Trabalho 2 - SMA0169 - EDP - 22.05.2024

Prof. Sergio H. Monari Soares

Nome:____

Número USP:____________________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	3,0	
2.ª	2,0	
3.ª	5,0	
Total	10,0	

1. Considere o problema de autovalor

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad a < x < b,$$

com condições de fronteira simétricas.

Mostre que:

(a) Quaisquer duas autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais.

(b) Todos os autovalores são reais.

(c) Se adicionalmente as autofunções satisfazem a condição

$$X(x)X'(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \leq 0$$

então não há autovalor negativo.

Sugestão para o item (c). Prove antes a primeira identidade de Green: para cada par de funções $f(x)$, $g(x)$ em (a, b),

$$\int_a^b f''(x)g(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)g'(x)\,dx + f'g\Big|_a^b.$$

2. Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função que tem derivada f' continua e satisfaz as condições de fronteira periódicas ($f(-L) = f(L)$ e $f'(-L) = f'(L)$). Sejam a_n e b_n os coeficientes de Fourier de f e a'_n e b'_n os coeficientes de Fourier de f'.

(a) Mostre que

$$a'_n = \frac{n\pi b_n}{L} \quad \text{e} \quad b'_n = -\frac{n\pi a_n}{L} \quad \text{para } n \neq 0.$$

(b) Mostre que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{K}{n} \quad \text{para } n \neq 0.$$

3. Considere a difusão dentro de um tubo circular fechado de comprimento $2L$. Sejam x o parâmetro de comprimento do arco onde $-L \leq x \leq L$ e a concentração inicial dada por uma $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ função que tem derivada f' continua e satisfaz as condições de fronteira periódicas ($f(-L) = f(L)$ e $f'(-L) = f'(L)$). Então a concentração $u = u(x,t)$ da substância difusora satisfaz

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t = ku_{xx} & -L < x < L \\ u(-L,t) = u(L,t) \ \text{ e } \ u_x(-L,t) = u_x(L,t) & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) & -L \leq x \leq L \end{cases}$$

(a) Calcule os autovalores e as autofunções associados a esse problema de valores inicial e de fronteira. (*Sugestão.* use a Questão 1.)

(b) Use o método de separação de variáveis para encontrar função $u(x,t)$ candidato a solução desse problema de valores inicial e de fronteira.

(c) Mostre $u(x,t)$ é contínua em $[-L, L] \times [0, \infty)$, possui derivadas parciais u_t e u_{xx} em $(L, L) \times (0, \infty)$ e satisfaz (P). (*Sugestão.* Use Questão 2a.)

(d) Discuta a unicidade de solução de (P).

(e) Encontre a solução de (P) com condição inicial $f(x) = 1 + 3\sin(\pi x/L)$ para $-L \leq x \leq L$.