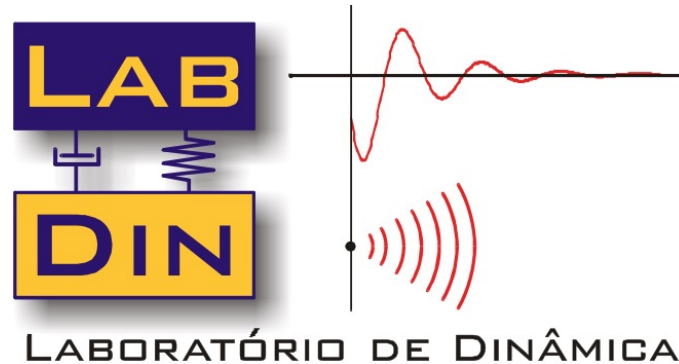


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos *Teoria*



Objetivos

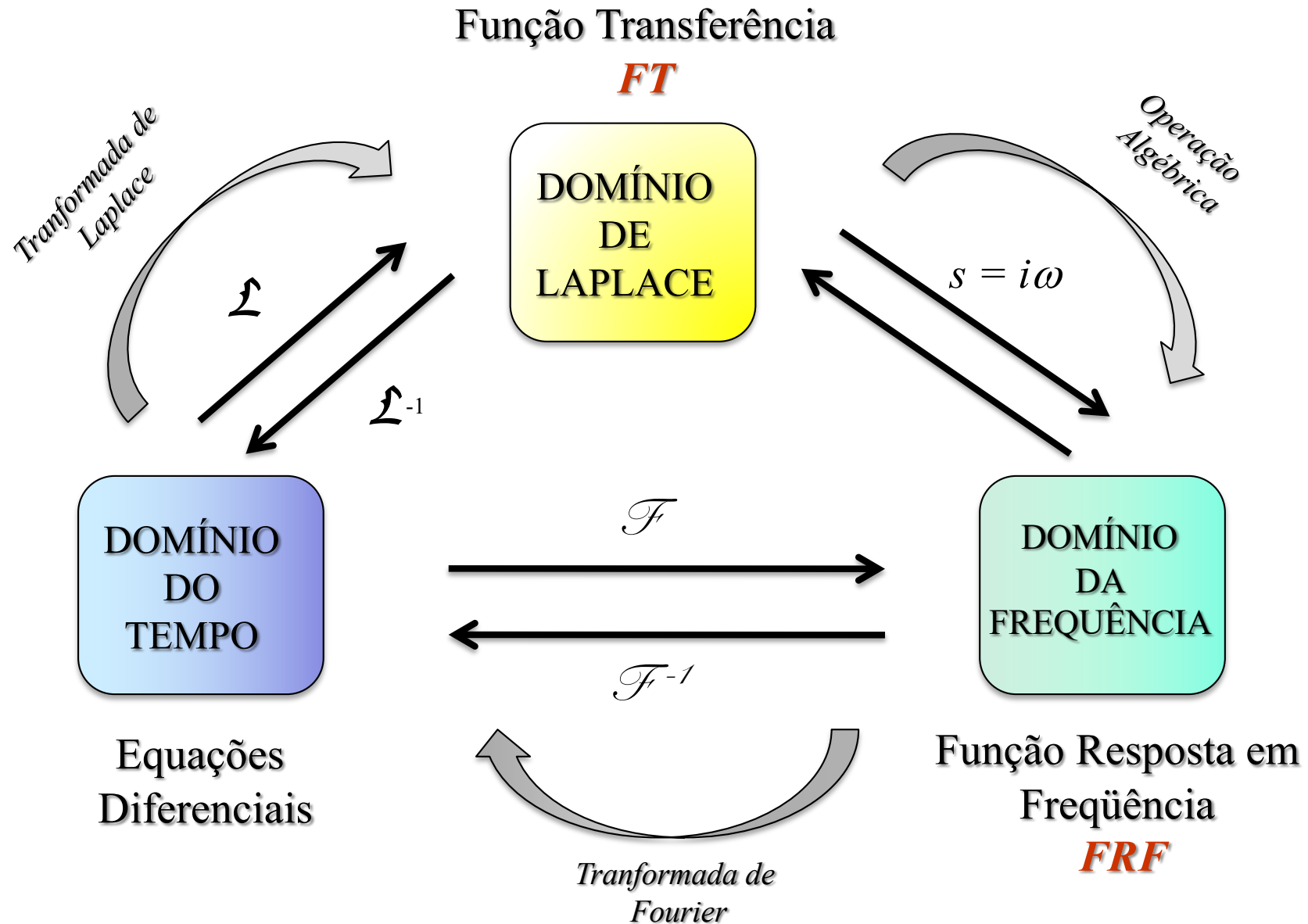
Objetivo da presente aula é discutir a resposta no domínio do tempo para sistemas dinâmicos lineares. Embora a teoria possa ser aplicada a um sistema de qualquer ordem, estaremos concentrando esforços no estudo da resposta *sistemas de primeira e segunda ordem*, no *domínio do tempo* a entradas padrão e *no domínio da frequência* para o estudo da *resposta em frequência* de sistemas dinâmicos

Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

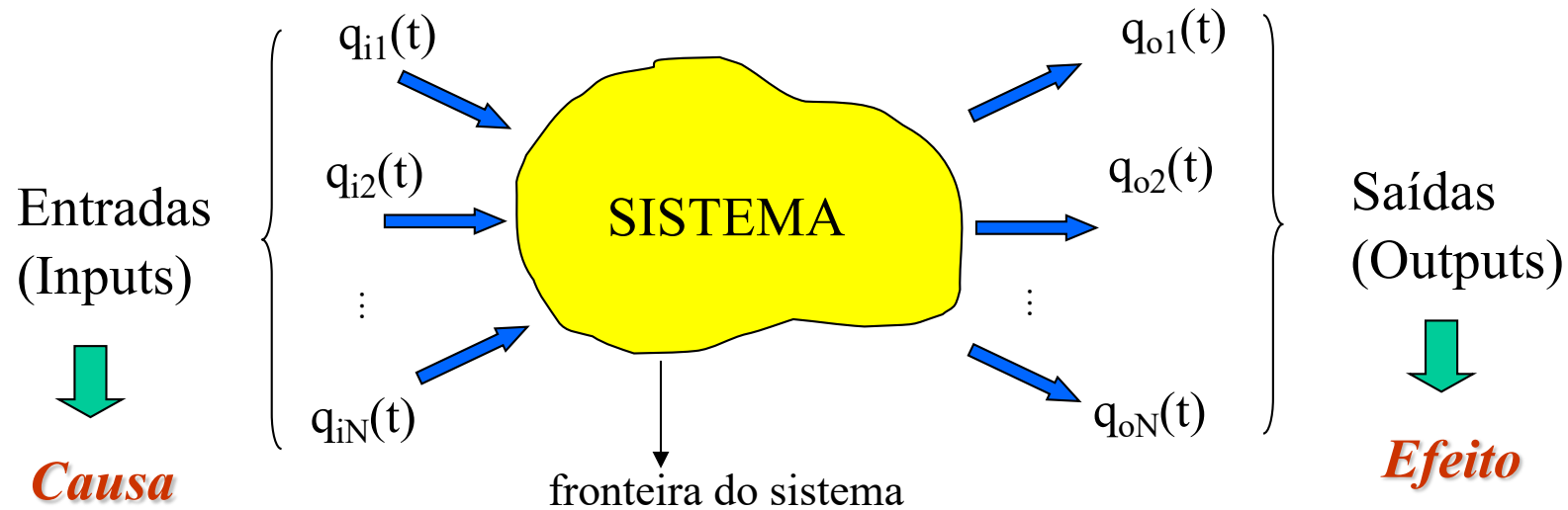


Interação entre Domínios



Recordar é Viver !

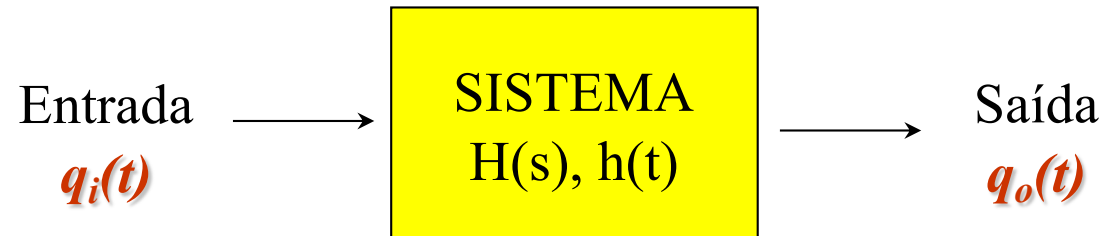
A figura abaixo mostra uma representação muito importante:



- Entradas: Agentes que provocam distúrbios no sistema. Geralmente, não dependem do sistema
- Saídas: Respostas do sistema. São na verdade “entradas” modificadas pelas características dinâmicas do sistema.

Considerações Preliminares

Forma geral de um sistema dinâmico linear de parâmetros concentrados:



No domínio do tempo a EDO do sistema é escrita como:

SISTEMA ($q_o(t)$ saída)

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o =$$

$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + \dots + b_0 q_i$$

ENTRADA ($q_i(t)$)

Cont. ...

De forma abreviada, podemos escrever esta última equação como segue

$$\sum_{p=0}^N a_p \frac{d^p q_o}{dt^p} = \sum_{q=0}^M b_q \frac{d^q q_i}{dt^q}$$

e, usando a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{p=0}^N a_p \frac{d^p q_o}{dt^p} \right\} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{q=0}^M b_q \frac{d^q q_i}{dt^q} \right\}$$

e, usando a propriedade

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df}{dt}(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}(0)$$

Cont. ...

Aplicando a propriedade da derivação a EDO transforma-se numa equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

onde $Q_i(s)$ e $Q_o(s)$ representam as transformadas de Laplace de $q_i(t)$ e $q_o(t)$, respectivamente. Os polinômios $D(s)$ e $N(s)$ possuem a seguinte forma

$$D(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_Ns^N = \sum_{p=0}^N a_p s^p$$

$$N(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_Ms^M = \sum_{q=0}^M b_q s^q$$

Enquanto que $R_o(s)$ e $R_i(s)$ também são polinômios em s , possuindo graus máximos iguais a $(N-1)$ e $(M-1)$, respectivamente e que dependem dos coeficientes a_p e b_p bem como das condições iniciais das variáveis de entrada e saída.



Cont. ...

E a partir da equação algébrica

$$D(s)Q_o(s) + R_o(s) = N(s)Q_i(s) + R_i(s)$$

Obtemos a solução da EDO no domínio de Laplace, escrevendo

$$Q_o(s) = \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s)} + \underbrace{\left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)}\right)}$$

Devida à
Entrada

Devida às
C.I.

E, a resposta do sistema no domínio do tempo é obtida pela T.L. inversa

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)}Q_i(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right) \right\}$$

Cont. ...

Vamos fazer uma reflexão sobre as últimas expressões. Retornando à solução em s

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) + \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right)$$

Esta é a solução geral, que leva em conta a entrada ($Q_i(s)$) e as condições iniciais ($R_i(s)$ e $R_o(s)$). Para o caso mais geral, conforme já mostrado a solução em t fica

$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} \right) \right\}$$

Agora vamos considerar dois casos separadamente. Inicialmente, consideremos que a entrada $q_i(t)$ é nula. Neste caso as equações acima são escritas como

$$Q_o(s) = \frac{R_i(s) - R_o(s)}{D(s)} = \frac{R_i(s)}{D(s)} - \frac{R_o(s)}{D(s)}$$

Resposta
devida às
condições
iniciais


$$q_{ot}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_i(s)}{D(s)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_o(s)}{D(s)} \right\}$$

**Devida
somente às
C.I.**

Cont. ...

Se as condições iniciais forem nulas então temos

$$Q_o(s) = \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s)$$

E a partir desta podemos definir (confirmar !) o conceito de F.T. 

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{q=0}^M b_q s^q}{\sum_{p=0}^N a_p s^p}$$

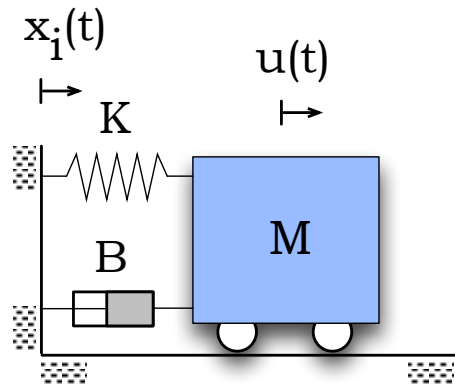
E, neste caso a resposta do sistema no domínio do tempo fica

$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} Q_i(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) Q_i(s) \}$$

Resposta
devida
à entrada
 $q_i(t)$

Cont. ...

Exemplo: Sistema massa mola com entrada deslocamento via base



A equação de movimento é dada por:

$$M \frac{d^2 u_o}{dt^2} + B \frac{du_o}{dt} + K u_o = B \frac{dx_i}{dt} + K x_i$$

Agora transformamos a EDO por Laplace

$$\mathcal{L} \left\{ M \frac{d^2 u_o}{dt^2} + B \frac{du_o}{dt} + K u_o \right\} = \mathcal{L} \left\{ B \frac{dx_i}{dt} + K x_i \right\}$$

Resultando em

$$(Ms^2 + Bs + K) U_o(s) - (Ms + B) u_o(0) - M\dot{u}_o(0) = (Bs + K) X_i(s) - Bx_i(0)$$

Então

$$D(s) = Ms^2 + Bs + K$$

$$R_o(s) = - (Ms + B) u_o(0) - M\dot{u}_o(0)$$

$$N(s) = Bs + K$$

$$R_i(s) = -Bx_i(0)s$$

Cont. ...

$$U_o(s) = \underbrace{\frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K}}_{\text{Devida à Entrada } x_i(t)} X_i(s) - \underbrace{\frac{Bx_i(0)}{Ms^2 + Bs + K} + \frac{[(M + B)u_o(0)]s}{Ms^2 + Bs + K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2 + Bs + K}}_{\text{Devida às Condições Iniciais}}$$

Inexistência de condições iniciais na entrada $x_i(t)$

$$U_o(s) = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} X_i(s) + \frac{[(M + B)u_o(0)]s}{Ms^2 + Bs + K} + \frac{M\dot{u}_o(0)}{Ms^2 + Bs + K}$$

Inexistência de condições iniciais na saída $u_o(t)$ conduz à seguinte solução

$$U_o(s) = \frac{Bs + K}{Ms^2 + Bs + K} X_i(s) \quad \Rightarrow \quad U_o(s) = H(s)X_i(s)$$

Cont. ...

E, para o caso da inexistência da entrada ($x_i(t) = 0$) o sistema responde somente às condições iniciais e a expressão da resposta fica então

$$U_{ot}(s) = [(M + B)u_o(0)] \left(\frac{s}{Ms^2 + Bs + K} \right) + M\dot{u}_o(0) \left(\frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \right)$$

E, para todos os casos, a correspondente resposta no domínio do tempo é obtida tomando-se a transformada inversa de Laplace da respectiva expressão. Por exemplo, para o caso da resposta devida somente às condições iniciais temos

$$u_{ot}(s) = \mathcal{L}^{-1} \{U_{ot}(s)\} = [(M + B)u_o(0)] \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{Ms^2 + Bs + K} \right\} + M\dot{u}_o(0) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \right\}$$

s_1 e s_2 : raízes de $Ms^2 + Bs + K$ →

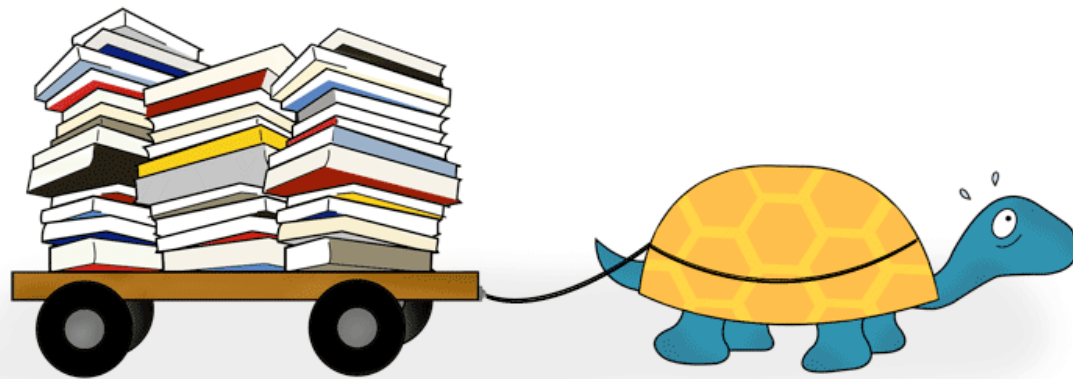
$$\frac{s_2 e^{-s_2 t} - s_1 e^{-s_1 t}}{s_2 - s_1}$$
$$\frac{e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}$$

E, para a resposta devida à $x_i(t)$ (condições iniciais nulas):

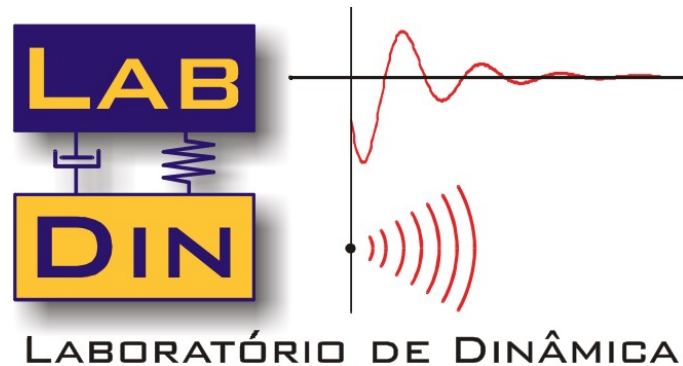
$$u_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)X_i(s)\} \quad \text{que depende de } x_i(t)$$

FIMM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos Sistemas de Primeira Ordem



SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral :

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + b_1 \frac{dq_i}{dt} + \dots + b_0 q_i$$

E, de forma mais simplificada:

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Na forma padrão:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

De forma compacta esta última equação pode ser escrita como:

$$\mathcal{T} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K}q_i$$

Onde

$$\mathcal{T} = \frac{a_1}{a_0} \Rightarrow \text{CONSTANTE DE TEMPO [s]}$$

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow \text{GANHO DE REGIME PERMANENTE [q_o]/[q_i]}$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da EDO temos:

$$\mathcal{T}(sQ_o(s) - q_o(0)) + Q_o(s) = \mathbb{K}Q_i(s)$$

Então, a solução em Laplace escreve

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s + 1} + \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s + 1}$$

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

E, para o caso de $q_o(0) = 0$ temos para a resposta devida somente à $q_i(t)$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s + 1}$$

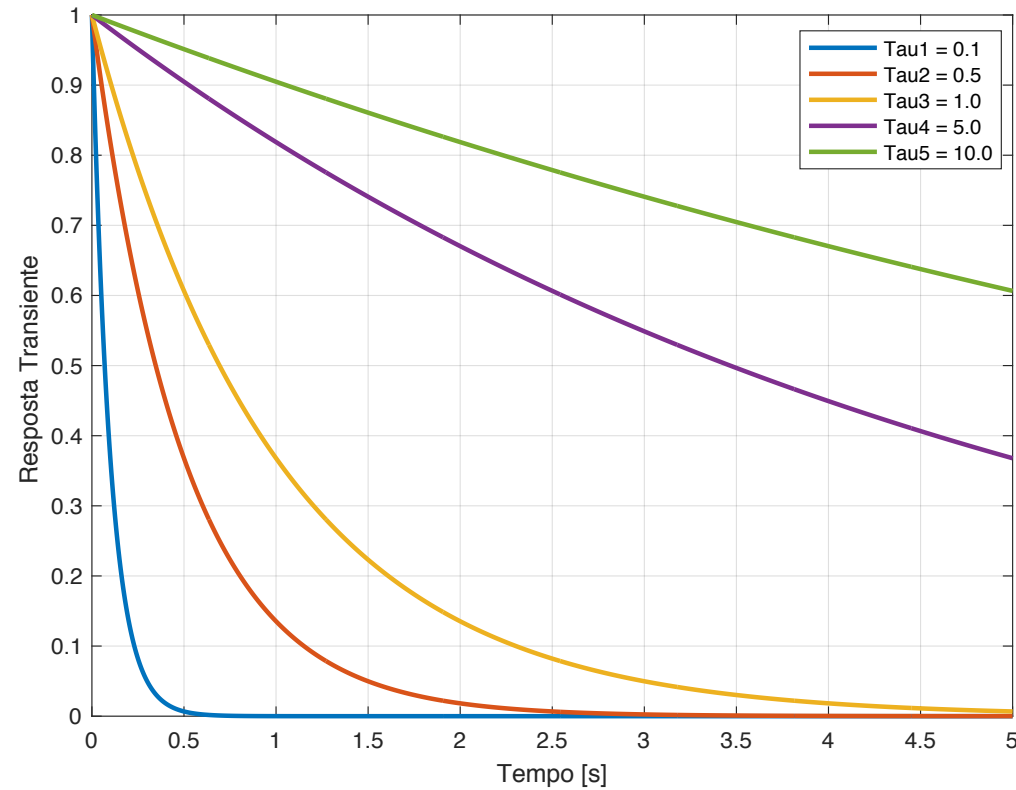
Da qual obtemos a F.T. para um sistema de primeira ordem na forma padrão

$$H(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\mathcal{T}s + 1}$$

De forma análoga, se $q_i(t) = 0$ temos a resposta devida à $q_o(0)$ dada por

$$Q_{ot}(s) = \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s + 1} = \frac{q_o(0)}{s + \frac{1}{\mathcal{T}}} \quad \Rightarrow \quad q_{ot}(t) = q_o(0)e^{-\frac{1}{\mathcal{T}}t}$$

Gráfico da Resposta



A resposta devida somente à $q_i(t)$ em t é obtida de:

$$q_{op}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)Q_i(s)\}$$

Cont. ...

E a resposta total é a soma das duas parcelas

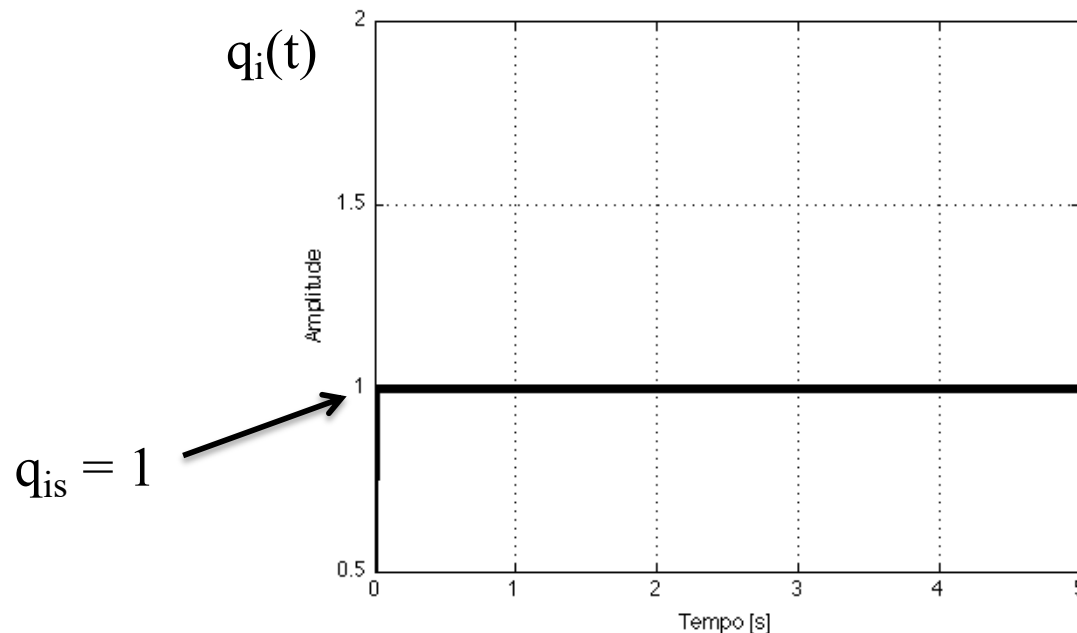
$$q_o(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)Q_i(s)\} + q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Como mostrado, a resposta total $q_o(t)$ depende da natureza da entrada $q_i(t)$ e, conseqüentemente de sua transformada de Laplace $Q_i(s)$. Veremos em seguida vários exemplos de entradas sendo as mais importantes:

- O degrau
- A rampa
- O impulso
- Com atraso no tempo
- Combinadas
- Harmônica

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM - EXEMPLOS

Vamos obter a resposta de um sistema de primeira ordem à entrada *degrau unitário* mostrada abaixo



Analiticamente a entrada degrau unitário pode ser expressa como:

$$q_i(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Obs: a notação $u(t)$ ou $\mu(t)$ são amplamente usadas para representar funções degrau !

Cont. ...

Uma entrada degrau com amplitude genérica q_{is} é escrita como: $q_i(t) = q_{is}u(t)$

A Transformada de Laplace da entrada é dada por: $Q_i(s) = q_{is}\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{q_{is}}{s}$

Sabemos que a solução geral é dada por: $Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}Q_i(s)}{\mathcal{T}s + 1} + \frac{\mathcal{T}q_o(0)}{\mathcal{T}s + 1}$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{is}}{\mathcal{T}} \left(\frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\mathcal{T}} \right)} \right) + \frac{q_o(0)}{s + \frac{1}{\mathcal{T}}}$$

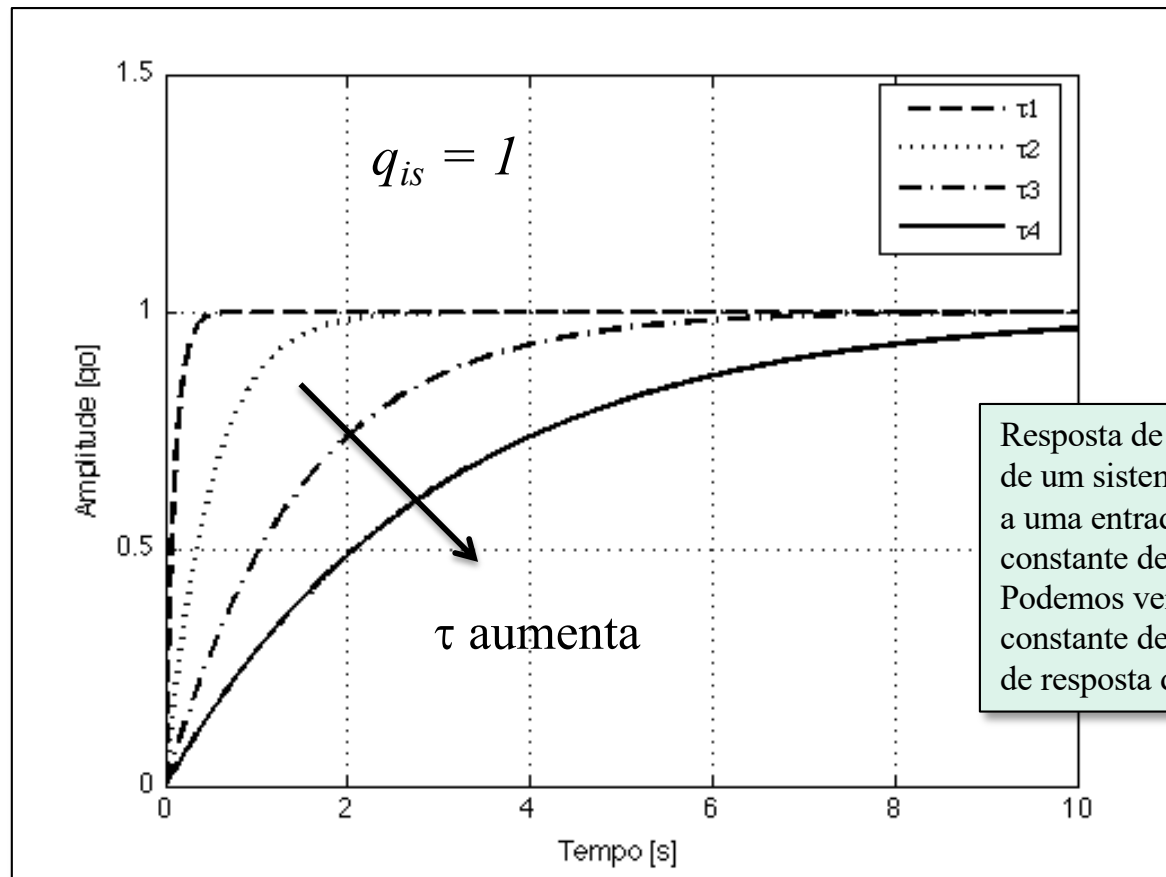
E a solução no domínio do tempo é obtida pela Transformada Inversa de Laplace

$$q_o(t) = \mathbb{K}q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\mathcal{T}}t} \right) + q_o(0)e^{-\frac{1}{\mathcal{T}}t}$$

Cont. ...

E, para $q_o(0) = 0$

$$q_o(t) = \mathbb{K}q_{is} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right)$$



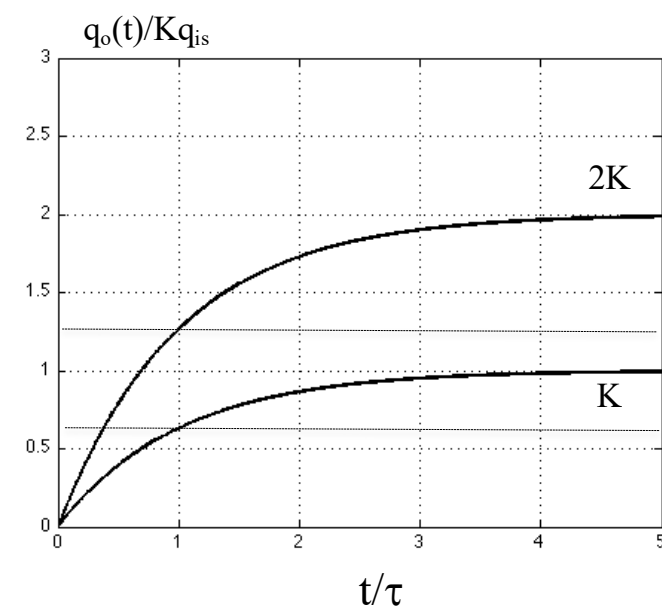
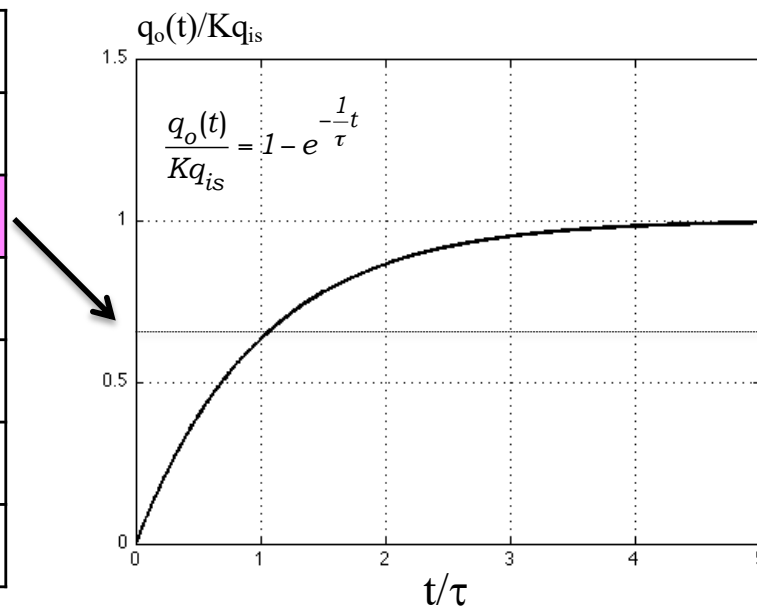
Resposta de regime permanente de um sistema de primeira ordem a uma entrada degrau unitário e constante de tempo variável ! Podemos verificar a influência da constante de tempo τ na velocidade de resposta do sistema !

Cont. ...

Conclusão 1: A constante de tempo τ interfere diretamente na velocidade de resposta do sistema de primeira ordem e de forma inversamente proporcional. Quanto menor a constante de tempo maior é a velocidade de resposta do sistema pois o mesmo atinge a resposta de regime permanente num intervalo de tempo menor (e vice versa)

Façamos agora uma análise adimensional da resposta de regime ao degrau unitário:

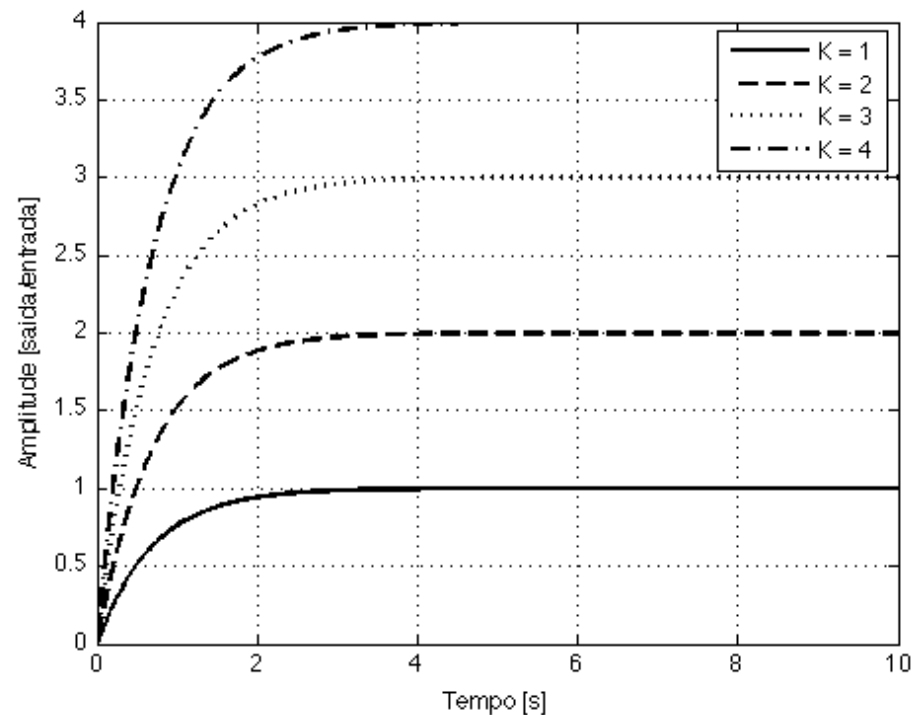
t/τ	$q_o(t)/Kq_{is}$
0	0
1	0,632
2	0,865
3	0,950
4	0,982
∞	1.000



Cont. ...

Definição: A constante de tempo de um sistema de primeira ordem τ representa o intervalo de tempo necessário para que o sistema atinja 63,2 % da resposta de regime permanente para uma entrada degrau unitário na origem dos tempos e com condições iniciais nulas.

Já o gráfico abaixo mostra a influência do ganho de regime **K** na resposta de regime permanente do sistema:



Cont. ...

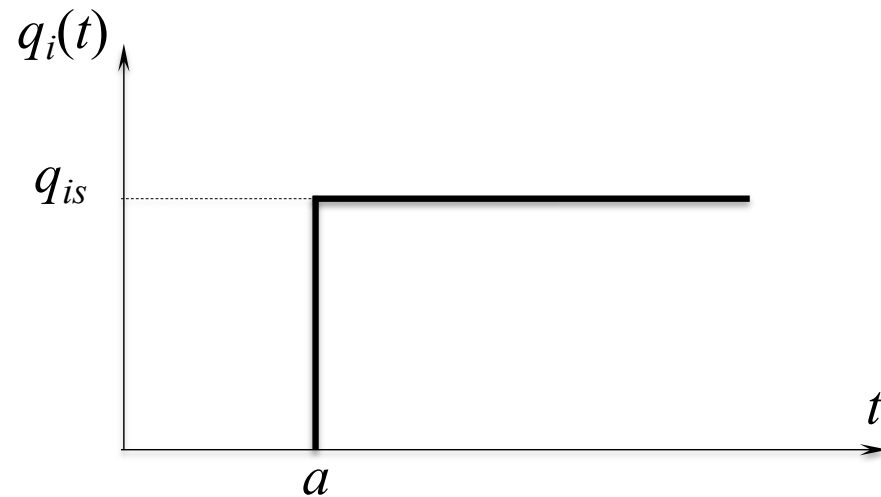
Definição: ***O ganho de regime permanente K*** (ou ***sensibilidade estática***) é definido como a quantidade de saída que se obtém em regime permanente por cada unidade de entrada aplicada ao sistema.

Algebricamente:

$$K = \frac{[q_o(t)]}{[q_i(t)]}$$

Cont. ...

Vejam agora o caso onde a entrada degrau unitário apresenta um atraso no tempo:



$$\Rightarrow q_i(t) = q_{is}u(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ q_{is} & t \geq a \end{cases}$$

E para o cálculo da Transformada de Laplace usamos a seguinte propriedade

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\} = F(s)e^{-as} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-as}\} = f(t - a)$$

Onde $F(s)$ representa a transformada da função não defasada em t !

Cont. ...

Logo para o degrau com atraso temos

$$Q_i(s) = q_{is} \left(\frac{1}{s} \right) e^{-as}$$

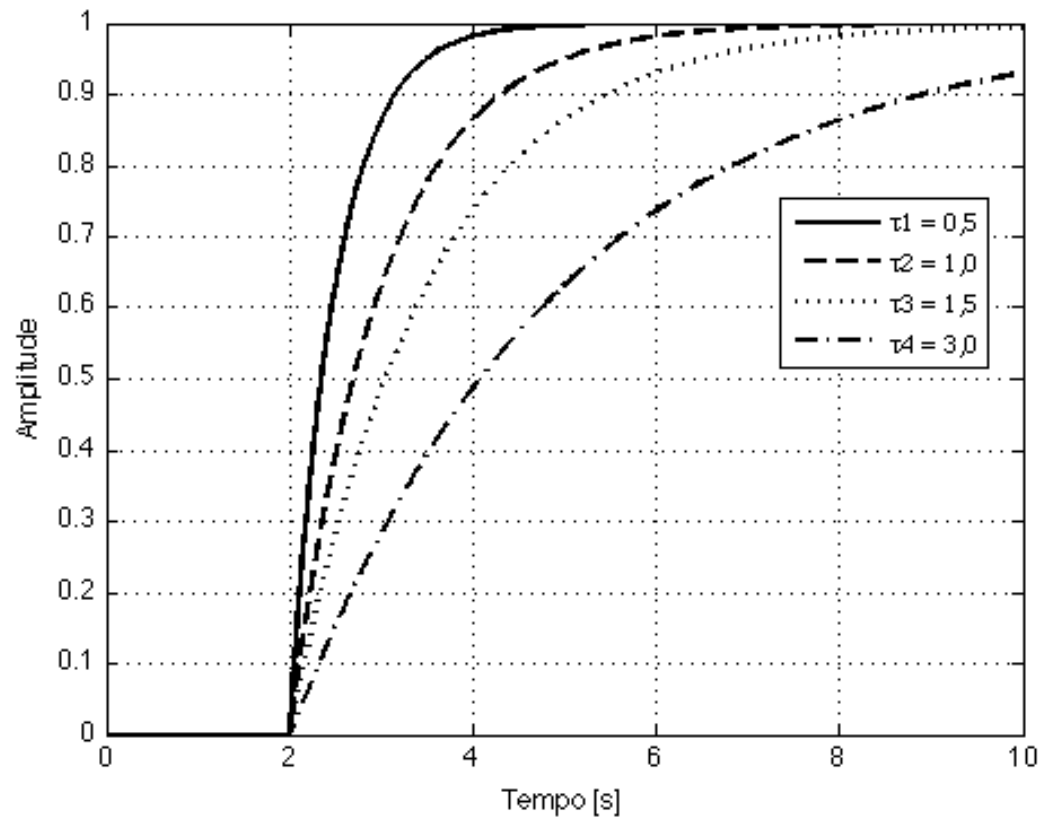
E para determinarmos a *resposta de regime permanente* ($q_o(0) = 0$) usamos

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} Q_i(s) \right\} \Rightarrow q_o(t) = q_{is} \frac{\mathbb{K}}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} \left(\frac{1}{s} \right) e^{-as} \right\}$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{q_{is}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)} \right) u(t - a)$$

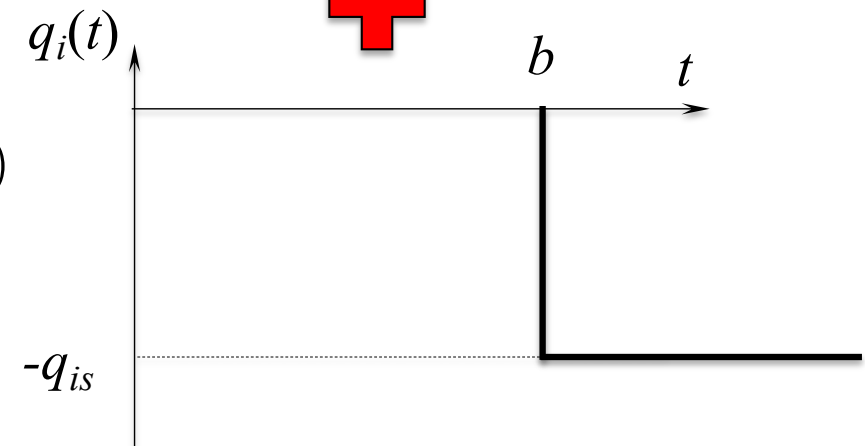
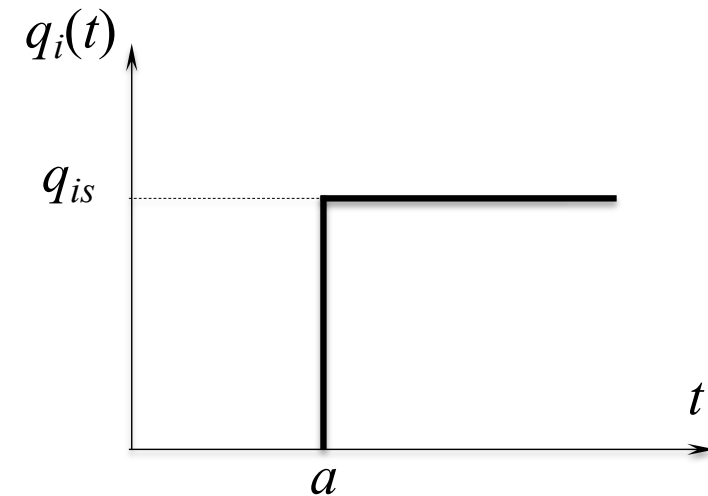
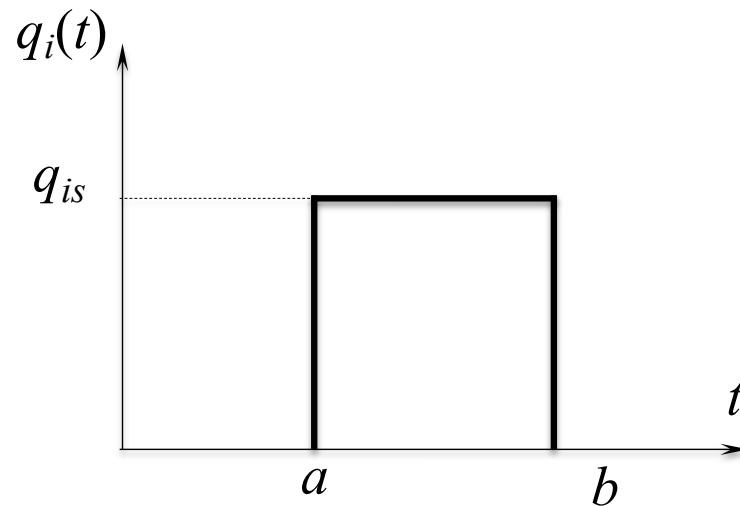
Cont. ...

Graficamente:



Cont. ...

Vamos agora analisar o seguinte caso



$$q_i(t) = q_{is}u(t - a) - q_{is}u(t - b)$$

ou

$$q_i(t) = q_{is}u(t - a) - q_{is}u(t - b)$$

$$Q_i(s) = q_{is} \frac{1}{s} (e^{-as} - e^{-bs})$$



Cont. ...

Calculamos agora a resposta de regime permanente do sistema:

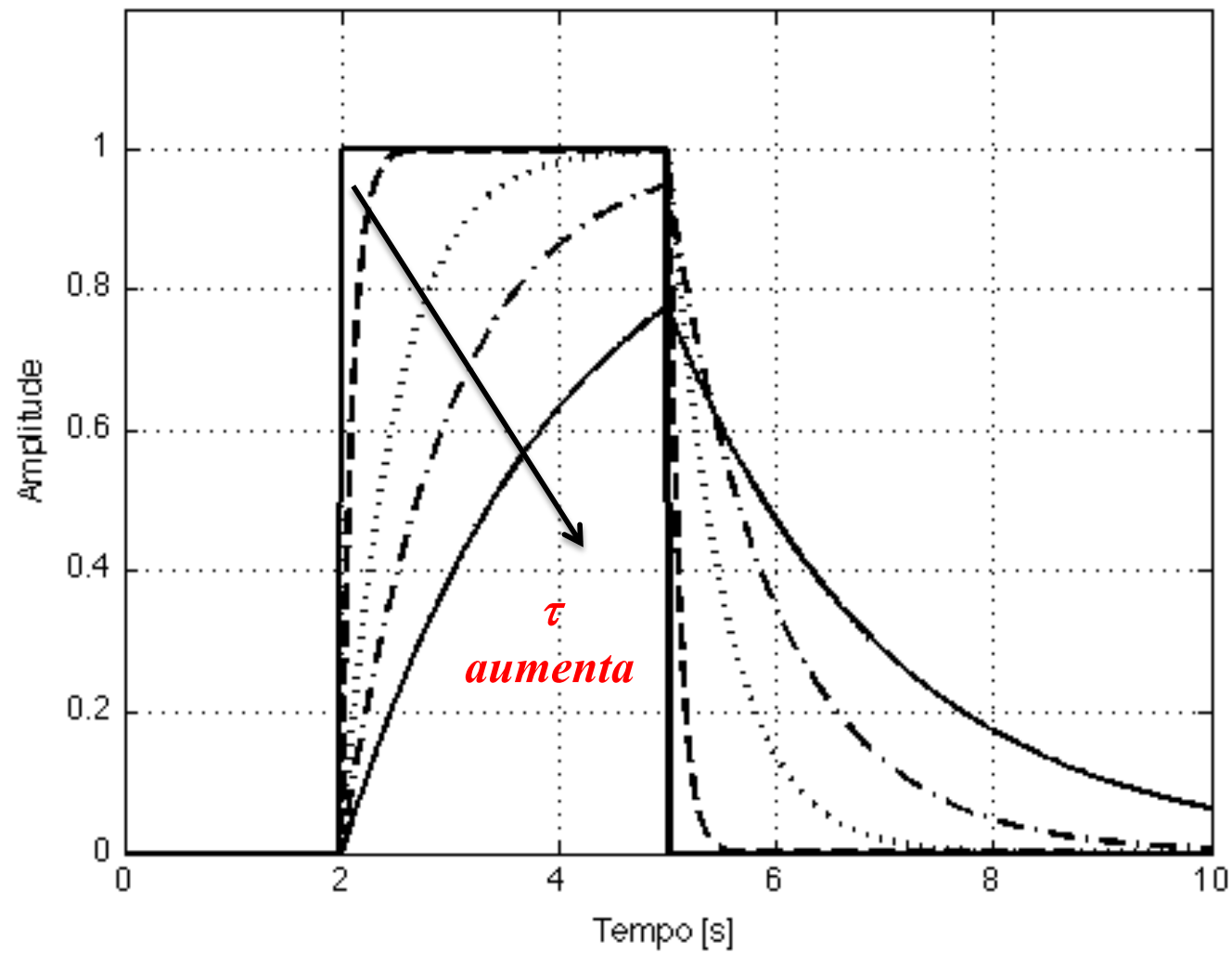
$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} Q_i(s) \right]$$

$$q_o(t) = \frac{\mathbb{K}}{\tau} q_{is} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} e^{-as} - \frac{1}{s} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} e^{-bs} \right]$$

$$q_o(t) = \mathbb{K} q_{is} \left[\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-a)}\right) u(t-a) - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}(t-b)}\right) u(t-b) \right]$$

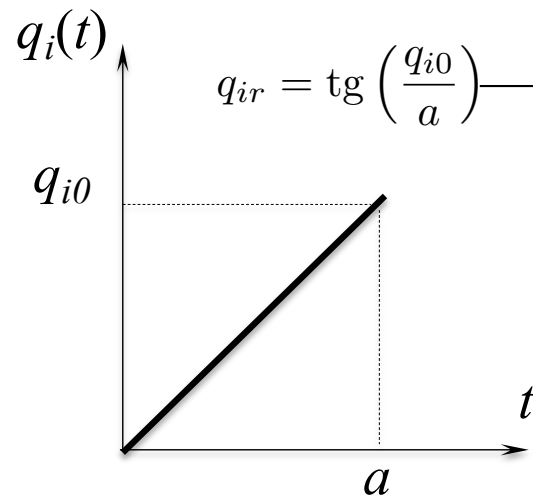
Cont. ...

Graficamente:



Resposta à uma entrada do tipo Rampa

Agora vamos obter a resposta de regime permanente do sistema de primeira ordem à uma entrada do tipo *rampa*.



rampa unitária: $q_{ir} = 1$

$$q_i(t) = q_{ir}t \iff Q_i(s) = \frac{q_{ir}}{s^2}$$

EDO do sistema:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K}q_{ir}t$$

Transformando

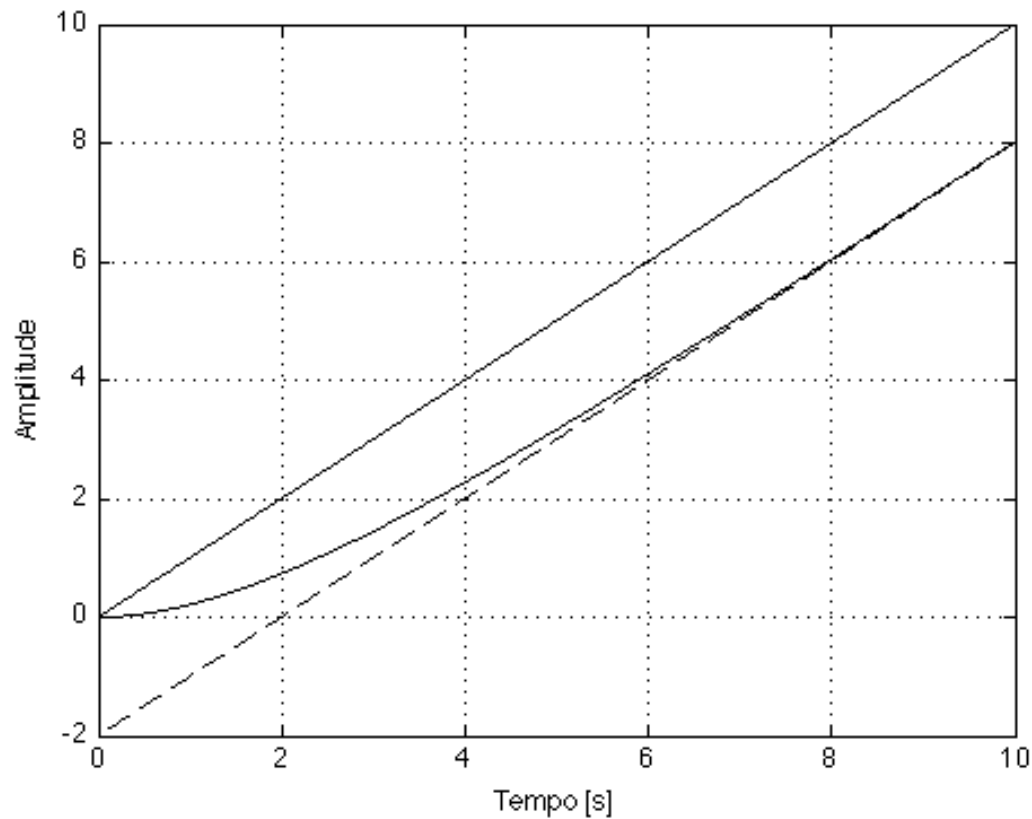
$$\tau (sQ_o(s) - q_o(0)) + Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{ir}}{s^2}$$

$$Q_o(s) = \frac{\mathbb{K}q_{ir}}{s^2(\tau s + 1)} + \frac{\tau q_o(0)}{\tau s + 1}$$

Cont. ...

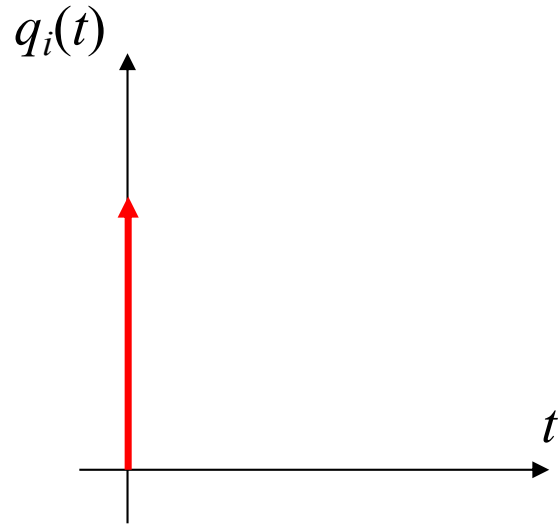
$$q_o(t) = q_o(0)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t - \tau)$$

$$q_o(t) = \mathbb{K}q_{ir}e^{-\frac{1}{\tau}t} + \mathbb{K}q_{ir}(t - \tau)$$



Resposta à uma entrada Impulso

Impulso Unitário: $A_i = 1$



$$q_i(t) = A_i \delta(t) \quad \longleftrightarrow \quad Q_i(s) = A_i$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

EDO do sistema:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = A_i \delta(t)$$

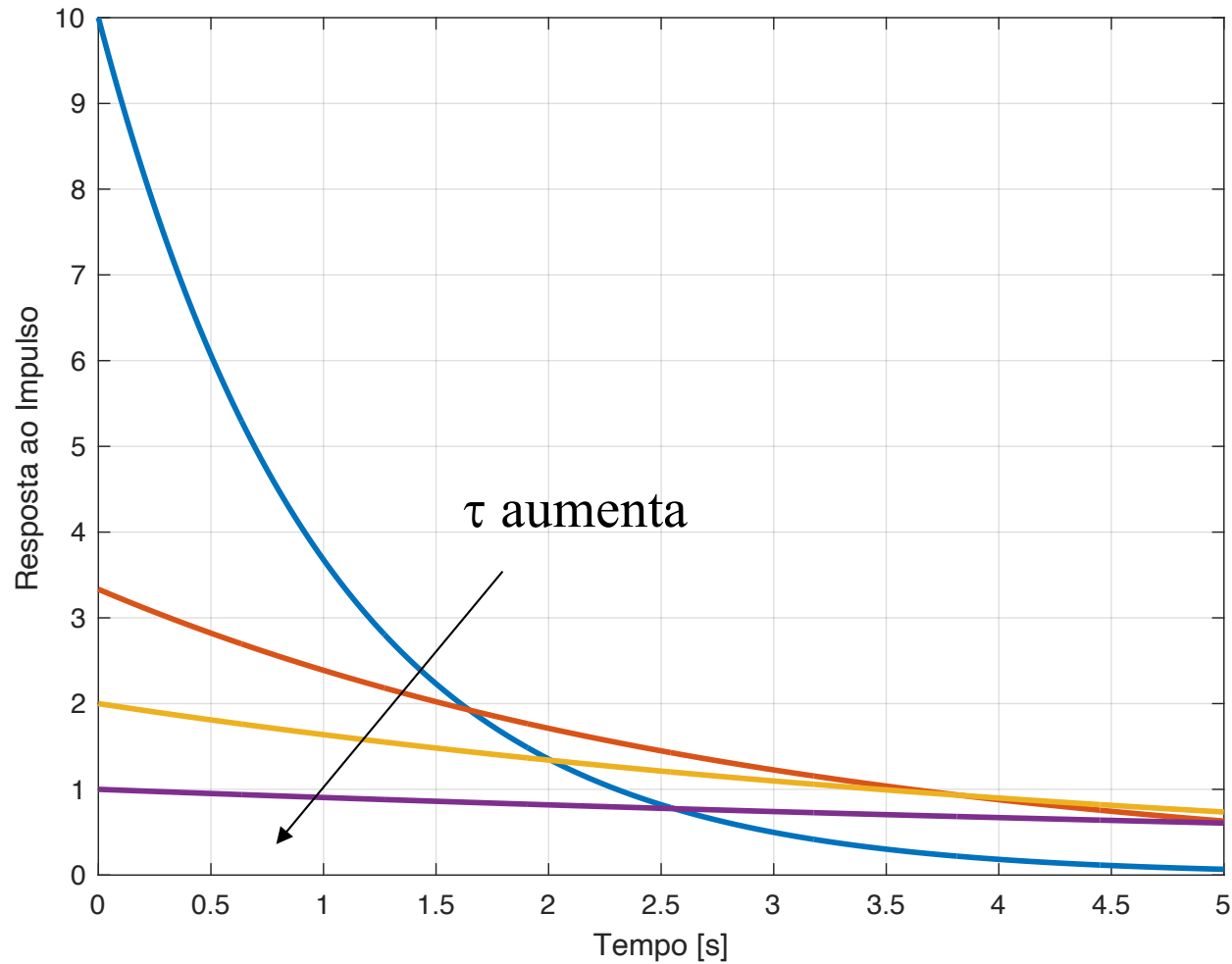
Transformando:

$$\tau(sQ_o(s) - q_o(0)) + Q_o(s) = A_i \quad \Rightarrow \quad Q_o(s) = \frac{\frac{A_i}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{\frac{q_o(0)}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$q_o(t) = \frac{A_i}{\tau} (1 + q_o(0)) e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \Rightarrow \quad q_o(t) = \frac{A_i}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

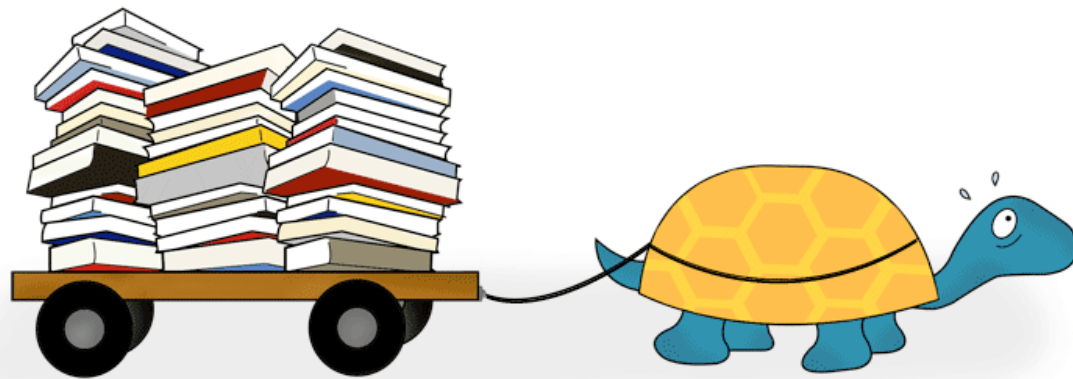
Resposta à uma entrada do tipo Impulso

Graficamente

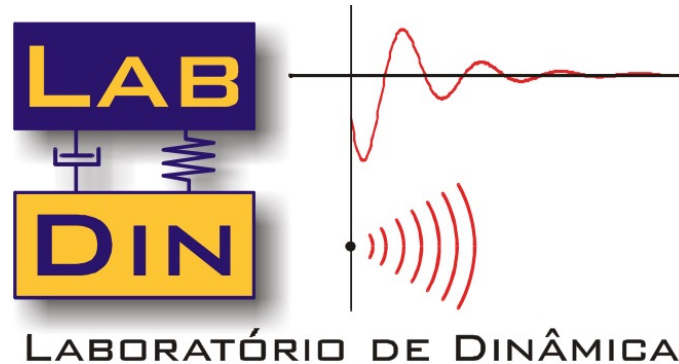


FIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Estudo da Resposta de Sistemas Dinâmicos Sistemas de Segunda Ordem



Sequência de Conteúdos

- Conceituação teórica de um sistema de 2^a Ordem
- Definição dos parâmetros físicos que o caracterizam
- Estudo da resposta de um 2^a Ordem à entradas padrão

Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998



FORMA GERAL

A forma geral de um sistema de primeira ordem é obtida a partir da equação geral para dois casos de interesse:

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + \boxed{a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o} =$$

$$b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \boxed{b_1 \frac{dq_i}{dt} + \dots + b_0 q_i}$$

Modelo # 1

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i$$

Modelo # 2

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Forma Padrão:

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_1}{a_0} \frac{dq_i}{dt} + \frac{b_0}{a_0} q_i$$

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$



Cont. ...

Propriedades importantes:

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$



Frequência natural não amortecida (rad/s)

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$



Razão ou fator de amortecimento (adimensional)

$$\mathbb{K} = \frac{b_0}{a_0}$$



Ganho de regime permanente ([q_o]/[q_i])

Um sistema de segunda ordem fica completamente caracterizado por estas três propriedades

Cont. ...

Portanto, podemos reescrever as EDOs dos dois modelos como

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_1}{a_0} \frac{dq_i}{dt} + \frac{b_0}{a_0} q_i$$

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \mathbb{K} q_i$$

Considerando condições iniciais nulas, as F.T. para os modelos são

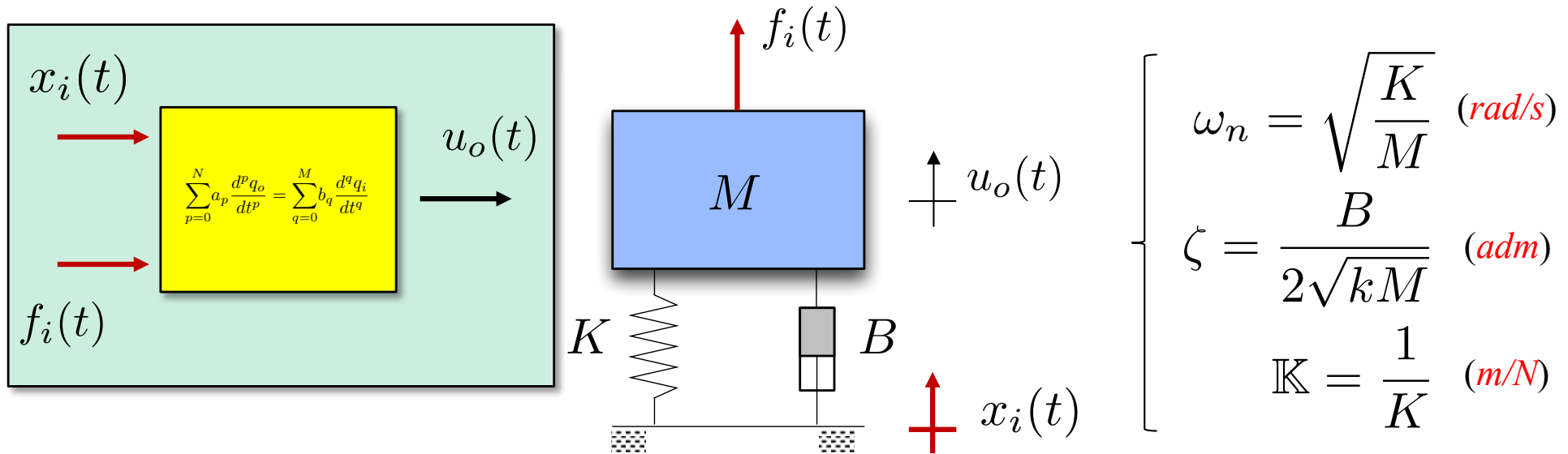
$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{b_1}{a_0} s + \frac{b_0}{a_0}}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

Para fins de determinação da resposta à entradas padrão consideraremos o segundo modelo !

Resposta Transiente Sistema de Segunda Ordem (só às CIs)

Um bom modelo para estudarmos a resposta é o massa-mola-amortecedor



EDO:

$$M \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + B \frac{du_o}{dt} + K u_o = \underbrace{f_i(t)}_{\text{força}} + \underbrace{K x_i(t) + B \dot{x}_i(t)}_{\text{deslocamento}}$$

Forma Padrão:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{du_o}{dt} + u_o = \mathbb{K} f_i(t) + x_i(t) + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{x}_i(t)$$

Cont. ...

Se considerarmos as entradas individualmente temos as seguintes EDOs

Entrada $f_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{du_o}{dt} + u_o = \mathbb{K} f_i$$



$$H(s) = \frac{U_o(s)}{F_i(s)} = \frac{\mathbb{K}}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

Entrada $X_i(t)$:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{du_o}{dt} + u_o = x_i + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{x}_i$$



$$H(s) = \frac{U_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

Para a resposta transiente :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 u_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{du_o}{dt} + u_o = 0$$

$$u_o(0) \neq 0 \quad \dot{u}_o(0) \neq 0$$



Cont. ...

Para o estudo da resposta às condições iniciais fazemos $f_i(t) = 0$ e então

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 u_o}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{du_o}{dt} + u_o = 0$$

Tomando a T.L. para condições iniciais quaisquer temos

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) U_o(s) - (s + 2\zeta\omega_n)u_o(0) - \dot{u}_o(0) = 0$$

E resolvendo algebricamente para $U_o(s)$

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A solução no domínio do tempo é obtida pela transformada inversa de Laplace desta última expressão. No entanto, esta transformação depende da natureza das raízes da **equação característica do sistema**

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Equação
característica

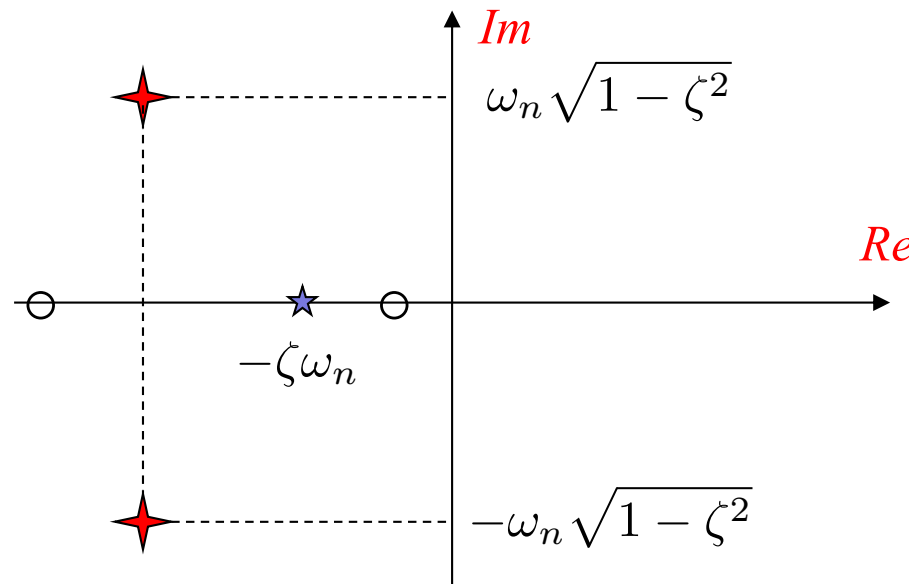
Cont. ...

Temos três possibilidades:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \begin{cases} \textit{Reais e distintas} & s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \Leftrightarrow \zeta > 1 \textit{ sobreamortecido} \\ \textit{Reais e iguais} & s_{1,2} = -\zeta\omega_n \Leftrightarrow \zeta = 1 \textit{ criticamente amortecido} \\ \textit{Complexas} & s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \Leftrightarrow 0 < \zeta < 1 \textit{ subamortecido} \end{cases}$$

Plano Complexo

As raízes $s_{1,2}$ são denominadas pólos do sistema !



$$\zeta = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

$$B_c = 2\sqrt{KM}$$

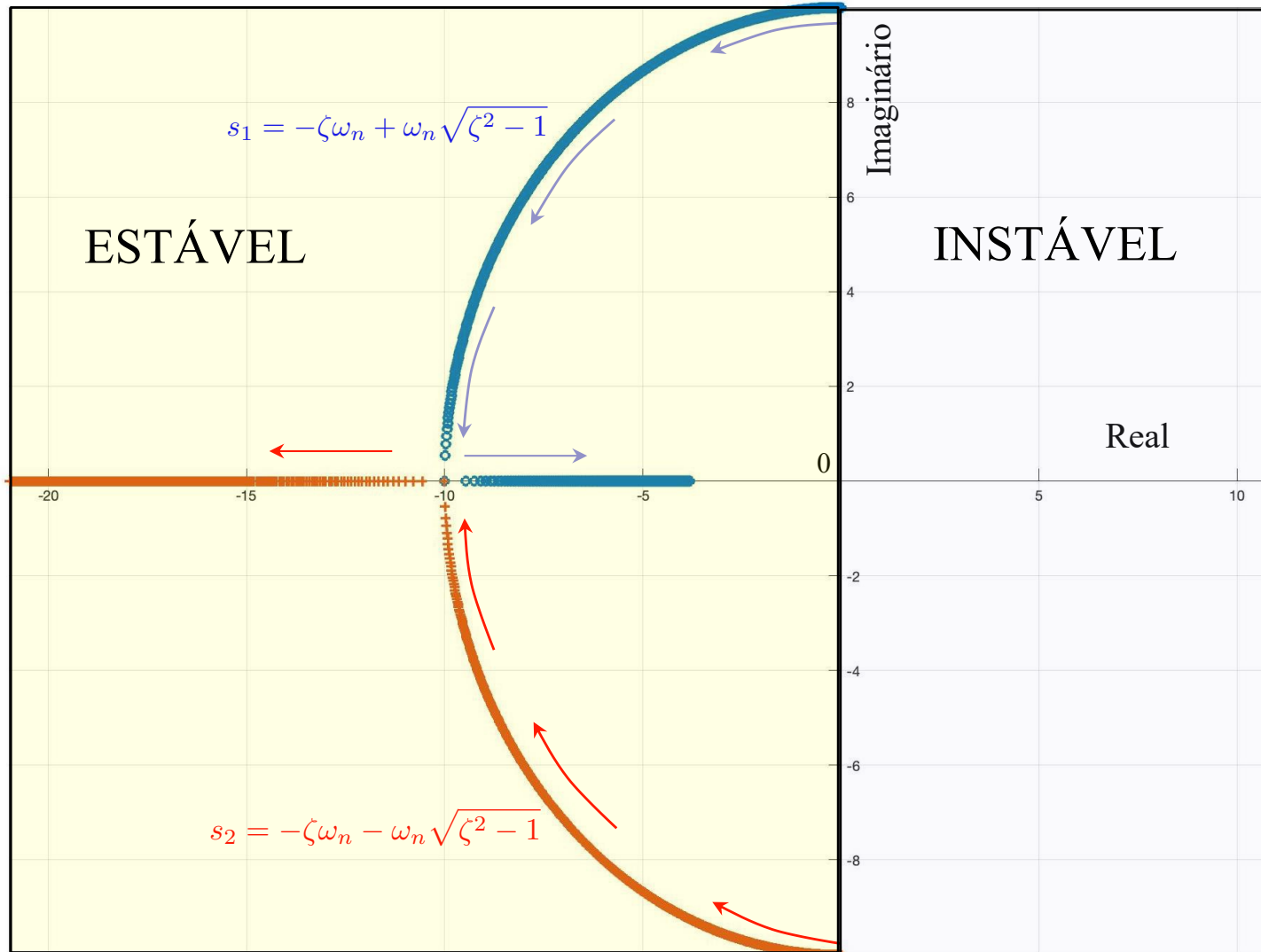
amortecimento crítico

$$\zeta = \frac{B}{B_c}$$



Cont. ...

Lugar das raízes da equação característica com variação do amortecimento



Cont. ...

Para obtermos a resposta às CIs para os três casos retornemos à solução:

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\dot{u}_o(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

E fatoramos o polinômio do denominador em função de suas raízes

$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

A solução no domínio do tempo dependerá do valor de ζ ! então teremos três soluções

$\zeta > 1$:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(a_1 e^{-\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} + a_2 e^{+\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} t} \right)$$

$$a_1 = \frac{-\dot{u}_o(0) - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n u_o(0)}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$
$$a_2 = \frac{\dot{u}_o(0) + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_n u_o(0)}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

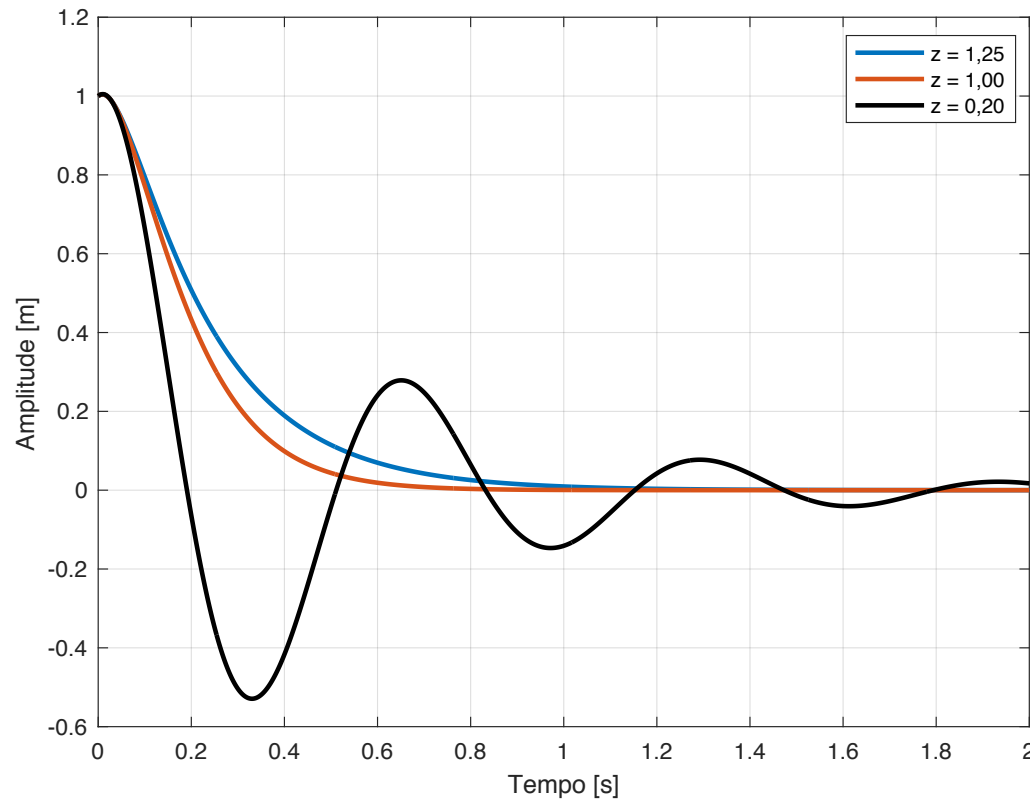
Cont. ...

$$\zeta = 1:$$

$$u_o(t) = [u_o(0) + (\dot{u}_o(0) + \omega_n u_o(0)) t] e^{-\omega_n t}$$

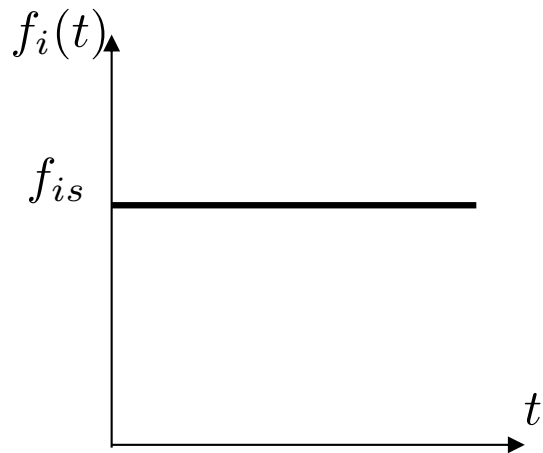
$$0 < \zeta < 1,0:$$

$$u_o(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(u_o(0) \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{u}_o(0) + \zeta \omega_n u_o(0)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right)$$



Resposta à Entrada Degrau

Modelo da entrada:



$$f_i(t) = f_{is}u(t)$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + Ku_o = f_{is}u(t)$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K}f_{is}u(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1,0$

Logo, as raízes da equação característica são:

*Frequência Natural
amortecida !*

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Cont. ...

Aplicando a T.L. a ambos os lados da equação de movimento e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K}f_{is}}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

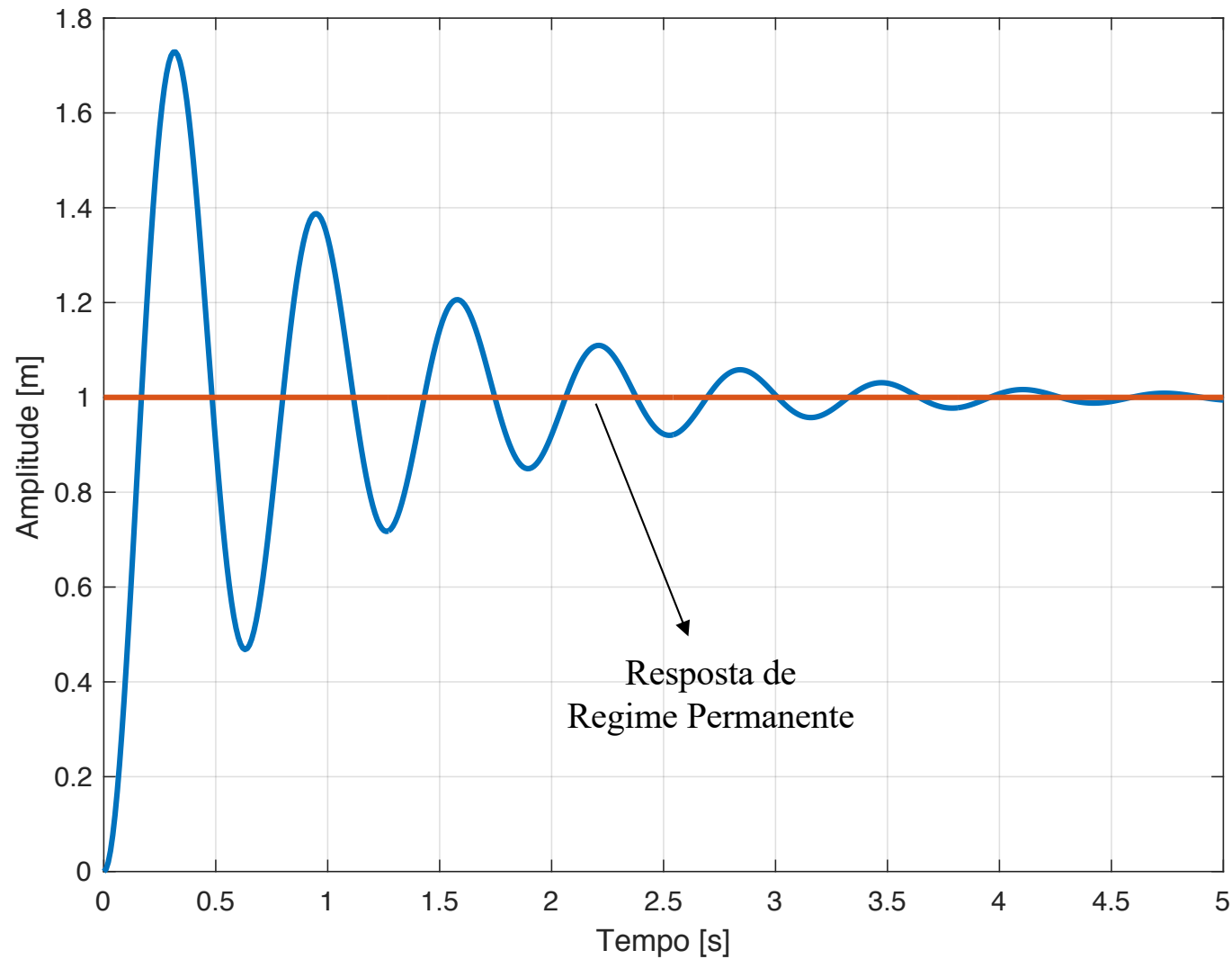
E, calculando a transformada inversa temos a resposta de regime permanente à uma entrada degrau de amplitude f_{is}

$$u_o(t) = \mathbb{K}f_{is} \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \text{sen}\omega_d t + \text{cos}\omega_d t \right) \right]$$
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)$$

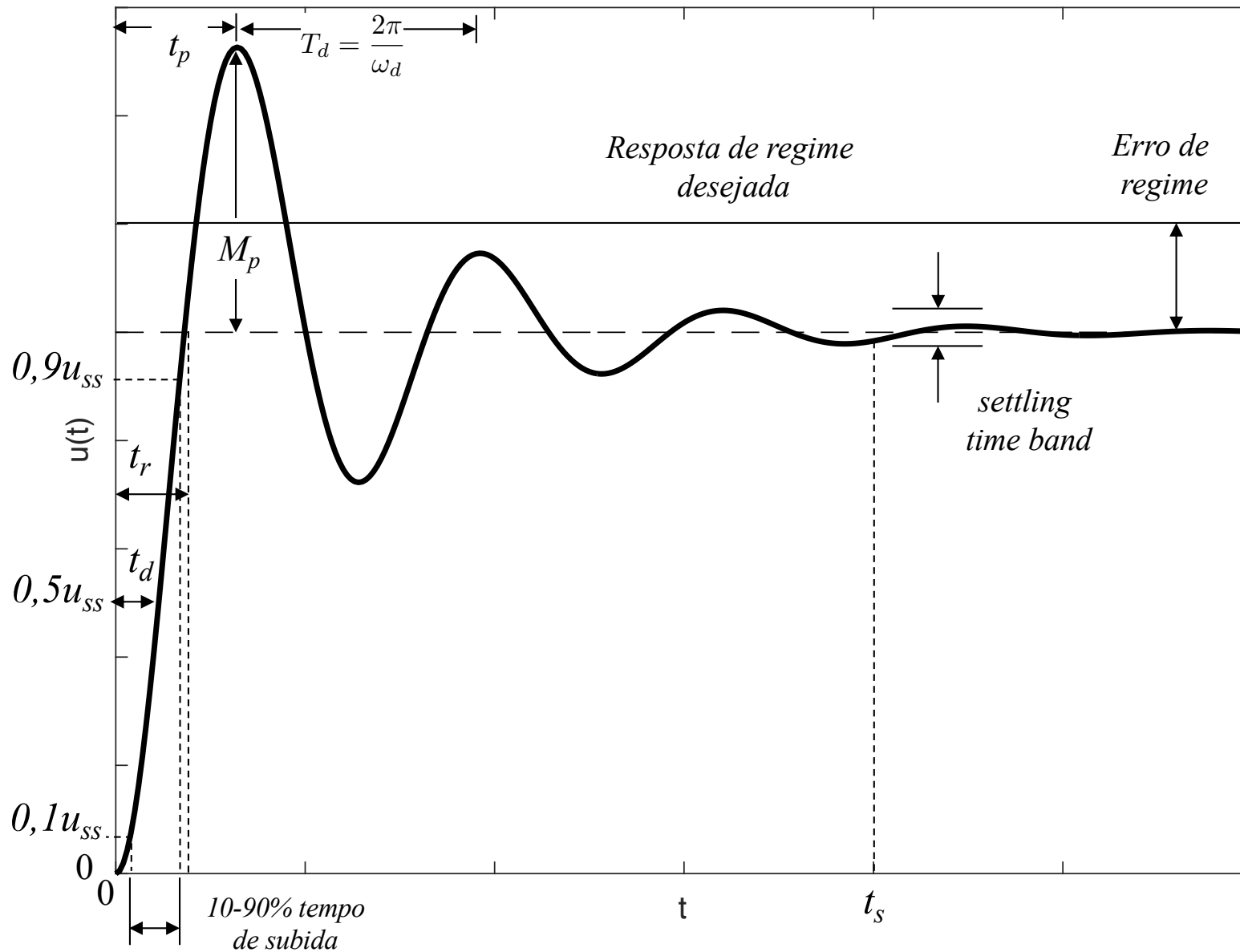
$$u_o(t) = \mathbb{K}f_{is} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sin}(\omega_d t + \phi) \right]$$

Cont. ...

Gráfico da resposta à um *degrau unitário* ($f_{is} = 1$) e *condições iniciais nulas*



Análise da Resposta ao Degrau



Análise da Resposta ao Degrau Unitário

Overshoot Máximo (M_p :) (Sobresinal Máximo)

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ u(t_p) = u_p = \mathbb{K} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \end{array} \right.$$

Tempo de subida (rise time) (t_r) :

$$t_r = \frac{2\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Settling time 2% (t_s) : (Tempo de acomodação)

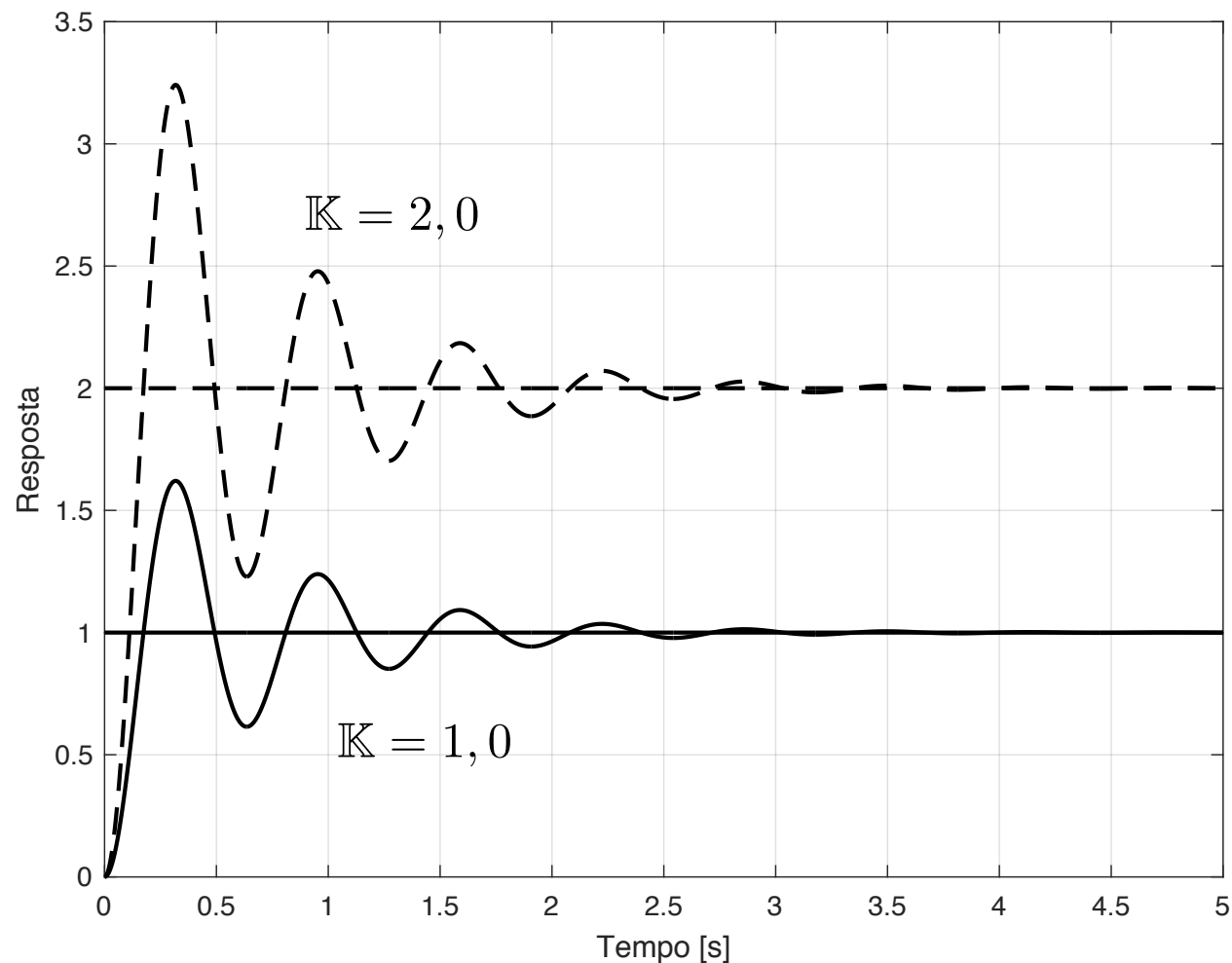
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

delay time (t_d): (Atraso)

$$t_d \cong \frac{1 + 0,7\zeta}{\omega_n}$$

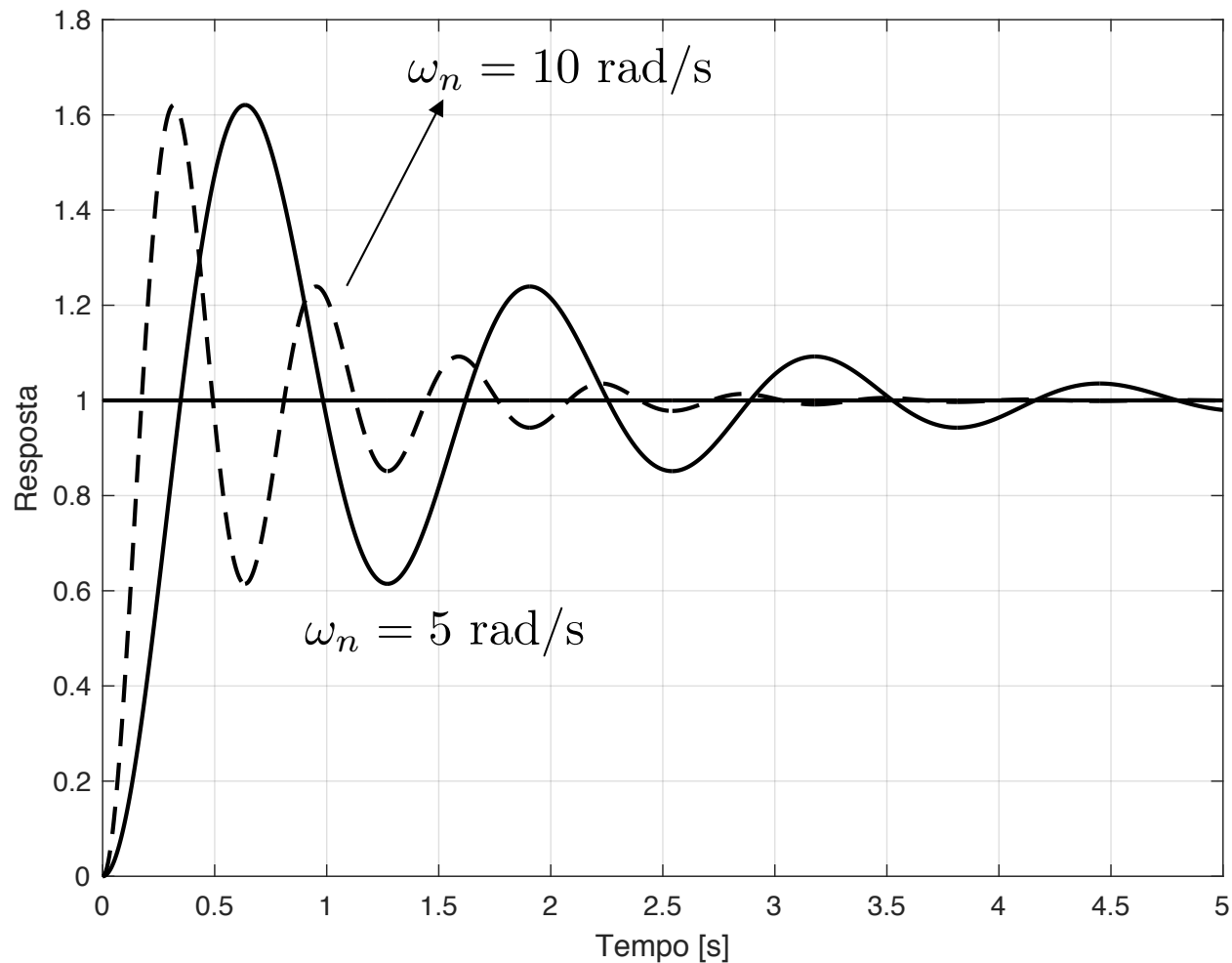
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

GANHO DE REGIME PERMANENTE



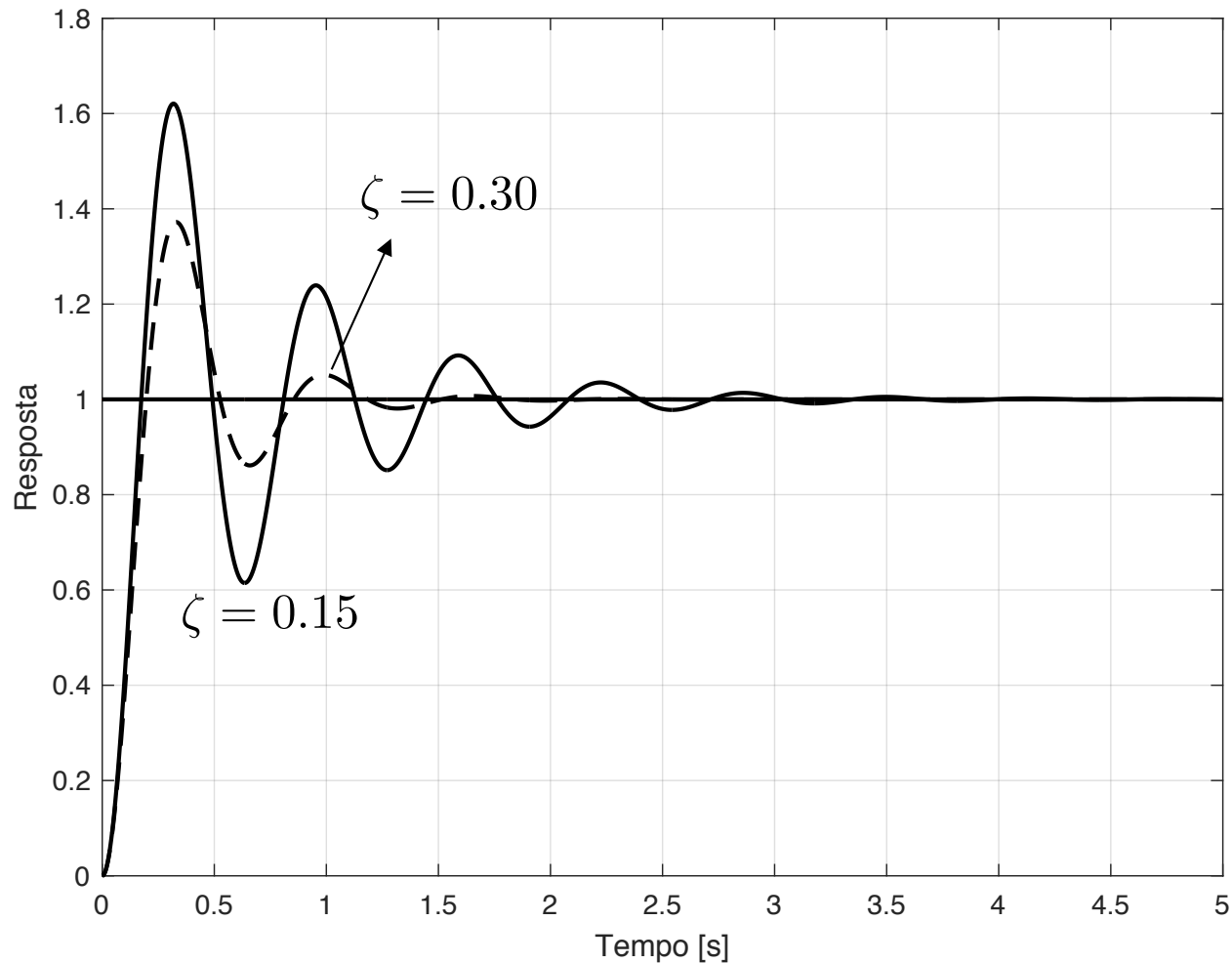
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

FREQUÊNCIA NATURAL NÃO AMORTECIDA



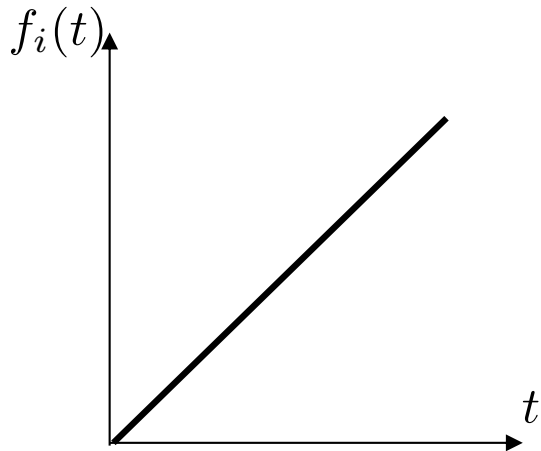
Análise dos Parâmetros na Resposta do Sistema

FATOR DE AMORTECIMENTO



Resposta à Entrada Rampa

Modelo da entrada:



Rampa Unitária: $f_{ir} = 1$

$$f_i(t) = f_{ir}t \quad F_i(s) = \frac{f_{ir}}{s^2}$$

$$M\ddot{u}_o + B\dot{u}_o + Ku_o = f_{ir}t$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n}\dot{u}_o + u_o = \mathbb{K}f_{ir}t$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1,0$

Logo, as raízes da equação característica são:

*Frequência Natural
amortecida !*

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Cont. ...

Aplicando a T.L. e resolvendo para a variável de saída temos

$$U_o(s) = \frac{\mathbb{K}f_{ir}}{s^2(s - s_1)(s - s_2)}$$

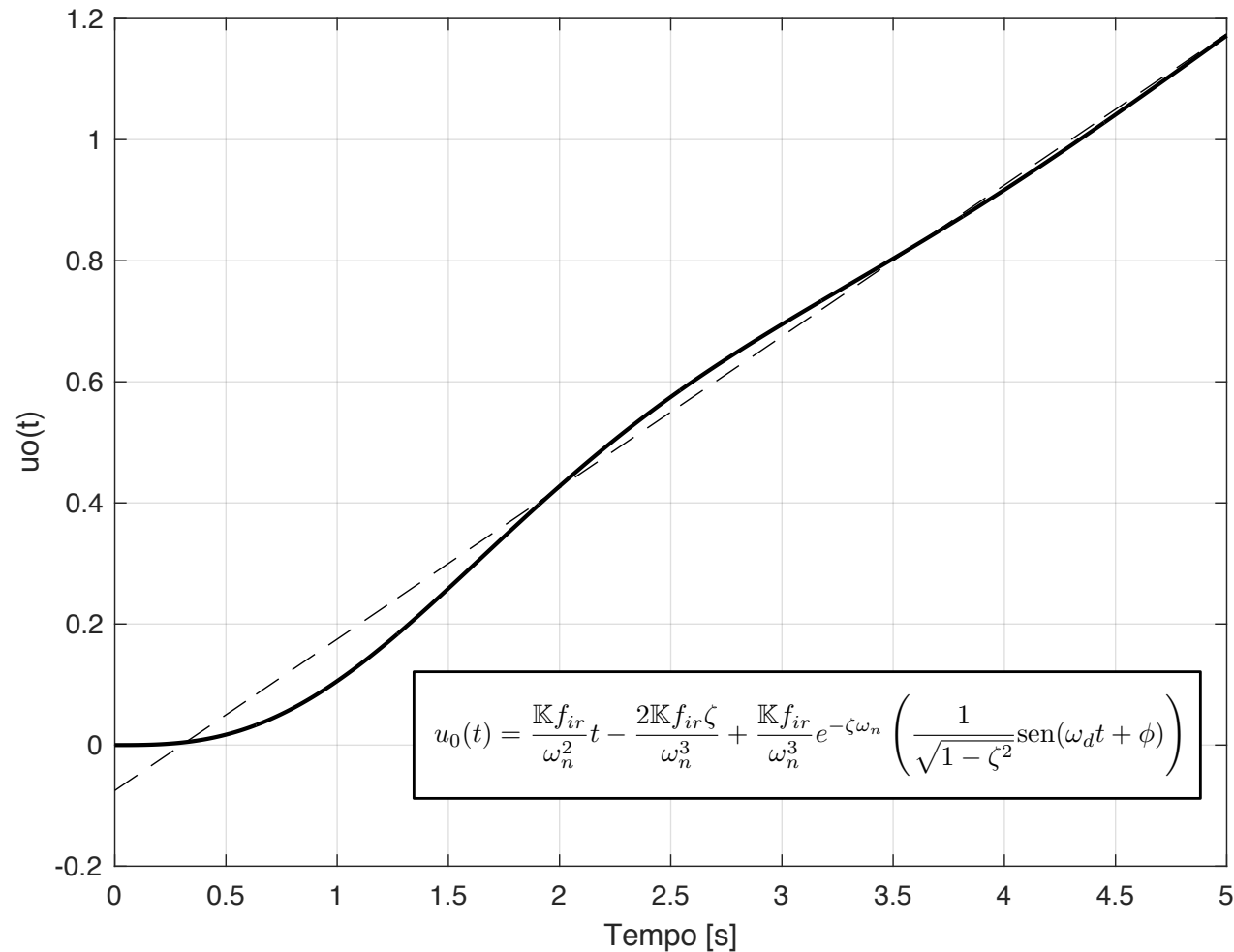
e, usando as propriedades da transformada inversa de Laplace a resposta de regime permanente à entrada rampa é escrita como

$$u_0(t) = \frac{\mathbb{K}f_{ir}}{\omega_n^2} t - \frac{2\mathbb{K}f_{ir}\zeta}{\omega_n^3} + \frac{\mathbb{K}f_{ir}}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \right)$$
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\zeta^2 - 1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \right)$$

$$u_0(t) = \frac{t}{\omega_n^2} - \frac{2\zeta}{\omega_n^3} + \frac{1}{\omega_n^3} e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \right)$$

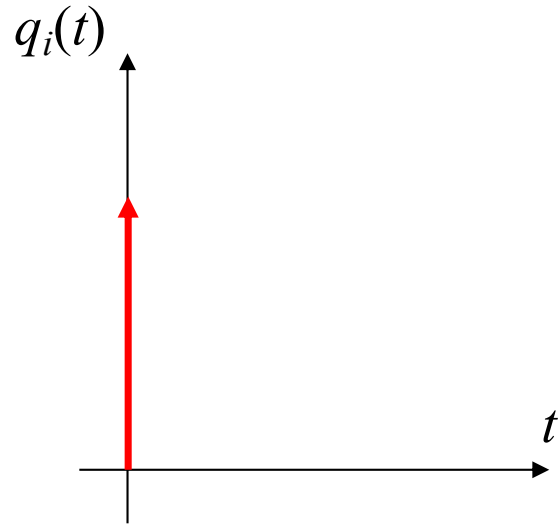
Cont. ...

Gráfico da resposta do sistema de 2ª ordem à rampa unitária



Resposta ao Impulso Unitário

Neste caso:



Impulso unitário: $A_i = 1$

$$q_i(t) = A_i \delta(t) \quad \Rightarrow \quad Q_i(s) = A_i$$

Equação de movimento:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \ddot{u}_o + \frac{2\zeta}{\omega_n} \dot{u}_o + u_o = \mathbb{K} A_i \delta(t)$$

Para a obtenção da solução faremos duas hipóteses simplificadoras

- Condições iniciais nulas ($u_o(0) = 0$ e $v_o(0) = 0$)
- O sistema é subamortecido: $\zeta < 1,0$

Logo, as raízes da equação característica são:

*Frequência Natural
amortecida !*

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Cont. ...

Solução da EDO no domínio de Laplace

$$U_o(s) = \frac{A_i \mathbb{K}}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad u_o(t) = \frac{\mathbb{K} A_i \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right)$$

Cabe aqui uma comparação com a resposta transiente ($f_i(t) = 0$) devida somente às condições iniciais

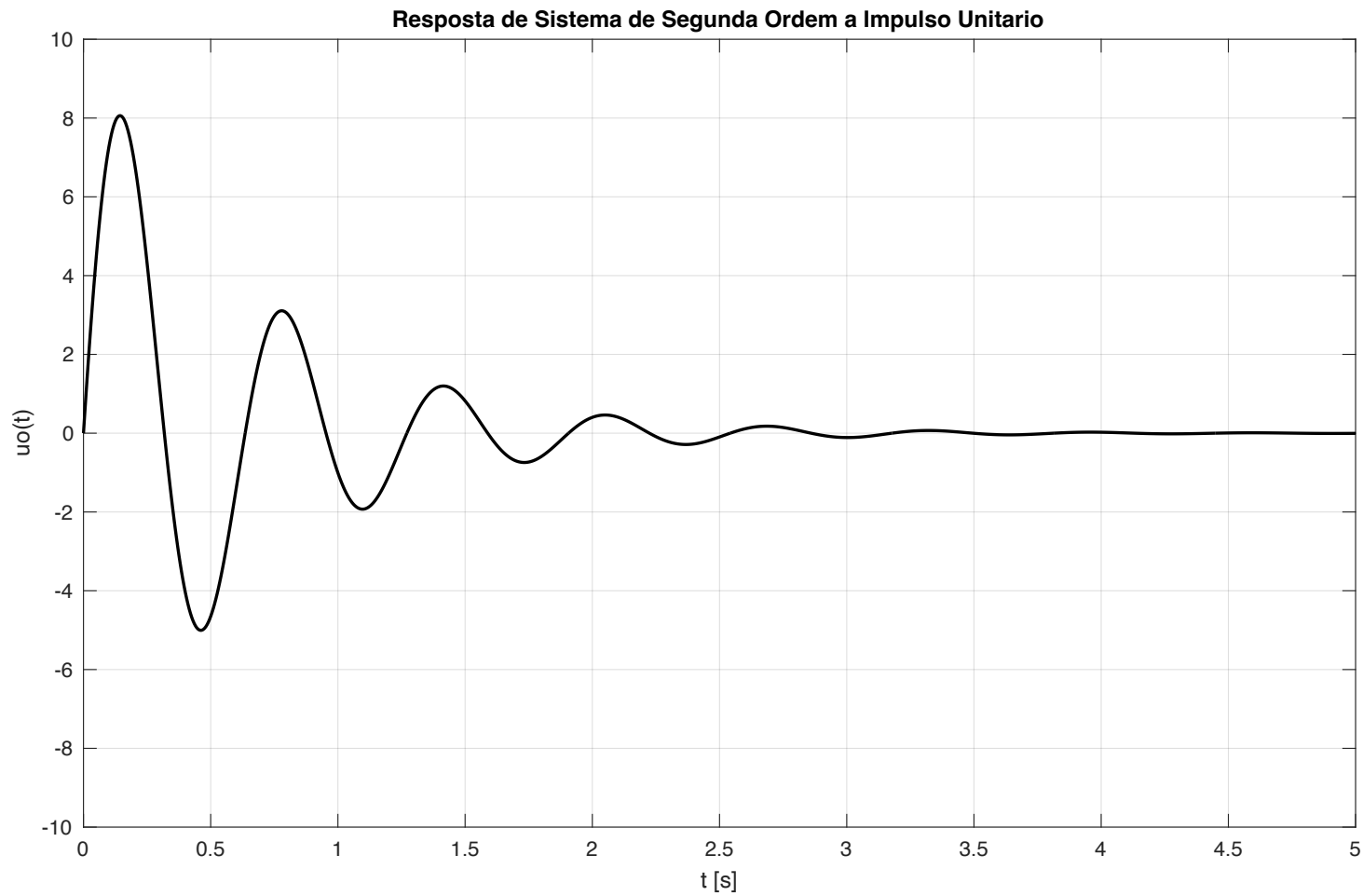
$$U_o(s) = \frac{(s + 2\zeta\omega_n)u_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Se tivermos $u_o(0) = 0$

$$U_o(s) = \frac{\dot{u}_o(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \quad u_o(t) = \frac{\dot{u}_o(0)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right)$$

Cont. ...

Gráfico da resposta ao impulso unitário, ganho unitário



FIMM

Bom Estudo !

