Prova 2 - SMA0169 - EDP - 27.5.2024

Prof. Sergio H. Monari Soares

Nome:______________________________________

Número USP:__________________________________

Questão	Valor	Nota
$1.^a$	2,0	
$2.^a$	3,0	
$3.^a$	3,0	
$4.^a$	2,0	
Total	10,0	

1. Seja $u(x,t)$ solução do problema

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x) \text{ e } u_t(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Encontre o maior intervalo $J = [a,b]$ no eixo x onde modificar f e/ou g neste intervalo pode alterar o valor de $u(6,5)$.

Solução. A fórmula de d'Alembert dá

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+3t) + f(x-3t)\right] + \frac{1}{6}\int_{x+3t}^{x-3t} g(s)ds.$$

Tomando $x = 6$ e $t = 5$, enontramos

$$x - 3t = -9 \quad \text{e} \quad x + 3t = 21.$$

Portanto, os únicos pontos no eixo x que podem influenciar o valor de $u(6,5)$ estão no intervalo $[-9,21]$.

2. Seja $u(x,t)$ a solução para o problema

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,t) = 2te^{1-t},\ u(1,t) = 1 - \cos \pi t, \quad t \ge 0$$

(a) Prove que u é não negativa.

(b) Encontre uma limitação superior para os valores de $u(1/2,3)$.

Solução. (a) Considere o conjunto Γ formado pelas arestas laterais e pela a aresta da base do retângulo $[0,1] \times [0,\infty)$ no plano xt. As arestas laterais é a união das semiretas $x = 0$, $x = 1$, $t > 0$ e a aresta da base é o segmento $0 \le x \le 1$ sobre o eixo x ($t = 0$). Pelo princípio do máximo, u é não negativo em toda a faixa $[0,1] \times [0,\infty)$ se $u \ge 0$ sobre Γ. Nas semiresta temos $2te^{-t} \ge 0$ e $1 - \cos \pi x \ge 0$; os dados iniciais $\sin \pi x$ também não são negativos. Concluímos, portanto, que $u(x,t) \ge 0$ para todo $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$.

(b) Novamente para o princípio máximo, o valor $u(1/2,3)$ não excede o máximo dos dados nas arestas laterais e na aresta da base do retângulo $[0,1] \times [0,3)$, a saber

$$\{(x,0) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(0,t) : 0 \le t < 3\} \cup \{(1,t) : 0 \le t < 3\}$$

O máximo do dado inicial $\sin \pi x$ e de $1 - cos\pi t$ é igual a 1. A função $2te^{1-t}$ tem máximo global igual a 2 em $t = 1$; assim no intervalo [0, 3] seu máximo é 2. Portanto, podemos dizer que $u(1/2,3) \le 2$. Na verdade, podemos dizer que $u(x,t) \le 2$ ao longo de toda a faixa $[0,1] \times [0,\infty)$.

3. Considere o problema da corda finita

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0,\\
u(0,t) &= u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,\\
u(x,0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L,\\
u_t(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L,
\end{aligned}
$$

onde $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 em $[0, 2]$ com $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$ e f'' é diferenciável em $(0, L)$ a menos de um número finito de pontos e f''' é contínua por partes.

(a) Use a separação de variáveis para encontrar a função $u(x, t)$ candidata a solução desse problema.

(b) Mostre que $u(x, t)$ obtida em (a) é uma função de classe C^2 e é solução desse problema.

(c) Discuta a unicidade de solução desse problema.

Solução. (a) Vamos procurar soluções que sejam da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo na equação das ondas, obtemos

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Dividindo por $-c^2X(x)T(t)$,

$$-\frac{T''}{c^2T} = -\frac{X''}{X} = \lambda,$$

ou seja

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{e} \quad T''(t) + c^2\lambda T(t) = 0.$$

Impondo as condições de fronteira (2), obtemos o seguinte problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Como a condição de Dirichlet é simétrica e satisfaz $X(x)X'(x)\Big|_0^L = 0$, os autovalores λ são reais e não negativos. Há dois apenas dois casos a serem estudados: $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Se $\lambda = 0$, $X(x) = A + Bx$ e as condições $X(0) = X(L) = 0$ implicam $A = B = 0$, ou seja, $X \equiv 0$ e portanto 0 não é autovalor.

Se $\lambda > 0$, podemos escrever $\lambda = \beta^2 > 0$. Nste caso, $X(x) = A\sin\beta x + B\cos\beta x$. Ao impor as condições $X(0) = X(L) = 0$, temos

$$X(0) = B = 0, \quad X(L) = A\sin\beta L = 0.$$

Como estamos procurando solução não nula, $A \neq 0$ e portanto $\beta L = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$. Assim,

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

onde $A \neq 0$ é uma constante arbitrária. Com os valores λ_n, a equação diferencial ordinária na variável t tem como solução geral

$$T_n(t) = C\cos\frac{n\pi ct}{L} + D\sin\frac{n\pi ct}{L}$$

Obtemos assim uma família de soluções

$$u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{L} + B_n\sin\frac{n\pi L}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

com constantes arbitrárias A_n e B_n, as quais satisfazem a equações das ondas e as condições de fronteira. A função candidata a solução é dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

onde os coeficientes A_n e B_n devem ser escolhidos de modo que as condições iniciais

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

$$0 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{2}$$

estejam satisfeitas para $0 \leq x \leq L$, a saber,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L 0 \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Portanto, a função candidata a solução desse problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

com coeficientes A_n dados por

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(b) Sendo f de classe C^2 em $[0,L]$ e $f(0) = f(L) = g(0) = 0$, a função f pode ser estendida continuamente a toda reta de modo a ser ímpar e periódica de período $2L$. Pelo teorema da convergência pontual da série de Fourier, a seguinte igualdade ocorre:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \forall\, x \in [0,L]$$

com

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Para provar que u obtida em (a) é contínua em $[0,L] \times [0,\infty)$, basta mostar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$, pois ela majora a série que define $u(x,t)$. Integração por partes três vezes e as hipóteses $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$ implicam que

$$A_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \tag{3}$$

Assim,

$$|A_n| \leq \frac{C}{n^3}, \quad \text{onde} \quad C = \frac{2L^2}{\pi^3} \int_0^L |f'''(x)| dx.$$

Logo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|$ convergem, o que mostra que u é contínua em $[0,L] \times [0,\infty)$ e de classe C^1 em $(0,L) \times (0,\infty)$. E mostra também que as derivadas parciais de primeira ordem de u

podem ser obtidas derivando a série que define $u(x,t)$ termo a termo:

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} \cos\frac{n\pi ct}{L} \cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{4}$$

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n \frac{n\pi c}{L} \sin\frac{n\pi ct}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$

Novamente de (3), obtemos

$$|A_n| \leq \frac{D}{n^3}|C_n| \tag{6}$$

onde C_n são os coeficientes de Fourier de f''' e D e é uma constante positiva. Usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ na inequação acima, temos

$$n^2|A_n| \leq \frac{D}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |C_n|^2\right).$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|A_n| \leq \frac{D}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2\right) \tag{7}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente, pois é uma 2-série harmônica, e a série $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$ também é convergente em virtude da desigualdade de Bessel. Logo, a série à esquerda em (7) converge, o que implica que u é de classe C^2 em $(0,L)\times(0,\infty)$ e as derivadas parciais de segunda ordem de u podem ser obtidas derivando (4) e (5) termo a termo para obter:

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{8}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 \cos\frac{n\pi ct}{L}\right]\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{9}$$

o que mostra que $u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$ para todo $0 < x < L$ e $t > 0$, o que conclui o item (b).

(c) Vamos mostrar que a solução desse problema é única. De fato, suponha que esse problema tenha duas soluções, u_1 e u_2. Desse modo, a função $u = u_1 - u_2$ é uma função de classe C^2 em $(0,L)\times(0,\infty)$, contínua em $[0,L]\times[0,\infty)$ e é solução do problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0,\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, \quad t \geq 0,\\ u(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L,\\ u_t(x,0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Usando que a energia da corda

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\rho u_t^2 + T u_x^2\right)\,dx$$

é constante, temos $E(t) = E(0)$. Como $E(0) = 0$, segue que $u_t(x,t) = u_x(x,t) = 0$ para todo $0 \leq x \leq L, t \geq 0$. Logo, $u(x,t) = \text{constante}$ $[0,L]\times[0,\infty)$. Usando que $u(x,0) = 0$ para $0 \leq x \leq L$, concluímos que $u \equiv 0$ e portanto $u_1 \equiv u_2$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica com $f(x) = \pi - x$ para $x \in [-\pi, \pi)$.
   (a) Determine a série de Fourier de f.
   (b) Discuta a convergência da série de Fourier de f.
   (c) Denote por S a função que é a soma da série de Fourier de f. Esboce o gráfico de S com pelo menos três períodos. Justifique a sua resposta.

(a) Os coeficientes da série de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi - x\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, \\ A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = 0 \text{ (verifique)} \\ B_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2(-1)^n}{n} \text{ (verifique)} \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx.$$

(b) Como f é uma função periódica de período 2π e f e f' são contínuas por partes, segue do teorema da convergência pontual para séries de Fourier, para todo $x \in \mathbb{R}$ a série série de Fourier de f converge para $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. Assim,

$$\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

Em particular, no intervalo $[-\pi, \pi]$,

$$\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n} \sin nx = \begin{cases} \pi - x & \text{se } -\pi < x < \pi \\ \pi & \text{se } x = -\pi \text{ e } x = \pi. \end{cases}$$

Como a soma da série é uma função descontínua, a convergência da série de Fourier não pode ser uniforme.

Quanto à convergência em média quadrada, como

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx < \infty,$$

a série de Fourier de f converge em média quadrada para f em $[-\pi, \pi]$.

(c) Usando a convergência pontual da serie de Fourier de f discutida no item (b), o gráfico da função soma da série de Fourier com três períodos é dado pela Figura 1 a seguir.

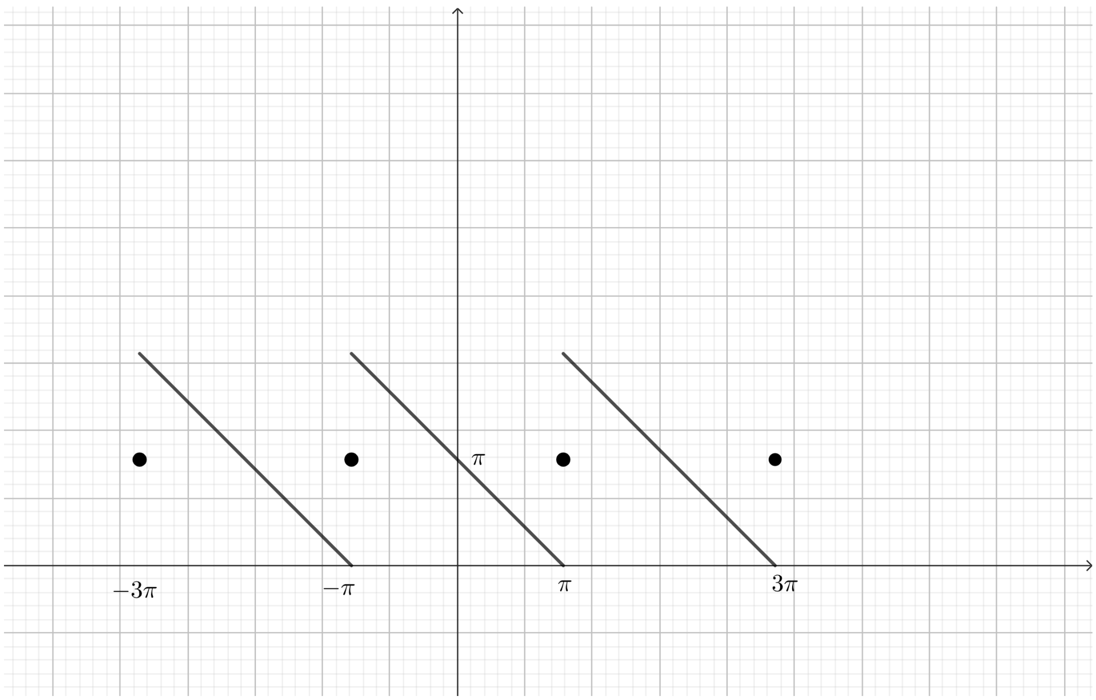

Figura 1: