SME0121 Processos Estocásticos: Lista 4 – Introdução a processos de Poisson

Thomas Peron

Data de publicação: 12/05/2024. Data da provinha: $\boxed{23/05/2024}$.

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes, com distribuições de Poisson de parâmetros α e β. Mostre que a variável $X + Y$ tem uma distribuição de Poisson de parâmetro $\alpha + \beta$.

2. Defeitos ocorrem ao longo de um cabo de fibra óptica de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 0.1$ defeitos por Km.

    (a) Qual é a probabilidade de que não ocorra nenhum defeito nos primeiros 2 Km?

    (b) Sabendo que não ocorreu nenhum defeito nos primeiros 2 Km, calcule a probabilidade de que nenhum defeito ocorra entre o segundo e terceiro Km.

3. Clientes chegam a uma certa loja de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 4$ clientes por hora. Sabendo que a loja abre às 9:00h, qual é a probabilidade de que exatamente um cliente chegue até às 9:30h e um total de cinco chegue até às 11:30h?

4. Mostre que o número de eventos que ocorrem num intervalo de tempo $(0, t]$ para um processo de Poisson é consequência da *lei dos eventos raros*. Em outras palavras, mostre que a distribuição binomial com parâmetros n e p converge para a distribuição de Poisson com parâmetro λ conforme $n \to \infty$ e $p \to 0$, de forma que np permaneça constante.

5. Considere um processo de Poisson de taxa λ eventos por unidade de tempo. Seja $N(t)$ o número de eventos que ocorrem até no intervalo $(0, t]$. Considere o intervalo de tempo fixo $(s, t]$, onde $s < t$. Determine a probabilidade condicional $P\{N(t) = n + k | N(s) = n\}$ e o valor esperado $\mathbb{E}[N(t)N(s)]$.

6. Suponha que pacotes SMTP chegam a um servidor de e-mails de acordo com um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 2$. Seja $N(t)$ o número de mensagens que chegam até o tempo t. Determine as seguintes probabilidades:

    (a) $P\{N(1) = 2\}$ (Resp.: $\simeq 0.27$).

    (b) $P\{N(1) = 2 \text{ e } N(3) = 6\}$ (Resp.: $\simeq 0.05288$).

    (c) $P\{N(1) = 2 | N(3) = 6\}$ (Resp.: $\binom{6}{2}\frac{4^5}{6^6}$).

    (d) $P\{N(3) = 6 | N(1) = 2\}$ (Resp.: $\simeq 0.1953$)

7. Uma certa teoria científica sugere que erros na divisão celular ocorrem de acordo com um processo de Poisson com taxa 2.5 erros por dia. Uma célula morre quando 196 erros ocorrem. Assumindo que essa teoria está correta, encontre:

    (a) O tempo médio de vida de uma célula (Resp.: 78.4 dias).

    (b) A variância do tempo de vida (Resp.: 31.36 dias^2).

8. Considere um processo de Poisson com parâmetro λ. Dado que $N(t) = n$ eventos ocorrem no tempo t, encontre a função densidade para S_r, isto é, o tempo de ocorrência do r−ésimo evento. Assuma que $r \leq n$.

9. Para um processo de Poisson $N(t)$ de intensidade λ e dois tempos fixos t_1 e t_2, $t_1 < t_2$, encontre a função probabilidade conjunta para duas variáveis aleatórias $N(t_1)$ e $N(t_2)$.

10. Partículas radioativas são emitidas de uma fonte de acordo com um processo de Poisson de intensidade $\lambda = 1$ partícula por minuto.

    (a) Suponha que cinco partículas são emitidas no primeiro minuto. Qual é a probabilidade que exatamente duas dessas partículas foram emitidas nos primeiros 30 segundos? (Resp.: 0.312).

    (b) Seja S_n o tempo de emissão da $n-$ésima partícula. Expresse S_n em termos do tempo de permanência no estando n, isto é T_n, e então encontre $\mathbb{E}[S_n]$. (Resp.: $\mathbb{E}[S_n] = n$)

    (c) Suponha que cada partícula sobreviva durante 10 segundos. Qual é a probabilidade de k partículas existirem em um minuto? (Resp.: $\approx 0.84648/(6^k k!)$)

11. Seja $\{N(t), t \neq 0\}$ um processo de Poisson de taxa λ. Para $s < t$ encontre:

    (a) $P(N(t) > N(s))$. (Resp: $1 - e^{-\lambda(t-s)}$)

    (b) $P(N(s) = 0, N(t) = 3)$. (Resp.: $e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^3/3!$)

    (c) $E[N(t)|N(s) = 4]$. (Resp.: $4 + \lambda(t-s)$)

    (d) $E[N(s)|N(t) = 4]$. (Resp.: $4s/t$)

12. Um médico tem duas consultas a fazer, umas às 13h e outra às 13:30h. O tempo gasto em cada consulta tem distribuição exponencial com média de 30 minutos. Assumindo que ambos os pacientes chegaram no horário marcado, encontre o tempo médio gasto pelo paciente marcado às 13:30h no consultório. (Resp.: ≈ 41.03638)

13. Imagine que pessoas entram numa sala de aula seguindo um processo de Poisson com taxa $\lambda = 1$ pessoa por minuto.

    (a) Qual é o tempo esperado até que a décima pessoa entre?

    (b) Qual é a probabilidade de que o tempo entre a entrada da décima e décima primeira pessoa seja maior do que dois minutos? (Resp.: ≈ 0.133)

14. Passageiros chegam a um terminal rodoviário de acordo com um processo de Poisson de taxa $\lambda = 8$ passageiros por hora. O número de horas entre a chegada de ônibus sucessivos nesse terminal é distribuído uniformemente entre 0 e 1. Imagine que um ônibus tenha acabado de partir. Seja X o número de pessoas que entrarão no próximo ônibus. Calcule $\mathbb{E}[X]$. (Resp.: 4).

15. Os tempos de vida de um cachorro (T_c) e de um gato (T_g) são variáveis aleatórias independentes, distribuídas de acordo com distribuições exponenciais de parâmetros λ_c e λ_g, respectivamente. Suponha que um dos *pets* tenha acabado de morrer. Calcule o valor esperado do tempo de vida adicional do outro *pet*. *Dica:* Veja na seção 5.2.3 do livro do Sheldon Ross como calcular a probabilidade $\Pr\{X_1 < X_2\}$