ACH2024

Aula 20

HASHING

Hashing estático – endereçamento fechado (interno)

Profa. Ariane Machado Lima

Aulas anteriores

Algoritmos e estruturas de dados para lida com memória secundária

- Organização interna de arquivos
- Acesso à memória secundária (por blocos - seeks)
- Tipos de alocação de arquivos na memória secundária:
  - Sequencial (ordenado e não ordenado)
  - Ligada
  - Indexada
  - Árvores-B
  - Hashing (veremos também hashing em memória principal)
- Algoritmos de processamento cossequencial e ordenação em disco

Aula de hoje e próximas

- Organização interna de arquivos
- Acesso à memória secundária (por blocos - seeks)
- Tipos de alocação de arquivos na memória secundária:
  - Sequencial (ordenado e não ordenado)
  - Ligada
  - Indexada
  - Árvores-B
  - Hashing (veremos também hashing em memória principal)
- Algoritmos de processamento cossequencial e ordenação em disco

Motivação e Conceitos Básicos

Formas de organizar os registros/elementos/objetos em uma estrutura (baseado em seu campo chave):

- Pelo valor relativo das chaves
  - Ex: vetor ordenado, árvore de busca, árvore B/B+, etc...
- Pelo valor absoluto:
  - Hashing: o endereço base depende apenas do valor absoluto da chave

Obs: *hash* em inglês: cortar em pequenos pedaços

OBSERVAÇÕES INICIAIS

VAMOS PENSAR A PRINCÍPIO EM MEMÓRIA PRINCIPAL

(HASHING INTERNO)

Vamos falar em armazenar chave como sinônimo de armazenar um registro/objeto/elemento

Motivação e Conceitos Básicos

Você quer armazenar 6 chaves contendo valores de 0 a 5

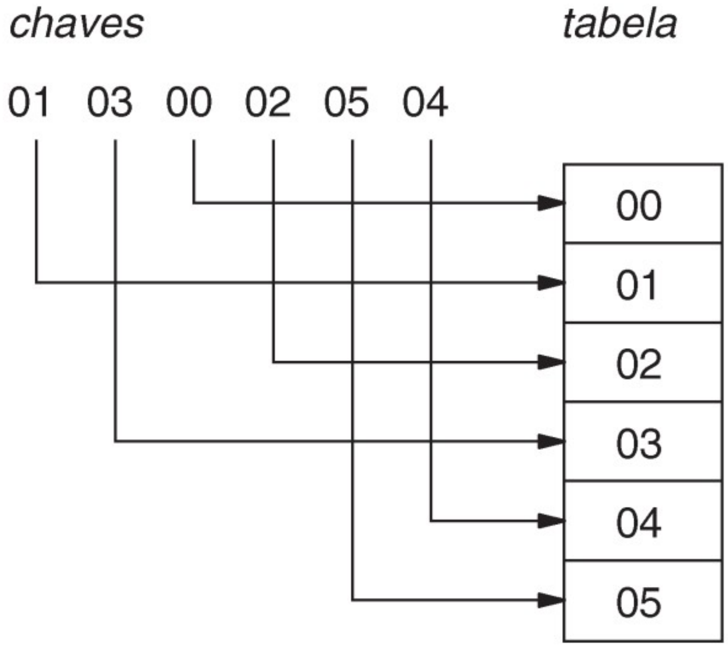
- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave?

Motivação e Conceitos Básicos

Você quer armazenar 6 chaves contendo valores de 0 a 5

– Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave? Vetor em que chave = posição

Vantagens:



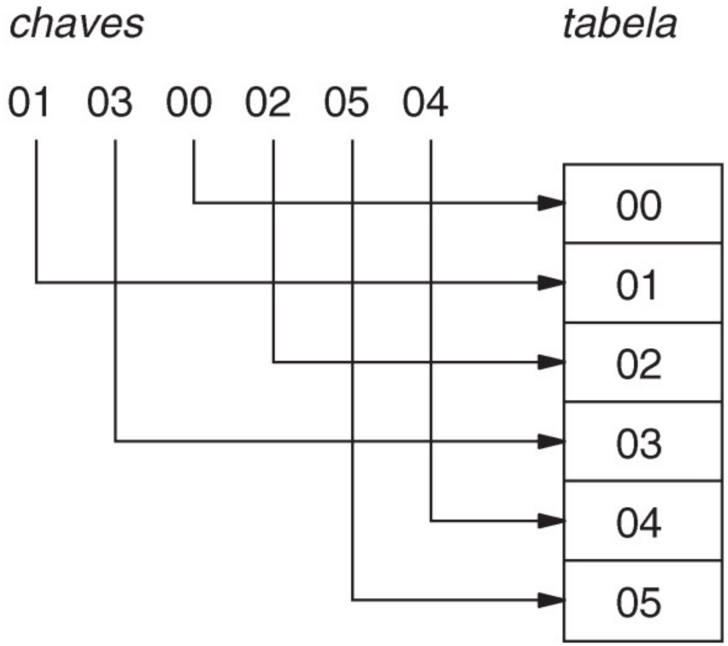
Motivação e Conceitos Básicos

Você quer armazenar 6 chaves contendo valores de 0 a 5

- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave? Vetor em que chave = posição

Vantagens:

- ACESSO DIRETO!!! → Inserção/remoção/busca em tempo constante (O(1))



Motivação e Conceitos Básicos

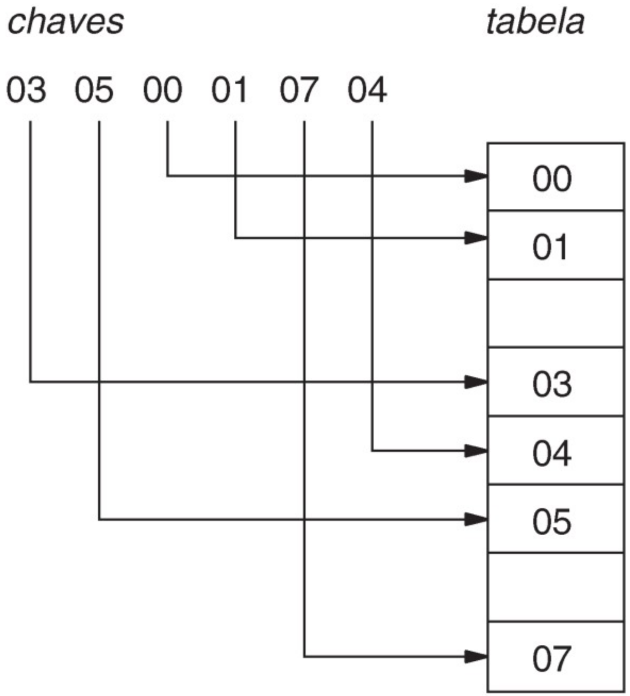
Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 1, 3, 4, 5, 7}

- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave?

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 1, 3, 4, 5, 7}

- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave? Vetor em que chave = posição



Vantagens:

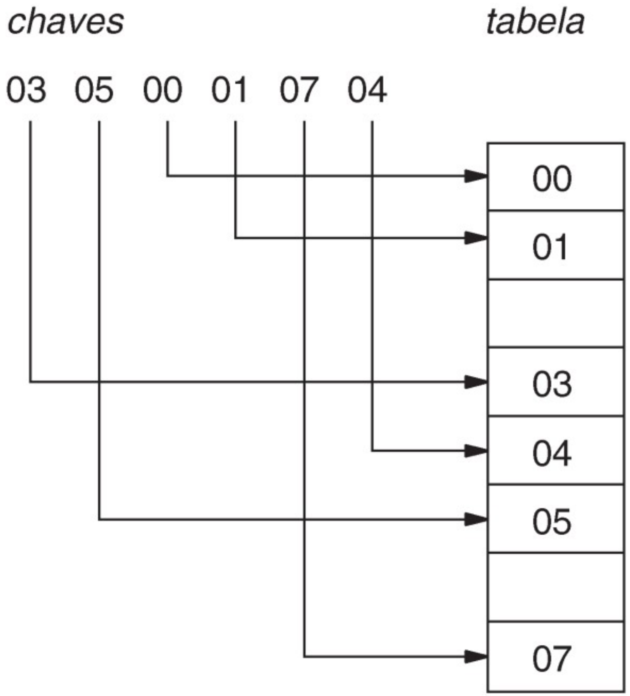
- ACESSO DIRETO!!! → Inserção/remoção/busca em tempo constante (O(1))

Desvantagem:

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 1, 3, 4, 5, 7}

– Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave? Vetor em que chave = posição



Vantagens:

– ACESSO DIRETO!!! → Inserção/remoção/busca em tempo constante (O(1))

Desvantagem:

– Pequeno desperdício de espaço (parece valer a pena)

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

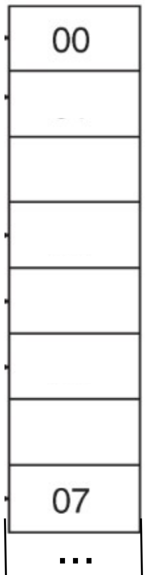
- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave?

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

– Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave?

tabela



Vantagens:

– ACESSO DIRETO!!! → Inserção/remoção/busca em tempo constante (O(1))

Desvantagem:

– Desperdício de espaço já começa a não valer a pena quando chave máxima > > número de chaves

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave?

IDEIA:

1) utilizar um vetor (tabela) de tamanho m

2) aplicar uma função que mapeie cada chave a um número de 0 a m-1 (Ex?)

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

- Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave

IDEIA:

1) utilizar um vetor (tabela) de tamanho m

2) aplicar uma função que mapeie cada chave a um número de 0 a m-1

Ex: m = 10 e pegar o primeiro dígito (ou letra)

Hashing: picar/dividir o conjunto em **slots**

Tabela de armazenamento: **tabela de hash**

Função de mapeamento: **função de hash**

Endereço calculado: **endereço-base**

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

– Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave

IDEIA:

1) utilizar um vetor (tabela) de tamanho m

2) aplicar uma função que mapeie cada chave a um número de 0 a m-1

Ex: m = 10 e pegar o primeiro dígito (ou letra)

Hashing: picar/dividir o conjunto em **slots**

Tabela de armazenamento: **tabela de dispersão**

Função de mapeamento: **função de dispersão**

Endereço calculado: **endereço-base**

Motivação e Conceitos Básicos

Agora você quer armazenar 6 chaves contendo valores {0, 7, 15, 367, 4067, 50876}

– Que estrutura de dados usaria? Onde armazenaria cada chave

IDEIA:

1) utilizar um vetor (tabela) de tamanho m

2) aplicar uma função que mapeie cada chave a um número de 0 a m-1

Ex: m = 10 e pegar o primeiro dígito (ou letra)

Hashing: picar/dividir o conjunto em **slots**

Tabela de armazenamento: **tabela de espalhamento**

Função de mapeamento: **função de espalhamento**

Endereço calculado: **endereço-base**

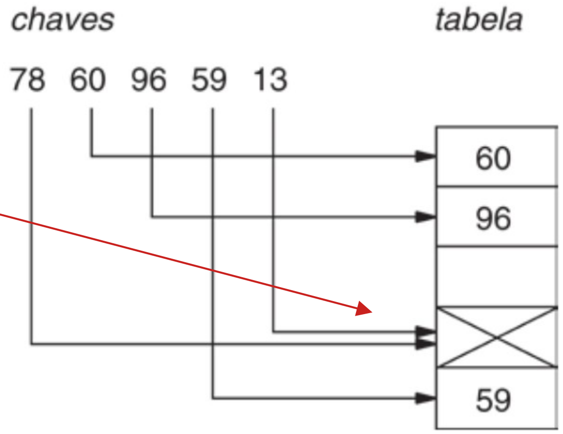
Motivação e Conceitos Básicos

Questões que podem surgir?

Motivação e Conceitos Básicos

Questões que podem surgir:

- O que fazer quando duas chaves caem na mesma posição? (colisão)
  - Tratamento de colisões
- Qual função de hash utilizar? Como ela impacta na ocorrência de colisões?



Vamos estudar essas questões

Funções de hash

Definição: considerando:

uma tabela de tamanho m (m slots)

Um domínio C de valores de chaves (strings, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, ...)

um função de hash é uma função $h: C \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Ou seja, se $x \in C$ é uma chave, h(x) retorna o endereço-base de x (ou seja, seu índice na tabela de hash)

Ex: h(x) = x (primeiro exemplo)

h(x) = dígito mais significativo (segundo exemplo)

Funções de hash

Propriedades desejáveis:

Funções de hash

Propriedades desejáveis:

1) Poucas colisões

2) Ser rapidamente calculada (O(1), senão estraga vantagem do hashing)

3) Distribuição uniforme:

- idealmente se há m slots, $P(h(x)) = 1/m \ \forall x$

  (a probabilidade de qualquer endereço-base deve ser 1/m)

- importante para minimizar colisões (de pior caso)

- difícil de ser testada, mas bom senso pode ajudar. Ex: dígito mais significativo seria uma boa?

Funções de hash

Propriedades desejáveis:

1) Poucas colisões

2) Ser rapidamente calculada (O(1), senão estraga vantagem do hashing)

3) Distribuição uniforme:

- idealmente se há m slots, $P(h(x)) = 1/m \ \forall x$

  (a probabilidade de qualquer endereço-base deve ser 1/m)

- importante para minimizar colisões (de pior caso)

- difícil de ser testada, mas bom senso pode ajudar. Ex: dígito mais significativo seria uma boa? – péssima idea na maioria dos casos

Funções de hash

Principais métodos de funções de hash:

1) Método da divisão

2) Método da dobra

   - baseado em soma

   - baseado em ou-exclusivo

3) Método da multiplicação

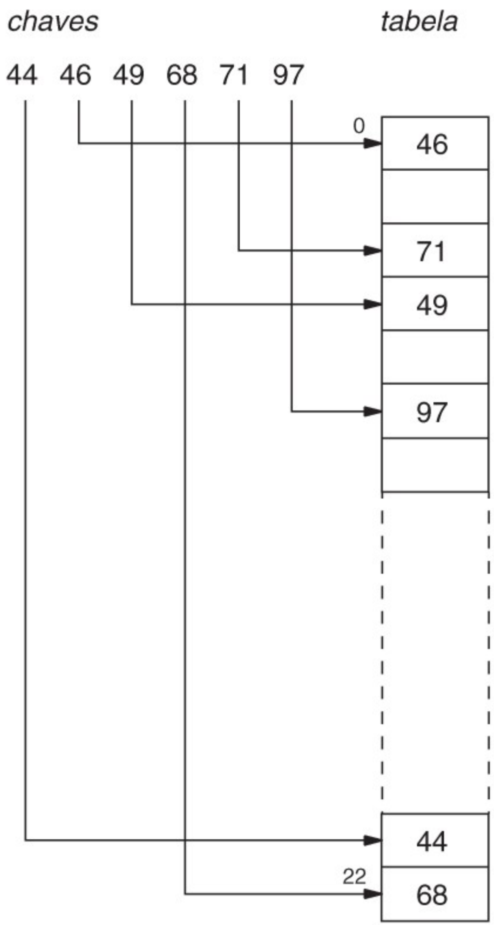
4) Método da análise de dígitos

Funções de hash
Método da divisão

Considerando uma tabela de m slots:

$h(x) = x \bmod m$ (mod: resto da divisão inteira)

Ex: $h(x) = x \bmod 23$



Alguns valores de m são melhores que outros…

Ex de m ruins:

- potência de 2 ou de 10: depende apenas de alguns bits/dígitos (no caso os menos significativos → muito ruim em casos em que chaves podem ser concatenações de outras)
- par: h(x) par <=> x par (ruim se par/ímpar for desbalanceado)

Funções de hash
Método da divisão

Considerando uma tabela de m slots:

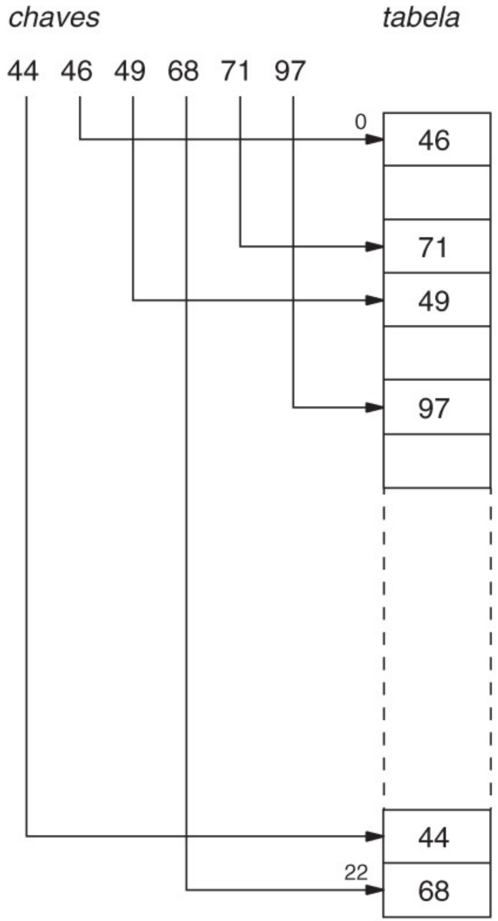
h(x) = x mod m   (mod: resto da divisão inteira)

Ex: h(x) = x mod 23

Alguns valores de m são melhores que outros…

Ex de m **bons**:

- Números primos (de preferência não próximo de potência de 2)



Funções de hash
Método da dobra

Método da dobra: sucessivas dobras de trechos do número e efetuar uma operação. Ex:

- Soma: manipulando a chave como um número decimal
- Ou-exclusivo: manipulando a chave como um número binário

Funções de hash
Método da dobra baseado em soma

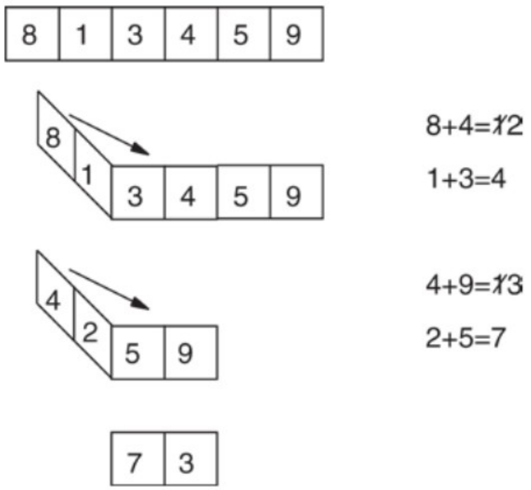
Método da dobra baseado em soma: (obtém h(x) com j dígitos)

x = número descrito com k dígitos decimais : $d_1, d_2, \ldots, d_k$ (ex: k = 6)

Dobras de tamanho j (ex: j = 2) =>

$d_1, \ldots, d_k \rightarrow d'_j, \ldots, d'_1, d_{2j+1}, \ldots, d_k$

Sendo cada d'_i o dígito menos significativo da soma $d_i + d_{2j-i+1}$



Funções de hash
Método da dobra baseado em ou-exclusivo

Método da dobra baseado em ou-exclusivo: (obtém h(x) com J BITS)

x = número binário descrito com K BITS : $d_1, d_2, \ldots, d_K$ (ex: K = 10)

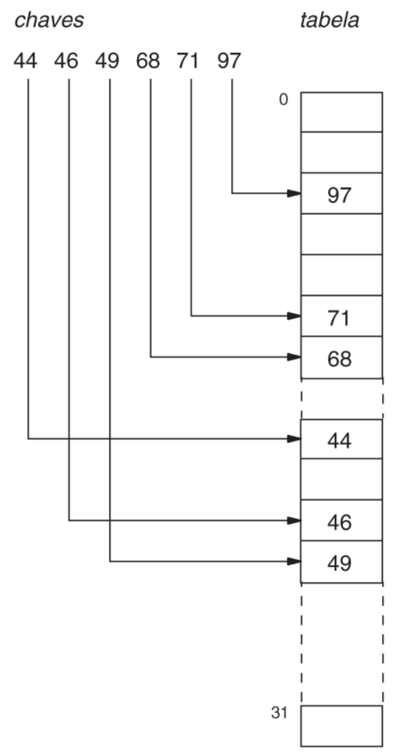
Dobras de tamanho J (ex: J = 5) =>

$d_1, \ldots, d_K \rightarrow d'_1, \ldots, d'_J, d_{2J+1}, \ldots, d_K$

Sendo cada d'_i o bit resultante do ou-exclusivo entre d_i e d_{i+J}

Ex: x = 71 = 00010 00111 → h(x) = 00010 **ouex** 00111 = 00101 = 5

x = 46 = 00001 01110 → h(x) = 00001 **ouex** 01110 = 01111 = 15



Funções de hash
Método da Multiplicação

Muitas variações, a mais conhecida:

Método do "meio do quadrado": (obtém h(x) com b bits – Ex: b = 8)

x = número binário descrito com K BITS : $d_1, d_2, \ldots, d_K$ (ex: K = 32)

=> pegar o b bits centrais do número binário x^2

Ex: x = 157 = 0000 0000 0000 0000 0000 0000 1001 0101

x^2 = 24649 = 0000 0000 0000 0000 0110 0000 0100 1001

h(x) = 0000 0110 = 6

Funções de hash
Método da Análise de Dígitos

Diferentemente dos demais, precisa analisar ANTES o conjunto de **n chaves** a serem armazenadas

Ideia básica: utilizar as d posições de dígitos (decimais) que mais se aproximam da distribuição uniforme (isto é, com menor desvio):

- $n(j)_i$ = número de chaves contendo o dígito i na posição j

- Se a posição j apresenta-se perfeitamente uniforme, cada valor i apareceria n/10 vezes nessa posição (potencialmente com algum desvio)

Procedimento: para números de até k dígitos (posições), calcule o desvio (da dist. uniforme) para a posição j = 1 .. k

$\text{desvio}(j) = \sum_{i=0..9} | n(j)_i - n/10|$ ou $\sum_{i=0..9} (n(j)_i - n/10)^2$

E escolha os d dígitos com menor desvio

Ex: chaves = {44, 46, 49, 68, 71, 97}, k = 2, d =1

desvio(1) =7.2 ; desvio(2) = 4.1 => h(x) deve pegar o dígito 2

h(44) = 4; h(46) = 6; h(49) = 9; ...

Tratamento de colisões

Tratamento de colisões

Colisão: quando $x \neq y$ mas $h(x) = h(y)$

Fator de carga: $\alpha = n/m$ (m = nr de slots da tabela de hash, n = nr de chaves a serem inseridas)

Qual a relação de α com o nr de colisões ?

Tratamento de colisões

Colisão: quando $x \neq y$ mas $h(x) = h(y)$

Fator de carga: $\alpha = n/m$ (m = nr de slots da tabela de hash, n = nr de chaves a serem inseridas)

Maior $\alpha \rightarrow$ maior o nr de colisões

Mas $\alpha < 1$ não garante ausência de colisões… $\rightarrow$ tem que tratar

Tratamento de colisões

Estratégias:

A) Hashing estático (tamanho da tabela é constante)

1) Encadeamento ou endereçamento fechado – colisões vão para uma lista ligada

1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela)

1.2) Encadeamento interior (dentro da tabela)

2) Endereçamento aberto (chaves dentro da tabela, sem ponteiros)

2.1) Tentativa/Sondagem linear

2.2) Tentativa/Sondagem quadrática

2.3) Dispersão dupla / Hash duplo

B) Hashing dinâmico (tabela pode expandir/encolher)

3) Hashing extensível (estrutura de dados adicional)

4) Hashing linear

Tratamento de colisões

Estratégias:

A) Hashing estático (tamanho da tabela é constante)

1) Encadeamento ou endereçamento fechado – colisões vão para uma lista ligada

1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela)

1.2) Encadeamento interior (dentro da tabela)

2) Endereçamento aberto (chaves dentro da tabela, sem ponteiros)

2.1) Tentativa/Sondagem linear

2.2) Tentativa/Sondagem quadrática

2.3) Dispersão dupla / Hash duplo

B) Hashing dinâmico (tabela pode expandir/encolher)

3) Hashing extensível (estrutura de dados adicional)

4) Hashing linear

Tudo isso para hashing interno (em memória) quanto para externo (em disco).
Primeiro assumiremos hashing interno e depois discutiremos mudanças para hashing externo.

A) Hashing estático (tamanho constante da tabela)

A) Hashing estático
(tamanho constante da tabela)

1) Encadeamento ou endereçamento fechado (colisões vão para uma lista ligada, ie, h(x) não muda)

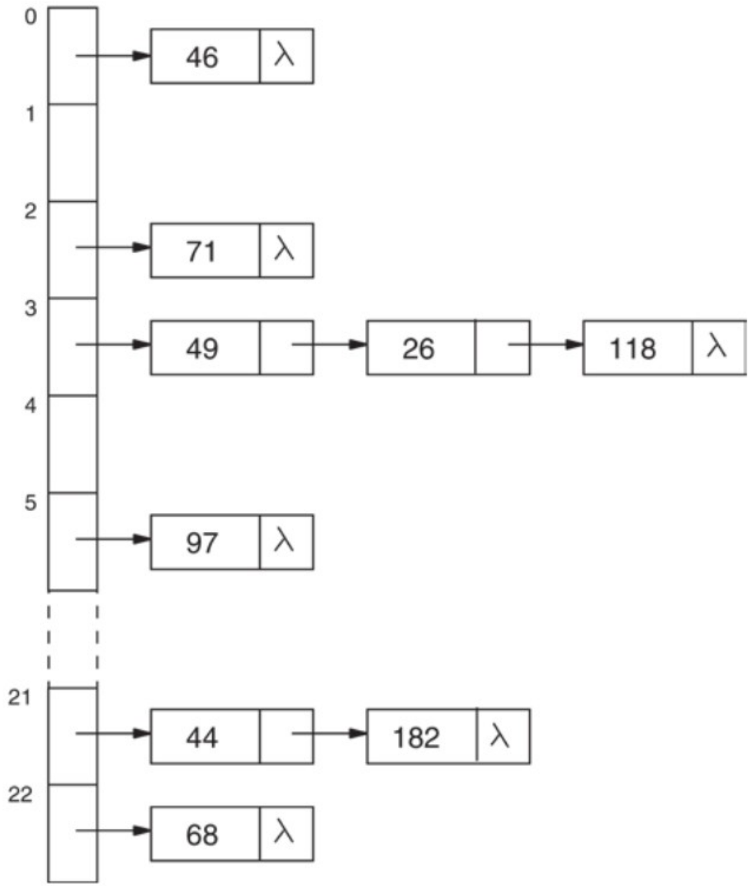
Tratamento de colisões - 1) Endereçamento fechado
1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela de hash)

A tabela de hash é um vetor de m listas ligadas (não necessariamente ordenadas), uma para cada endereço base

- chaves ficam fora do espaço da tabela
- T[i] guarda o ponteiro para o início da lista de chaves com endereço-base = i

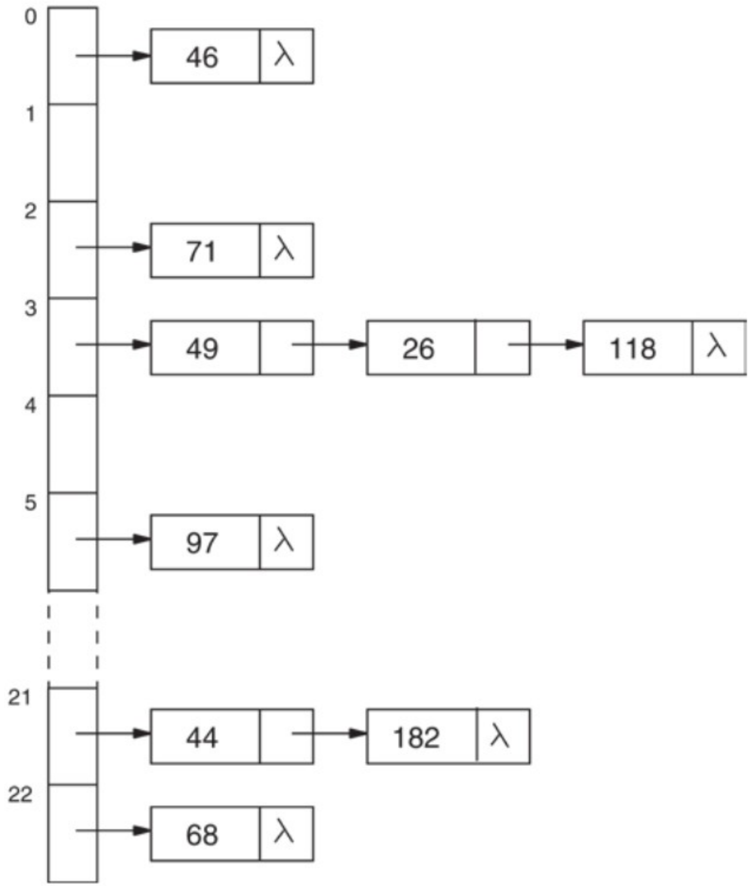
Busca/inserção/remoção: em listas ligadas

Se tiver que impedir duplicação de chaves, pode inserir no final



Tratamento de colisões - 1) Endereçamento fechado
1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela de hash)

Complexidade de busca/inserção/remoção:



Tratamento de colisões - 1) Endereçamento fechado
1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela de hash)

Complexidade de busca/inserção/remoção:

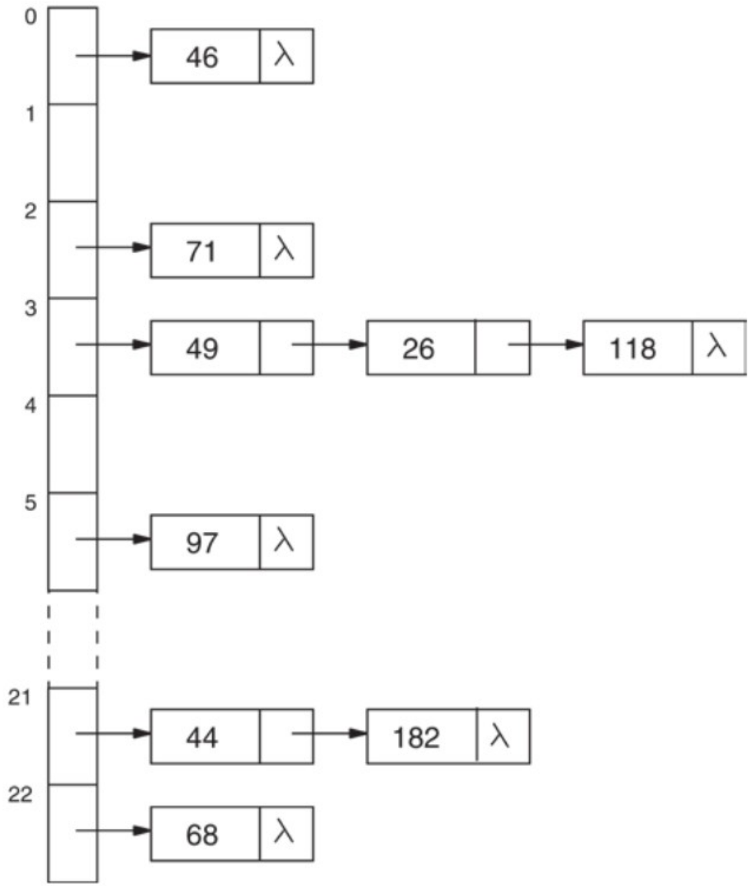
- pior caso: O(n)

- caso médio (assumindo hash uniforme):

  - sem sucesso (chave não existe): tamanho médio da lista = α

    = média ponderada (pela prob. de i) do nr de elementos em cada lista L_i

    $= 1/m \sum_{i=1..m} |L_i| = n/m = \alpha$



Tratamento de colisões - 1) Endereçamento fechado
1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela de hash)

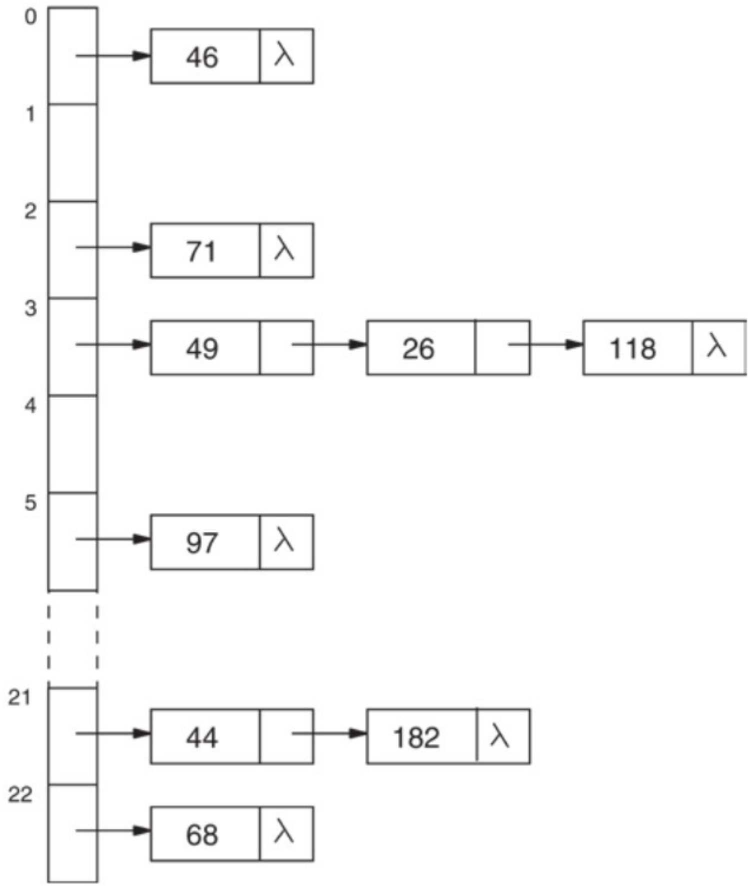
Complexidade de busca/inserção/remoção:

- pior caso: O(n)
- caso médio (assumindo hash uniforme):
  - sem sucesso: α
  - com sucesso: $1 + \alpha/2 - 1/2m$

= nr médio de comparações assumindo que x é (j+1)-ésima chave a ser inserida, no final, sem remoções (posição fixa), $|L_i|_{médio} = j/m$

$= 1/n \sum_{j=0..n-1} (1+ j/m) = 1+ n(n-1)/2nm$

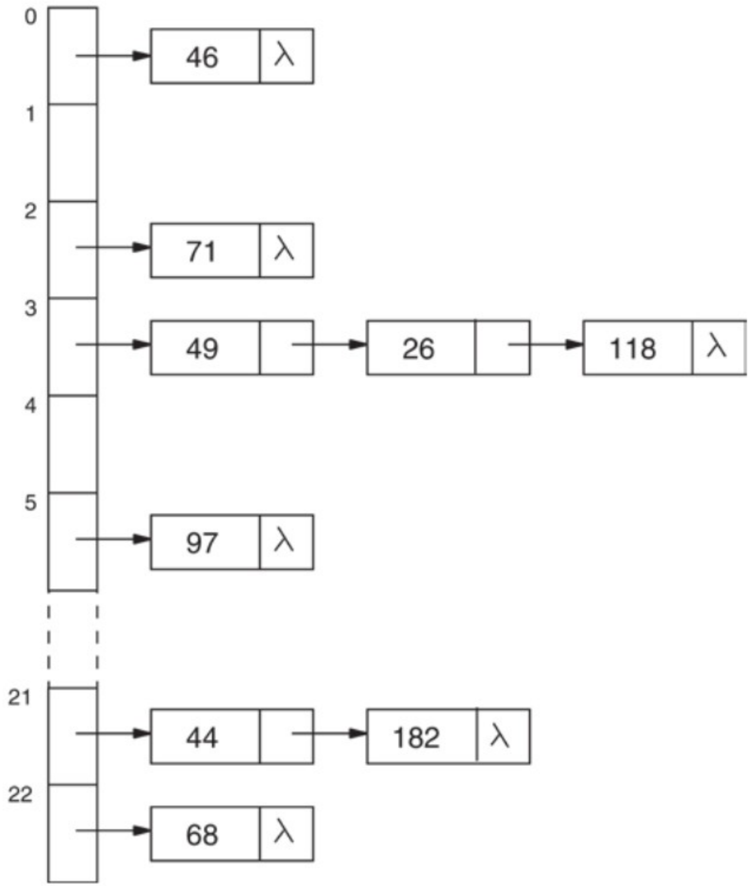
$= 1+ (n^2-n)/2nm = 1 + \alpha/2 - 1/2m$



Tratamento de colisões - 1) Endereçamento fechado
1.1) Encadeamento exterior (fora da tabela de hash)

Complexidade de busca/inserção/remoção:

- pior caso: O(n)
- caso médio (assumindo hash uniforme):
  - sem sucesso: α
  - com sucesso: $1 + \alpha/2 - 1/2m$



Isto é, mais rápido conforme:

- α menor e m maior - linearmente

Referências

Conceitos gerais de Hashing:

SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e Seus Algoritmos. Ed. LTC, 3ª ed, 2013. Capítulo 10 (figuras do livro)

Slides dos Profs. M. Chaim, Delano Beder e L. Digiampietri