1. (Este exercício é um corolário do princípio de máximo para a equação de Laplace)

   Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto aberto, limitado e conexo e $g \in C(\partial\Omega)$. O problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

   tem no máximo uma solução pertencente a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Além disso, sejam $g_1, g_2 \in C(\partial\Omega)$. Mostre que:

   a) *Comparação*: se $g_1 \geq g_2$ em $\partial\Omega$ e $g_1 \neq g_2$ em pelo menos um ponto de $\partial\Omega$, então

$$u_{g_1} > u_{g_2} \quad \text{em } \Omega.$$

   b) *Estabilidade*:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_{g_1} - u_{g_2}| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

2. Prove a unicidade do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

   pelo método de energia. Isto é, após subtrair duas soluções $w = u - v$, multiplique a equação de Laplace em w por w e use o teorema da divergência.

3. (Problema misto no retângulo) Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } Q \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = g(x), \ 0 \leq y \leq a \\ u(0,y) = u_x(a,y) = 0, \ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

   onde $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, \ 0 < y < b\}$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = g'(a) = 0$.

4. Seja $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Use o método da separação de variáveis para resolver o problema

$$\begin{cases} \Delta u = y & \text{em } B_1 \\ u = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

   Sugestão: Use $u = v + w$ onde v e w são as respsctivas soluções dos problemas:

$$\begin{cases} \Delta v = y & \text{em } B_1 \\ v = 0 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B_1 \\ w = 1 & \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

5. Considere o anel

$$A_{1,R} = \{(r,\theta) : 1 < r < R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

   Sejam $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ e 2π-periódicas.

(a) Resolva o problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \text{ em } A_{1,R} \\ u(1,\theta) = g(\theta), \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(R,\theta) = h(\theta), \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

(b) Resolva o problema quando $g(\theta) = \sin\theta$ e $h(\theta) = 1$.

6. (Princípio da reflexão de Schwarz). Seja

$$B_1^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

e seja $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\overline{B_1^+})$ harmônica em B_1^+ e tal que $u(x,0) = 0$. Prove que a função

$$U(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ -u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

obtida de u por reflexão ímpar em relação ao eixo x, é harmônica em todo a bola B_1. (Sugestão. Seja v a solução de $\Delta v = 0$ em B_1, $v = U$ sobre ∂B_1. Defina

$$w(x,y) = v(x,y) + v(x,-y)$$

e mostre que $w \equiv 0 \ldots$).

7. (Exterior do Disco) Sejam $a > 0$ e $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 + y^2 > a^2\}$. Considere o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em Ω:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(a,\theta) = h(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ |u| \leq M \quad \text{em } \Omega \end{cases}$$

com $h \in C^1(\mathbb{R})$, periódica com período 2π.

a) Use o método de separação de variáveis para determinar a solução deste problema de Dirichlet.

b) Encontre a seguinte fórmula de Poisson para o problema no exterior do disco:

$$u(r,\theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi) + a^2} d\phi$$

para $r > a$.

c) Observe que se removermos a condição de limitação de u ($|u| \leq M$ em Ω), então o problema possui infinitas soluções.

d) Escreva a solução do problema com condição de fronteira $h(\theta) = 1 + 3\sin\theta$ em $r = a$ e a condição de limitação de u.

8. Demonstra que se u é harmônica em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, então qualquer derivada de u de qualquer ordem também é harmônica em D.

9. (a) Determinar a expressão de todos os polinôminios $P(x, y)$ harmônicos e homogêneos de grau 2.

   (b) Determinar a expressão de todos os polinôminios $P(x, y)$ harmônicos e homogêneos de grau 3.

   (c) Determinar a expressão de todos os polinôminios $P(x, y)$ harmônicos e homogêneos de grau n.

10. Seja D um aberto e conexo em $\subset \mathbb{R}^2$. Diz-se que uma função $u \in C^2(D)$ é subharmônica (respectivamente, superharmônica) em D se $\Delta u \geq 0$ (respectivamente, $\Delta u \leq 0$) em D.

    (a) Seja $(x_0, y_0) \in D$ e $r > 0$ tal que $\overline{B_r(x_0, y_0)} \subset D$. Prove que se u é subharmônica em D então

    $$u(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(x_0,y_0)} u ds \quad \text{e} \quad u(x_0, y_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(x_0,y_0)} u(x, y) dx dy$$

    Se u é superharmônica as inequações são reversas.

    (b) (Princípio do máximo (forte) para funções subharmônicas) Suponha que u é subhamônica em D e atinge seu máximo em D, mostre que u é constante. Em particular, se além disso D é limitado, u admite máximo (mínimo) em $\overline{D}$ o qual é assumido em ∂D. Dê um exemplo para mostrar que isso não é verdade para o valor mínimo (respectivamente, máximo).

11. Considere problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Encontre uma condição necessária para a existência de solução do problema. (Sugestão: use o teorema da divergência.)

12. Seja u uma função harmônica e não negativa numa bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$.

    a) Use a fórmula de Poisson para a mostrar a desigualdade de Harnack:

    $$\frac{R - |x|}{R + |x|} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R + |x|}{R - |x|} u(0), \quad \forall x \in B_R(0).$$

    b) Mostre que

    $$\max_{B_{R/2}(0)} u \leq 9 \inf_{B_{R/2}(0)} u.$$

13. Seja u harmônica em D. Mostre que

    (a) u^2 é subharmônica em D.

    (b) Se $F \in C^2(\mathbb{R})$ é convexa, então $w = F(v)$ é subharmônica em D.

    (c) Seja u uma função harmônica em $\mathbb{R}^2$, $n \geq 2$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx < \infty$. Mostre que $u \equiv 0$.

    (Sugestão. Escreva a inequação da média em $B_R(P)$ para u^2. Use a desigualdade de Schwarz e faça $R \to \infty$.)