 m
15 m
15 m
10 m

Verifique equilíbrio junto a A e B:



CIPLINAS
às Disciplinas

Disciplinas » Suporte » Português - Brasil (pt_br)

- Lista de exercícios de: reações e esforços solicitantes
- Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 29/04/21
- Tarefa a ser entregue até 29/04/21
- Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 06/05/21

## Vídeos de exercícios resolvidos - Diagramas de esforços solicitantes

- Portico Plano engastado - Diagramas
- Pórtico Plano com um trecho inclinado
- Viga bi apoiada com carga linear