Escola Politécnica
Departamento de Engenharia Hidráulica e Ambiental

Universidade de São Paulo

PHA3307 – Hidrologia Aplicada

Estatística de Extremos
Vazões máximas, Frequência, Período de retorno, Risco

Aula 13

Prof. Dr. Arisvaldo Méllo
Prof. Dr. Joaquin Bonnecarrere

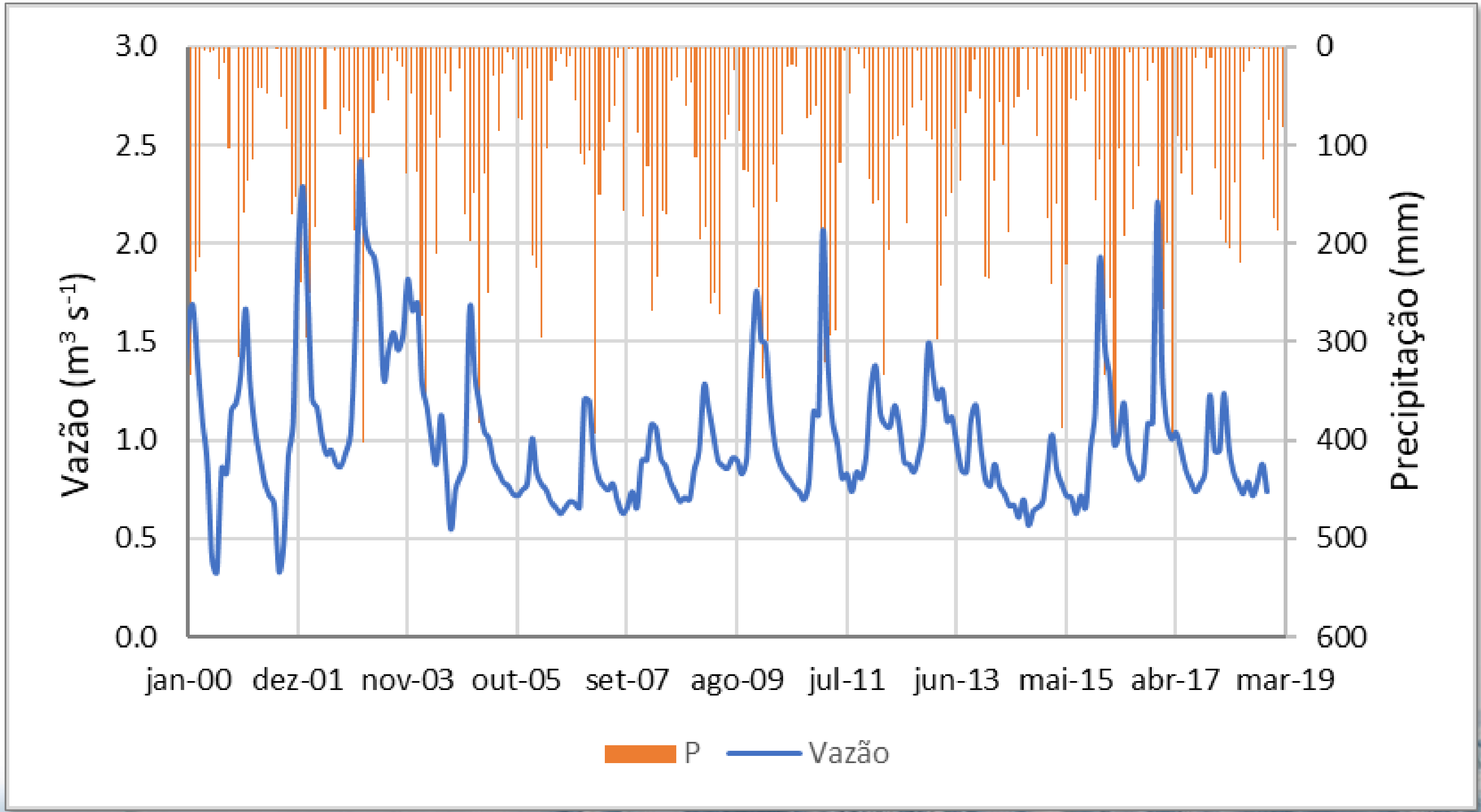
LabSid
Laboratório de Sistemas de Suporte a Decisões
Recursos Hídricos e Meio Ambiente

Objetivos da Aula

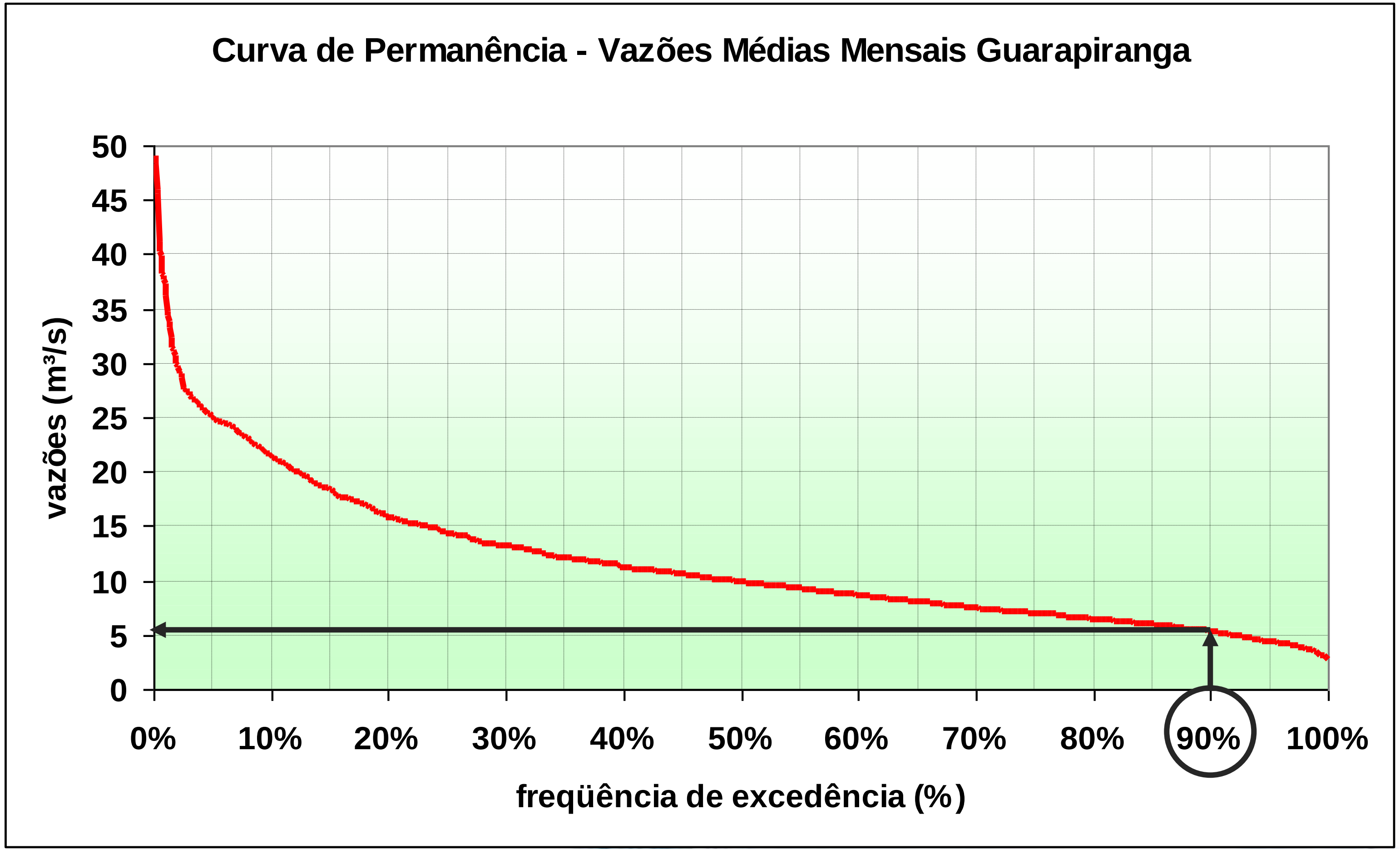
1. Conceitos de período de retorno e risco
2. Conhecer aplicações em eventos extremos de cheias e estiagens.
3. Estatística descritiva: parâmetros da amostra e período de retorno amostral
4. Conceitos de histograma, função de distribuição de probabilidades.
5. Distribuição normal

Variabilidade hidrológica

Posto FLU 4D-023 e PLU D4-035 Analândia – Rio Corumbataí – jan/2000 a dez/2018 – 59 km²

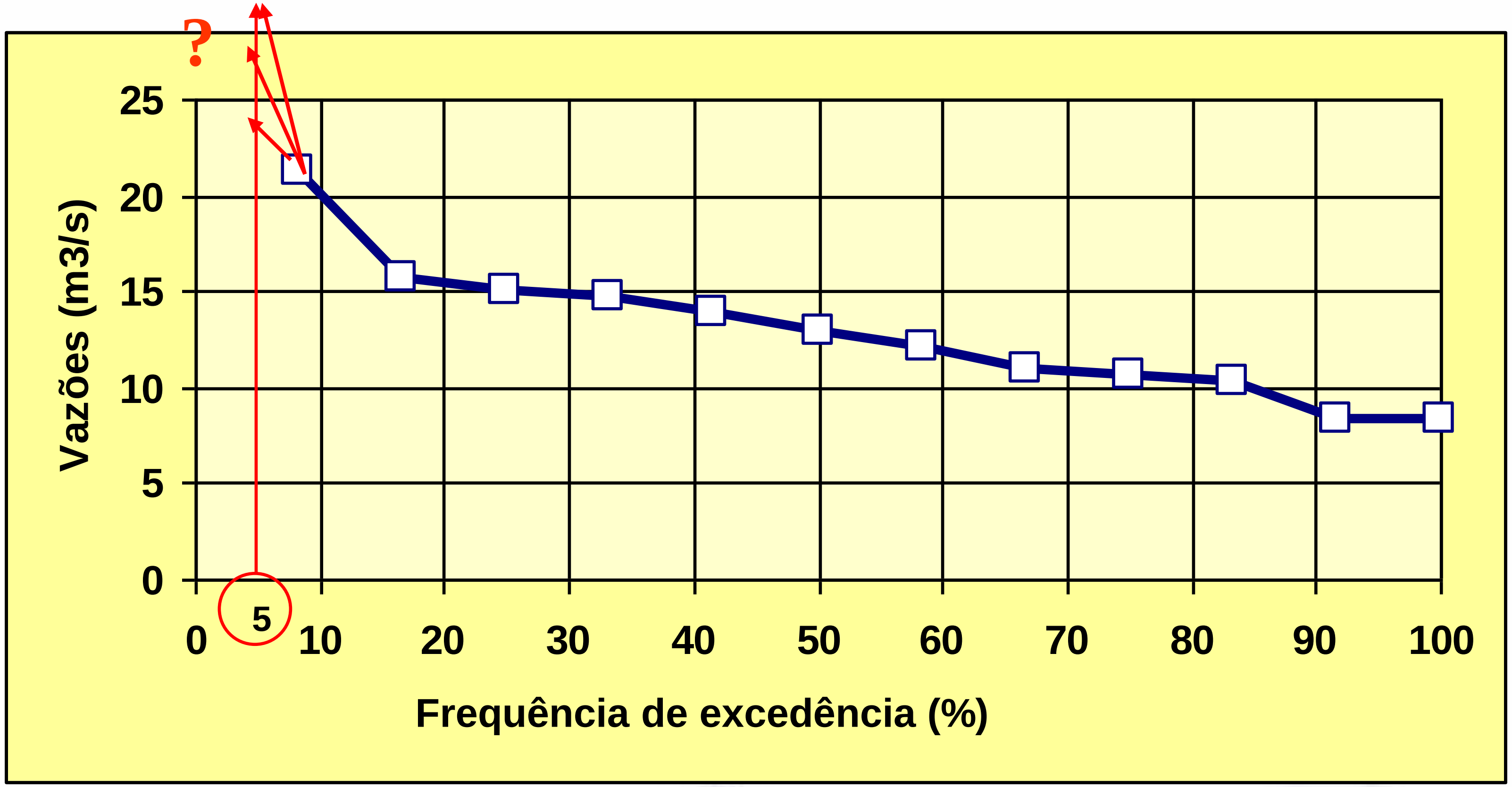


Curva de Permanência



exemplo: a vazão de 5,4 m^3/s é igualada ou superada em 90% dos meses

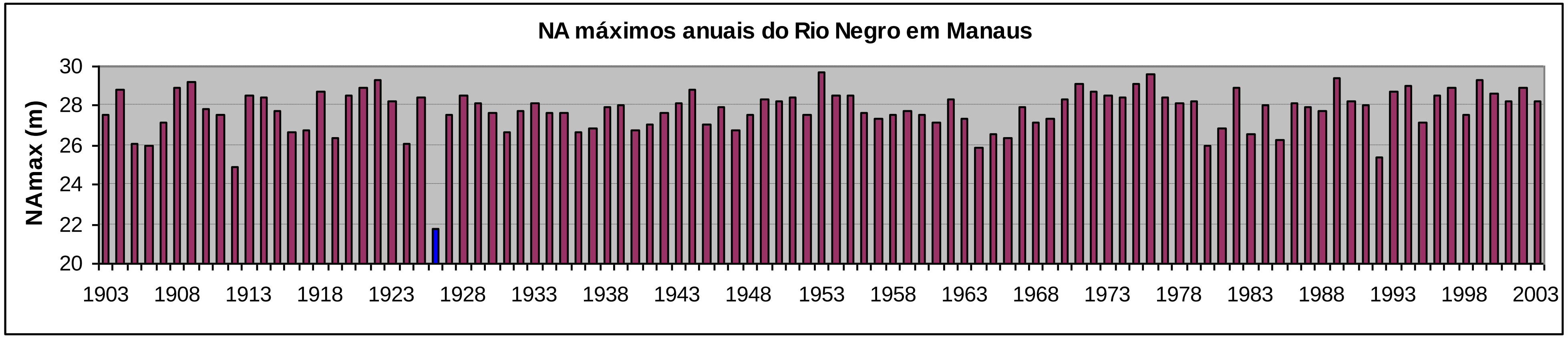
Curva de Permanência - Limitação



Como se poderia obter a vazão Q_5 neste exemplo? A extrapolação gráfica poderia levar a erros muito grandes...

Eventos Hidrológicos como Variáveis Aleatórias

Dados hidrológicos apresentam variações sazonais que podem ser irregulares e onde ocorrem extremos e diferentes seqüências de valores → variáveis aleatórias.



- Variáveis hidrológicas estarão sempre associadas a uma probabilidade de ocorrência.
- Técnicas estatísticas podem ser aplicadas para avaliar a ocorrência de fenômenos hidrológicos com determinada magnitude.

Conceito de Período de Retorno

Período de Retorno (ou Tempo de Recorrência) é definido como o intervalo <u>médio</u> de tempo em que um dado evento é igualado ou ultrapassado. Numericamente é igual ao inverso da probabilidade.

$$T = \frac{1}{P}$$

Quando a ocorrência de um determinado evento está associada a um período de retorno igual a 50 anos, diz-se que tal evento deve ocorrer ou ser superado num tempo <u>médio</u> de 50 anos. Fica intrínseco que sua probabilidade de ocorrência é igual a 2% (<u>em um ano QUALQUER</u>).

É um conceito probabilístico (não significa periodicidade!!!)

Conceito de Período de Retorno

$$q_1 = 1 - p$$ → Probabilidade de não-ocorrência num ano

$$q_n = (1-p)^n$$ → Probabilidade de não-ocorrência em um período “n” (“n” anos)

$$q_j = (1-p)^{j-1} \cdot p$$ → Probabilidade da cheia acontecer pela primeira vez (anos normais, j – 1) e o último ano com cheia

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_x(x_i)$$ → Valor esperado de uma variável aleatória (X)

$$T = E(j) = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} \cdot p$$

$$= p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 p + 4(1-p)^3 p + \ldots$$

$$= p\underbrace{\left[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \ldots\right]}$$

⇒

$$T = E(x) = p \cdot [1-(1-p)]^{-2}$$

$$T = \frac{p}{[1-(1-p)]^2} = \frac{1}{p}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + [n(n-1)/2]x^2 + [n(n-1)(n-2)/6]x^3 + \ldots$$

com $x = -(1-p)$ e $n = -2$

$$-2 \cdot -(1-p) = 2(1-p)$$

LabSid

Conceito de Risco Associado a um Período de Retorno

$$T = \frac{1}{P}$$

Período de retorno igual ao inverso da probabilidade de ocorrência

$$q_1 = 1 - P$$

Probabilidade de não-ocorrência num ano

$$q_n = (1 - P)^n$$

Probabilidade de não-ocorrência em um período n (n anos)

$$R = 1 - q_n$$

$$\boxed{R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n}$$

Probabilidade de ocorrência (uma ou mais vezes) de um determinado evento em um determinado período “n” chamado de horizonte de planejamento. Risco.

Exemplos

Qual o risco que a canalização do rio Tamanduateí tem de falhar pelo menos uma vez durante sua vida útil, estimada em 50 anos? A obra foi projetada para T = 500 anos.

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{50} = 0{,}095 = 9{,}5\%$$

Uma obra de proteção contra inundações foi projetada com período de retorno de 50 anos. Durante os primeiros 49 anos de operação da obra não se observou nenhuma vazão maior ou igual à vazão de projeto. A probabilidade de que no 50º ano ocorra uma vazão maior ou igual à vazão de projeto será?

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{1} = 0{,}02 = 2\%$$

Exemplo

Qual o risco de ocorrência (uma ou mais vezes) de um determinado evento em um período igual ao seu período de retorno (n=T)?

5 anos: $R = 1 - (1 - 1/5)^{5} = 0{,}672 = 67{,}2\%$

50 anos: $R = 1 - (1 - 1/50)^{50} = 0{,}636 = 63{,}6\%$

100 anos: $R = 1 - (1 - 1/100)^{100} = 0{,}634 = 63{,}4\%$

1000 anos: $R = 1 - (1 - 1/1000)^{1000} = 0{,}632 = 63{,}2\%$

$$\lim_{T\to\infty} R(T) = \lim_{T\to\infty}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^{T}\right] = 1 - \lim_{T\to\infty}\left(1 - \frac{1}{T}\right)^{T}$$

$$\lim_{T\to\infty} R(T) = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632$$

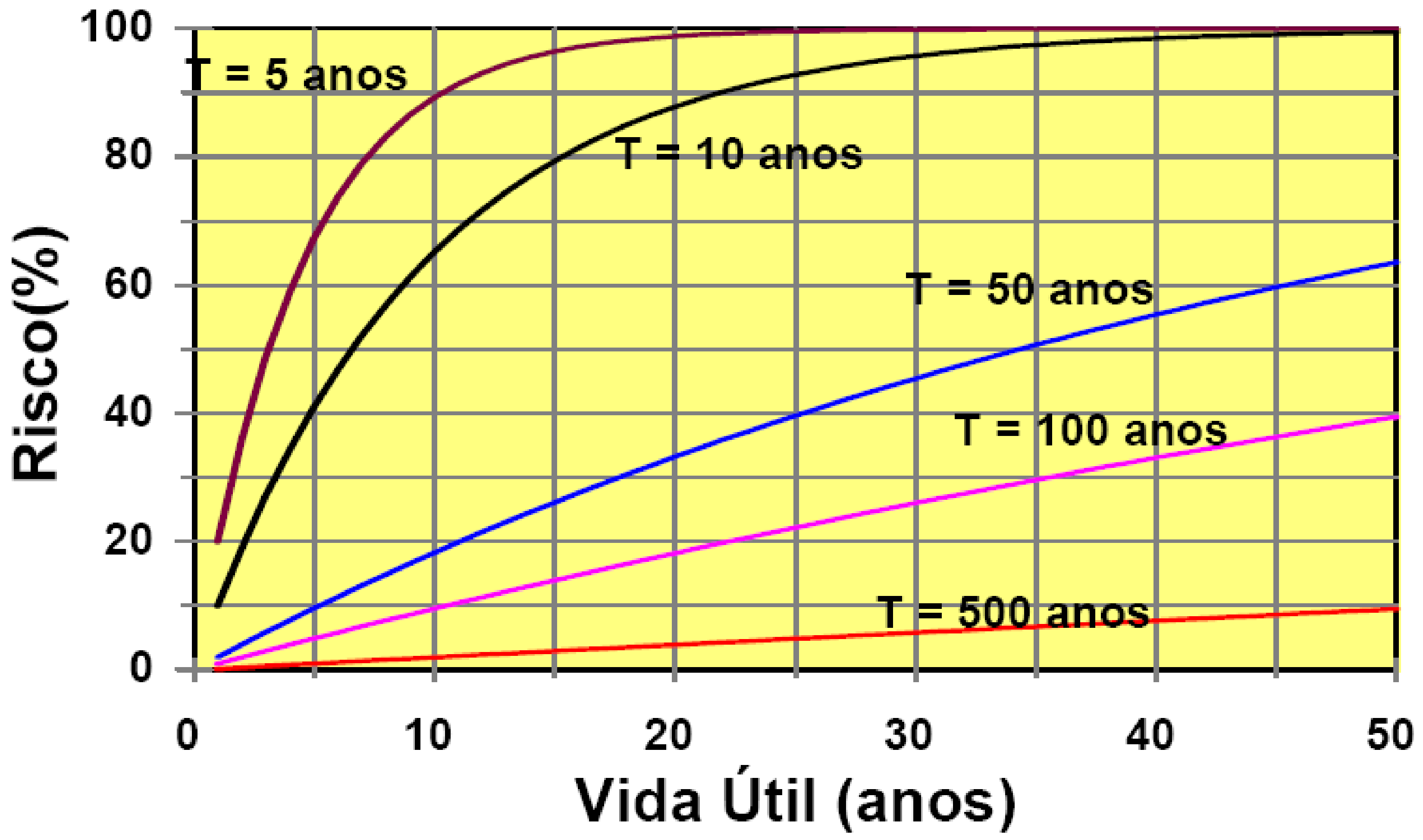
Limite fundamental: $\lim_{T\to\infty}\left(1 + \frac{1}{T}\right)^{T} = e$

$$-\frac{1}{T} = \frac{1}{Y} \Rightarrow T = -Y \text{ com } Y \to \infty$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(1 - \frac{1}{T}\right)^{T} = \lim_{Y\to\infty}\left(1 + \frac{1}{Y}\right)^{-Y}$$

$$\left[\lim_{Y\to\infty}\left(1 + \frac{1}{Y}\right)^{Y}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Risco x T x n



LabSid

Qual é a vazão de projeto?

É um dos problemas mais comuns (e importantes) em hidrologia, uma vez que envolve diretamente as dimensões da obra (e portanto, seu custo) e o risco que esta obra tem de falhar durante sua vida útil.

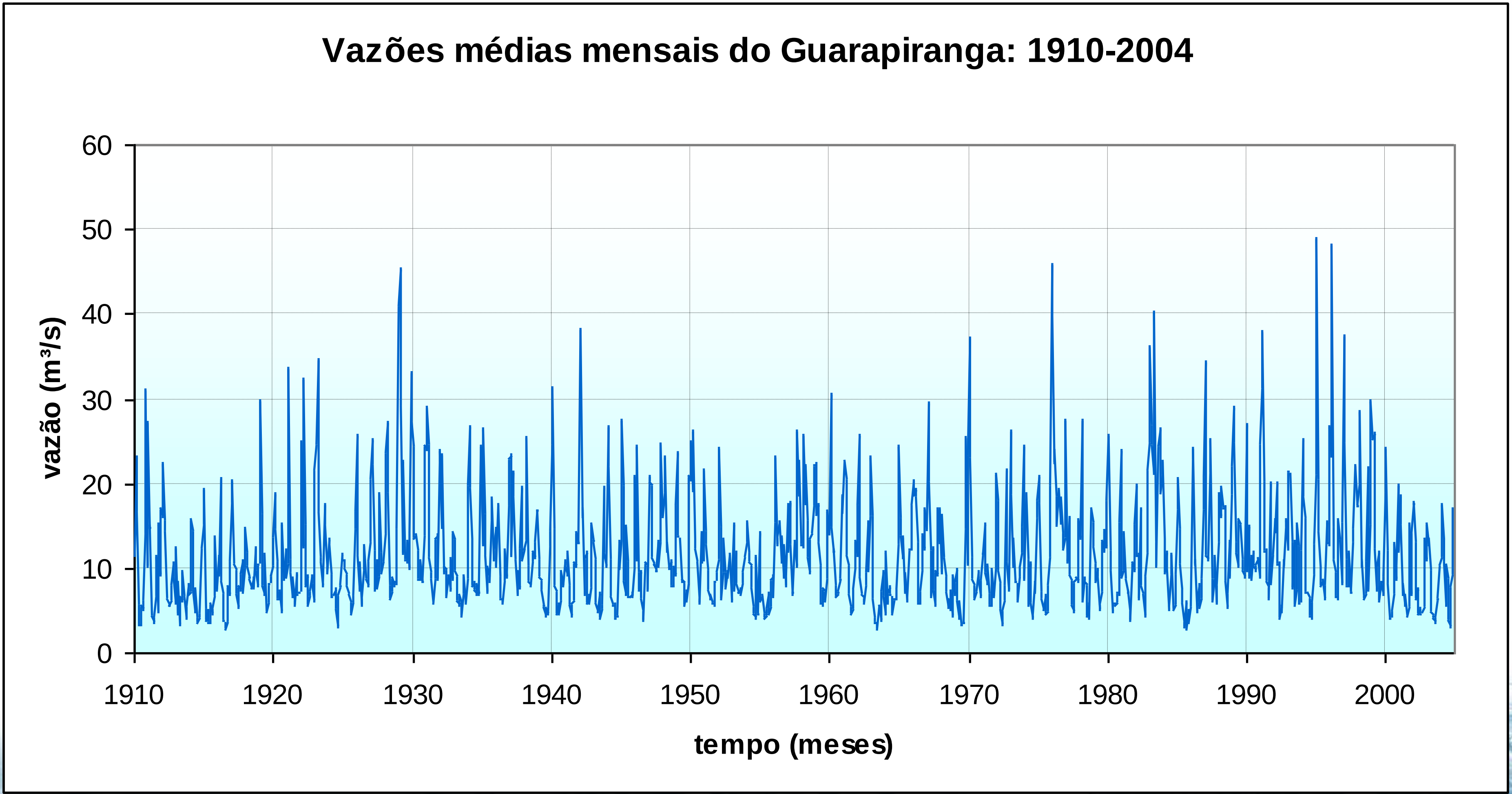
Valores usuais de T (anos)

Obras de microdrenagem	2 a 10
Obras de macrodrenagem	25 a 100
Barragens	1000 a 10000

LabSid

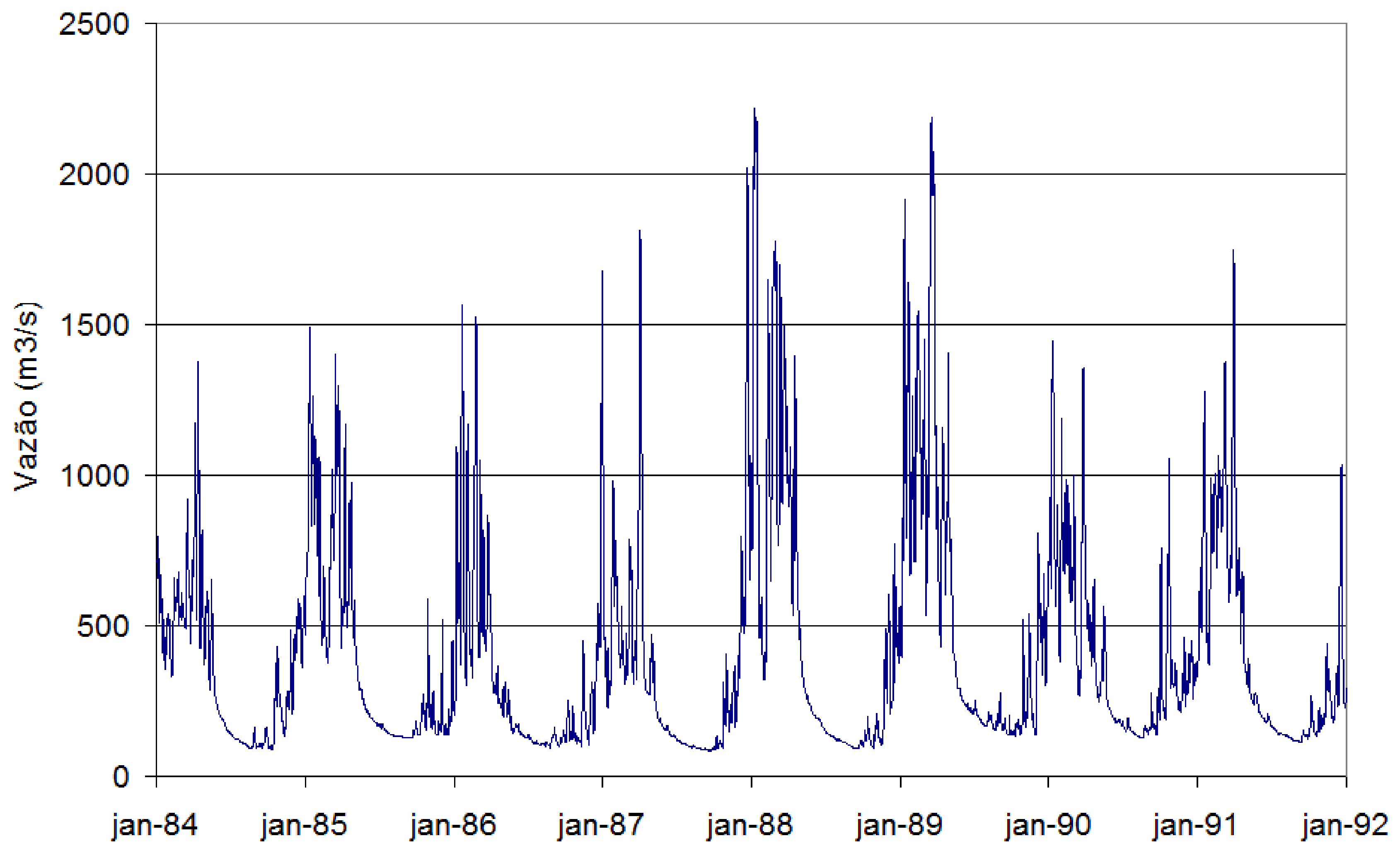
Seleção da Amostra

Séries temporais: contínuas, máximos, mínimos, médias

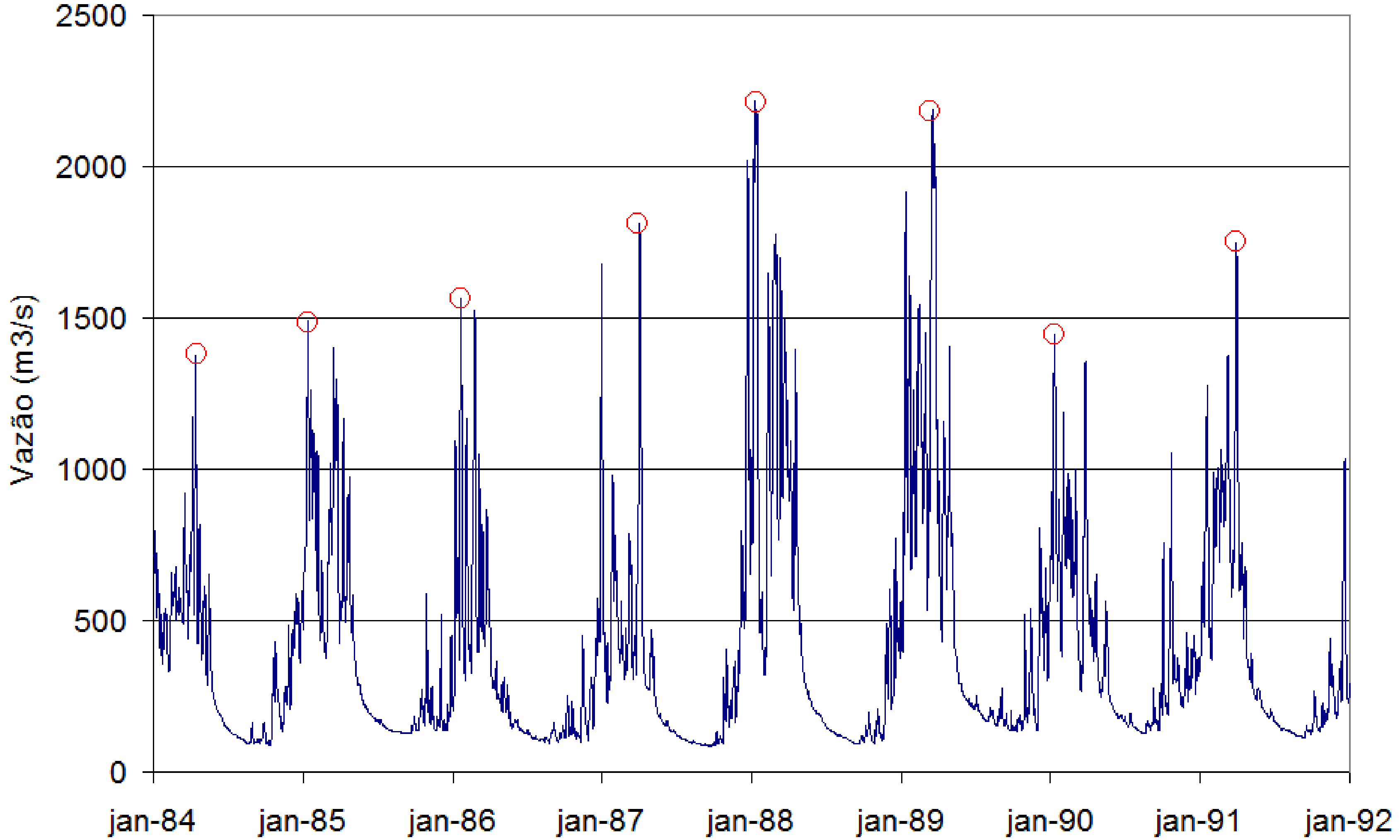


LabSid

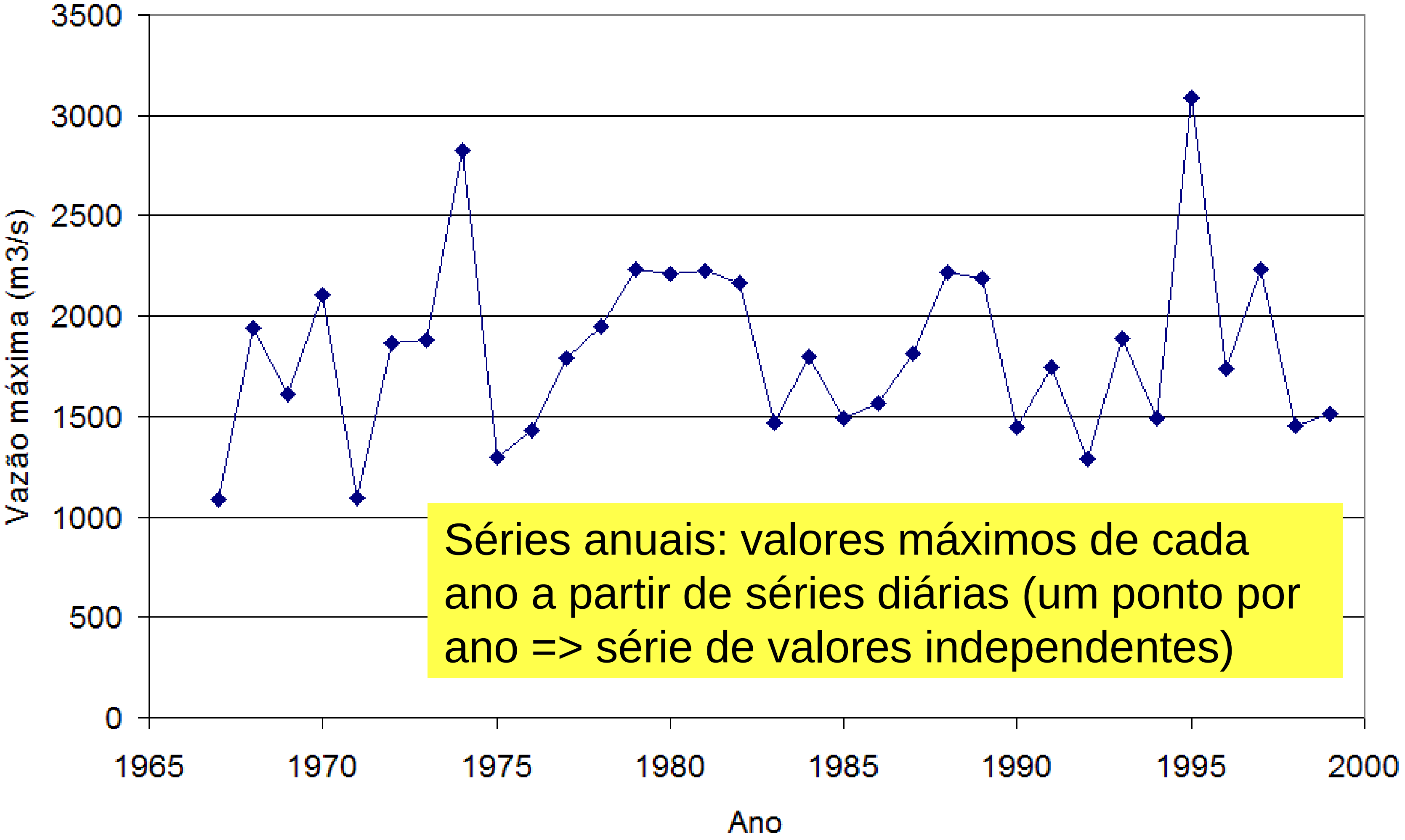
Séries de vazões diárias



Séries de Vazões Máximas

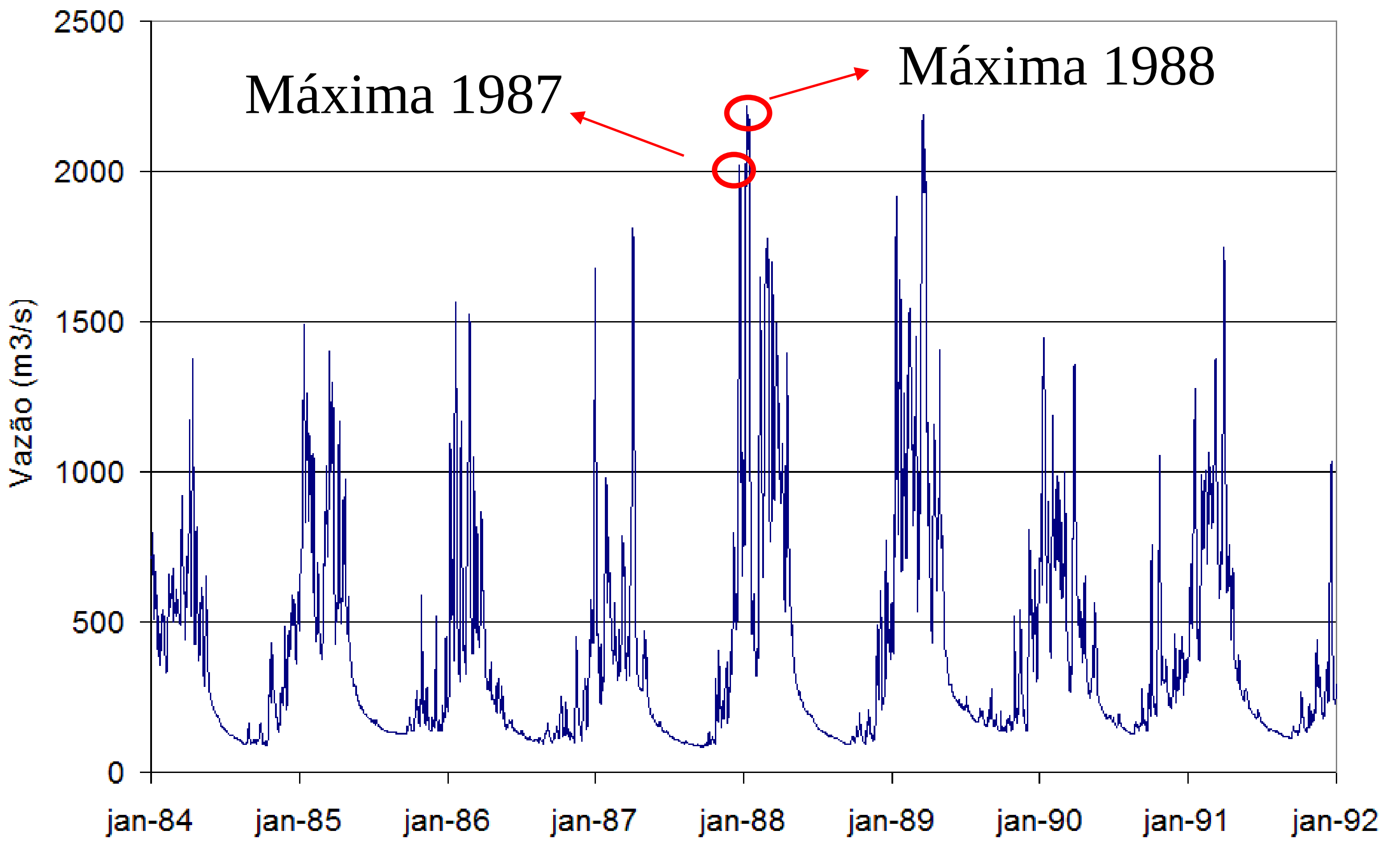


Séries de Vazões Máximas



Séries anuais: valores máximos de cada ano a partir de séries diárias (um ponto por ano => série de valores independentes)

Ano Calendário x Ano Hidrológico



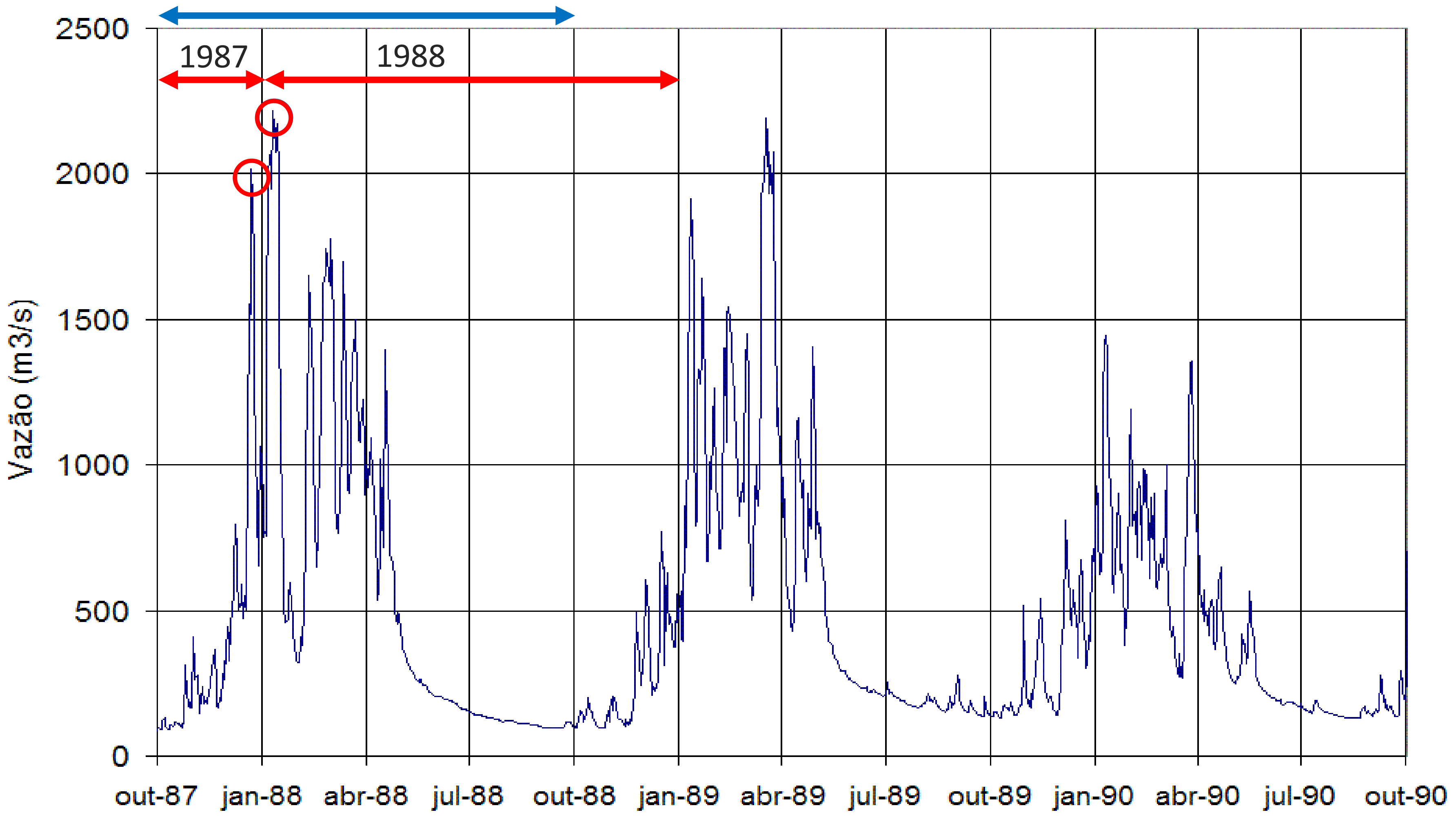
as máximas de 1987 e 1988 não são independentes...

LabSid

Ano Hidrológico

Ano calendário: dois valores para vazão máxima

Ano hidrológico: um valor de vazão máxima



Parâmetros estatísticos

Média: Mede a tendência central de uma distribuição

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Mediana: corresponde a um percentil 50% (valor que separa a frequência total em duas metades iguais)

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

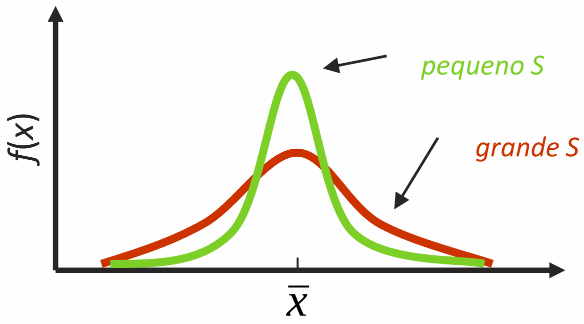
$$x_{md} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \text{ se n for ímpar}$$

$$x_{md} = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \text{ se n for par}$$

Moda: valor mais frequente

Desvio padrão: Mede o grau de dispersão em relação à média

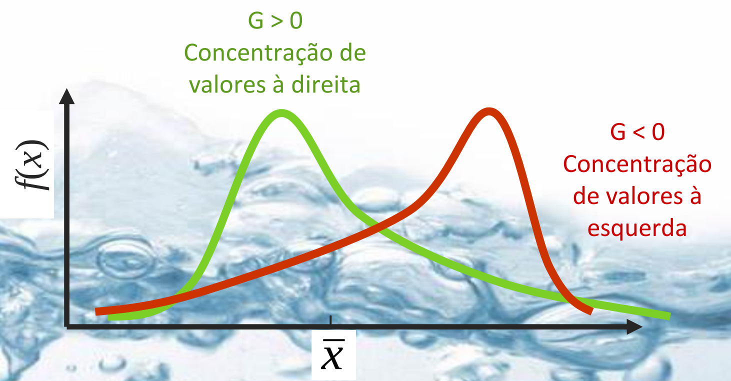
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$



Assimetria: Mede a diferença entre os dois lados da distribuição em torno da média

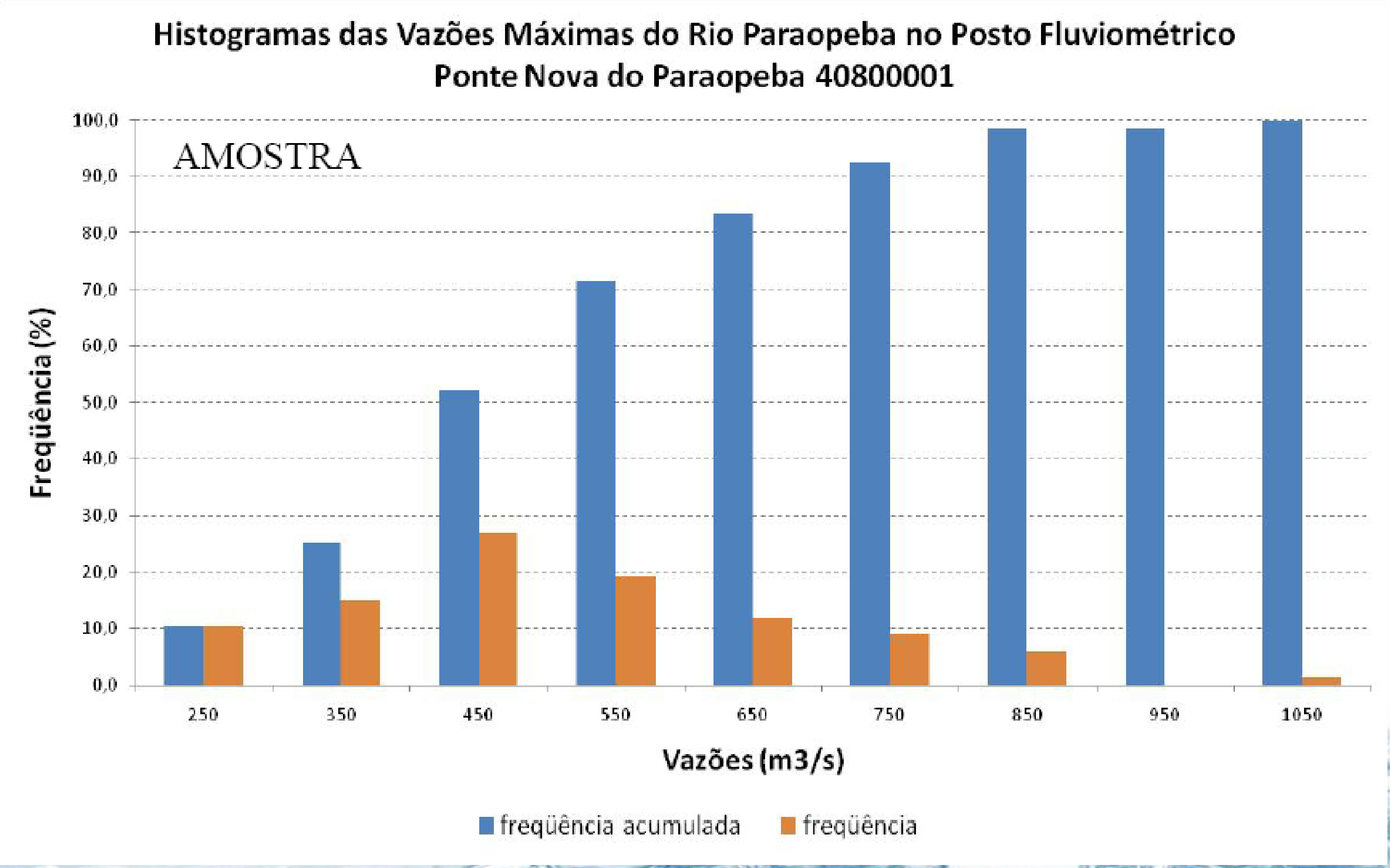
$$g = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^3}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot s^3}$$

Se g > 0: $x_{mo} < x_{md} < \overline{x}$
Se g < 0: $\overline{x} < x_{md} < x_{mo}$

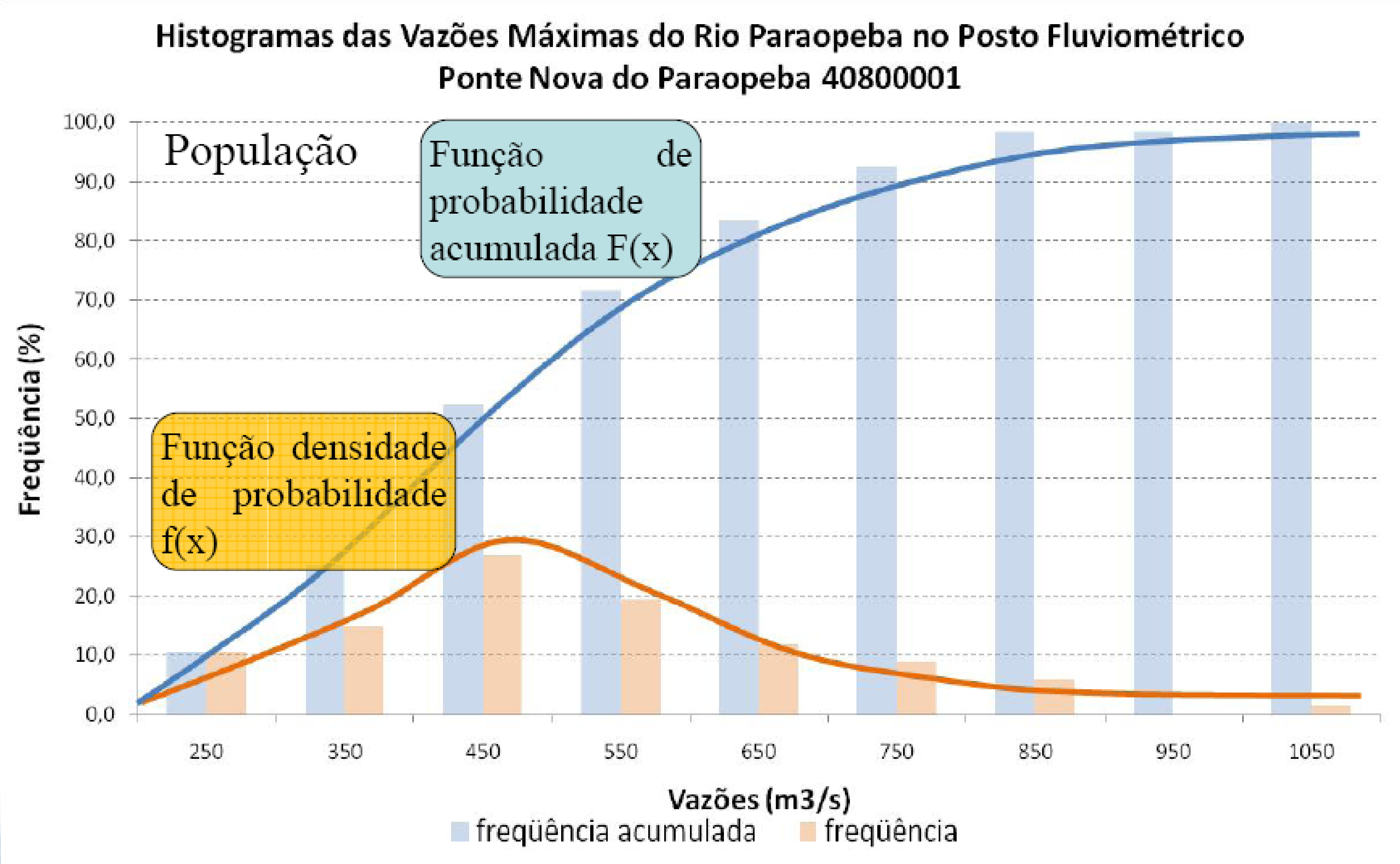


LabSid

Histogramas



Distribuições de Probabilidade



Probabilidade de uma vazão ser excedida

$$P(x_i) = \frac{i}{n}$$

i: ordem
n: número de anos

Ordem cronológica

Ano	Qmáx
1990	1445
1991	1747
1992	1287
1993	1887
1994	1490
1995	3089
1996	1737
1997	2234
1998	1454
1999	1517

Ordem decrescente de Qmáx

Ano	Qmáx	ordem
1995	3089	1
1997	2234	2
1993	1887	3
1991	1747	4
1996	1737	5
1999	1517	6
1994	1490	7
1998	1454	8
1990	1445	9
1992	1287	10

Ano	Qmáx	ordem	Probabilidade
1995	3089	1	0.10
1997	2234	2	0.20
1993	1887	3	0.30
1991	1747	4	0.40
1996	1737	5	0.50
1999	1517	6	0.60
1994	1490	7	0.70
1998	1454	8	0.80
1990	1445	9	0.90
1992	1287	10	$\boxed{1.00}$

Incoerente

Ordenação e Estimação

- **Posições de Plotagem e Distribuição Probabilística Empírica**
  - seja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n$ uma série em ordem decrescente de N vazões (diária máxima em cada ano)
  - a posição de plotagem do i-ésimo valor da amostra é a probabilidade empírica $P(x_i)$ atribuída a esse valor x_i ($0 < P(x_i) < 1$)
  - Probabilidade de excedência ou posição de plotagem:

Equação	Fórmula	Indicação
Wiebull	$P(x_i) = \frac{i}{n+1}$	Probabilidade de superação não enviesada para todas as distribuiçoes
Blom	$P(x_i) = \frac{i - 0{,}375}{n + 0{,}25}$	Quantis não enviesados para a distribuição normal
Cunnane	$P(x_i) = \frac{i - 0{,}4}{n + 0{,}2}$	Quantis aproximadamente não enviesados para quase todas as distribuições
Gringorten	$P(x_i) = \frac{i - 0{,}44}{n + 0{,}12}$	Otimizada para a distribuição de Gumbel

Probabilidade de uma vazão ser excedida

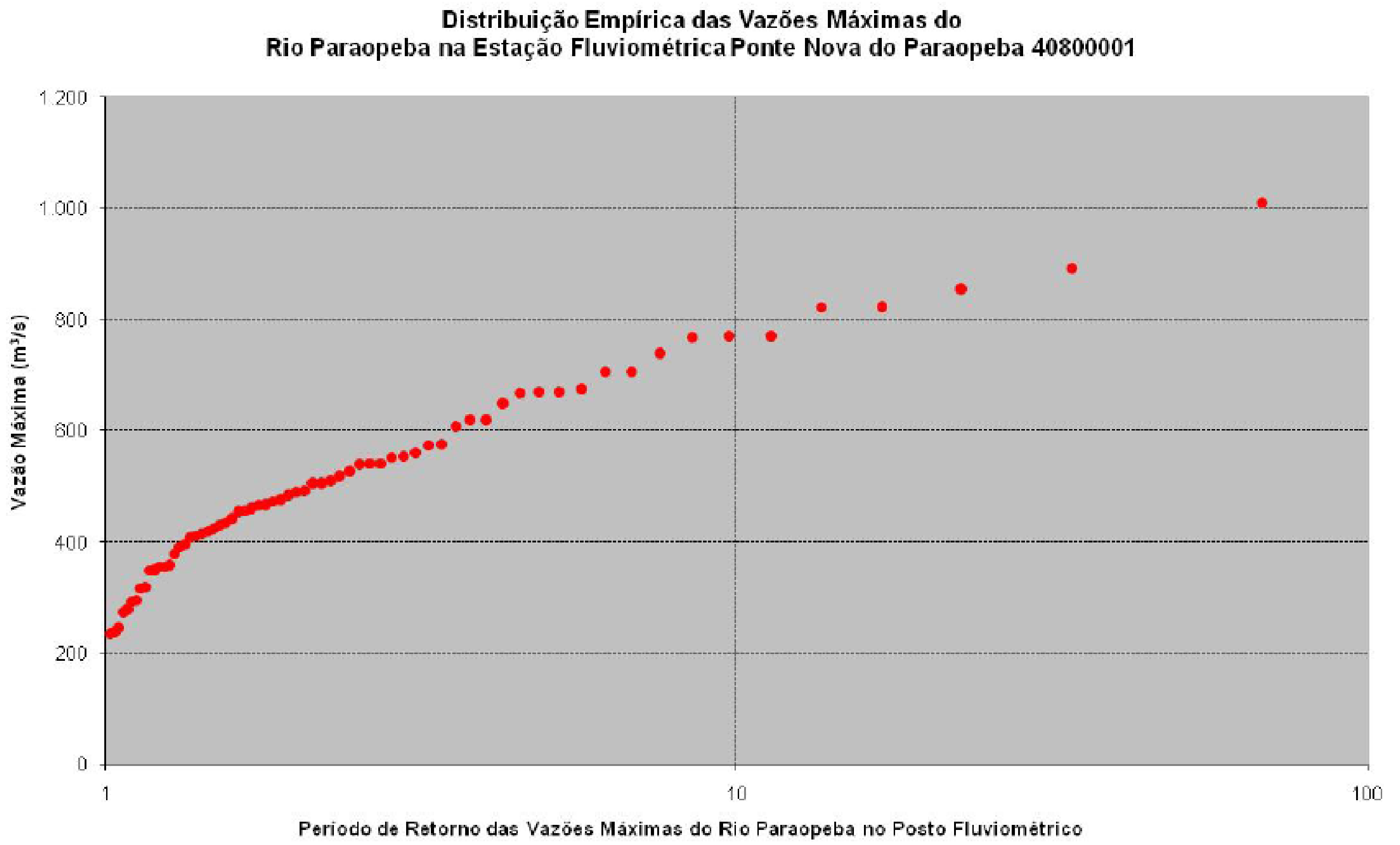
$$P(x_i) = \frac{i}{n+1}$$

i: ordem
n: número de anos

Ano	Qmáx	ordem	Probabilidade	Tempo de retorno
1995	3089	1	0.09	11.0
1997	2234	2	0.18	5.5
1993	1887	3	0.27	3.7
1991	1747	4	0.36	2.8
1996	1737	5	0.45	2.2
1999	1517	6	0.55	1.8
1994	1490	7	0.64	1.6
1998	1454	8	0.73	1.4
1990	1445	9	0.82	1.2
1992	1287	10	0.91	1.1

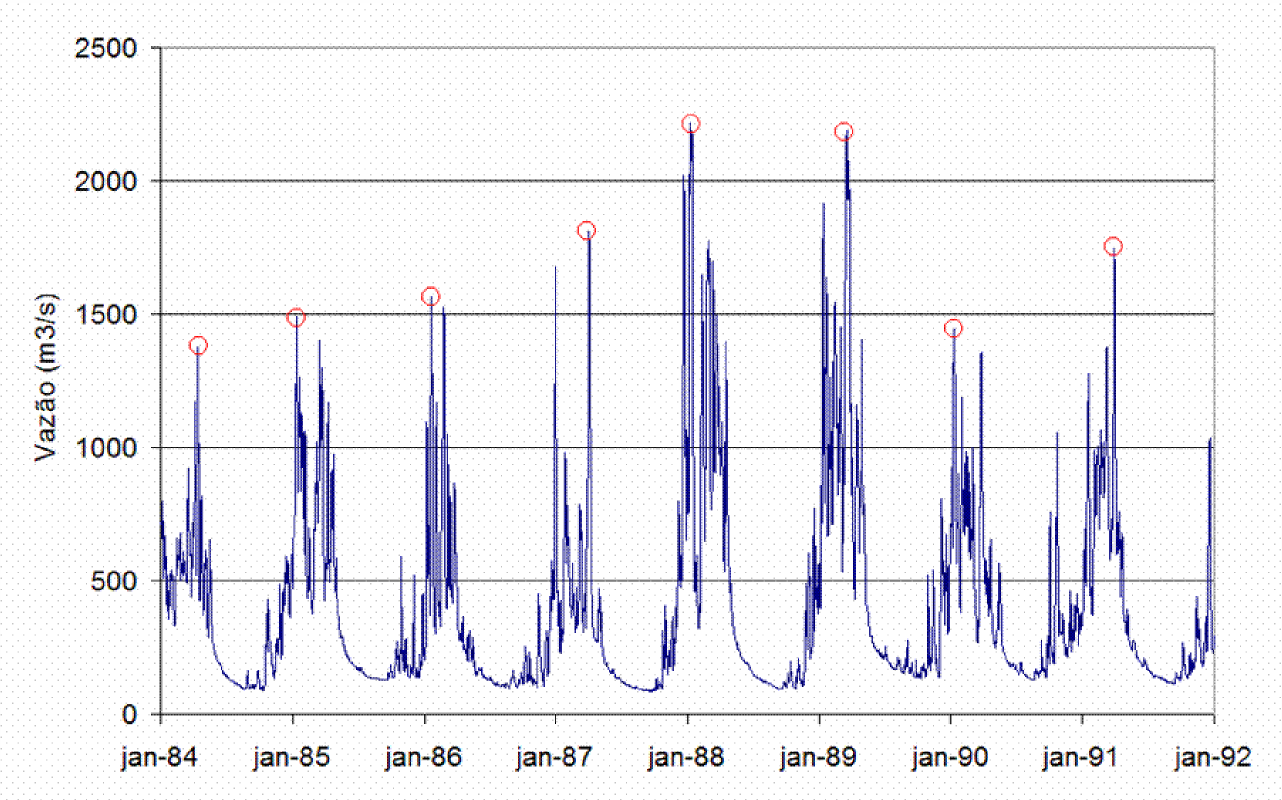
Probabilidade de excedência

Ordem i	Vazão Máxima (m^3/s)	Probabilidade de Excedência ou Posição de Plotagem	Período de Retorno (anos)
1	1010,35	0,015	68,0
2	893,50	0,029	34,0
3	855,36	0,044	22,7
4	823,66	0,059	17,0
5	822,05	0,074	13,6
6	771,16	0,088	11,3
7	770,80	0,103	9,7
8	768,43	0,118	8,5
9	739,81	0,132	7,6
10	706,00	0,147	6,8
11	706,00	0,162	6,2
12	675,84	0,176	5,7
13	670,00	0,191	5,2
14	669,94	0,206	4,9
15	668,47	0,221	4,5
16	649,83	0,235	4,3
17	620,09	0,250	4,0
18	620,09	0,265	3,8
19	608,43	0,279	3,6
20	575,50	0,294	3,4



LabSid

Vazões máximas do Rio Cuiabá



Ano	Q máx
1984	1796.8
1985	1492.0
1986	1565.0
1987	1812.0
1988	2218.0
1989	2190.0
1990	1445.0
1991	1747.0

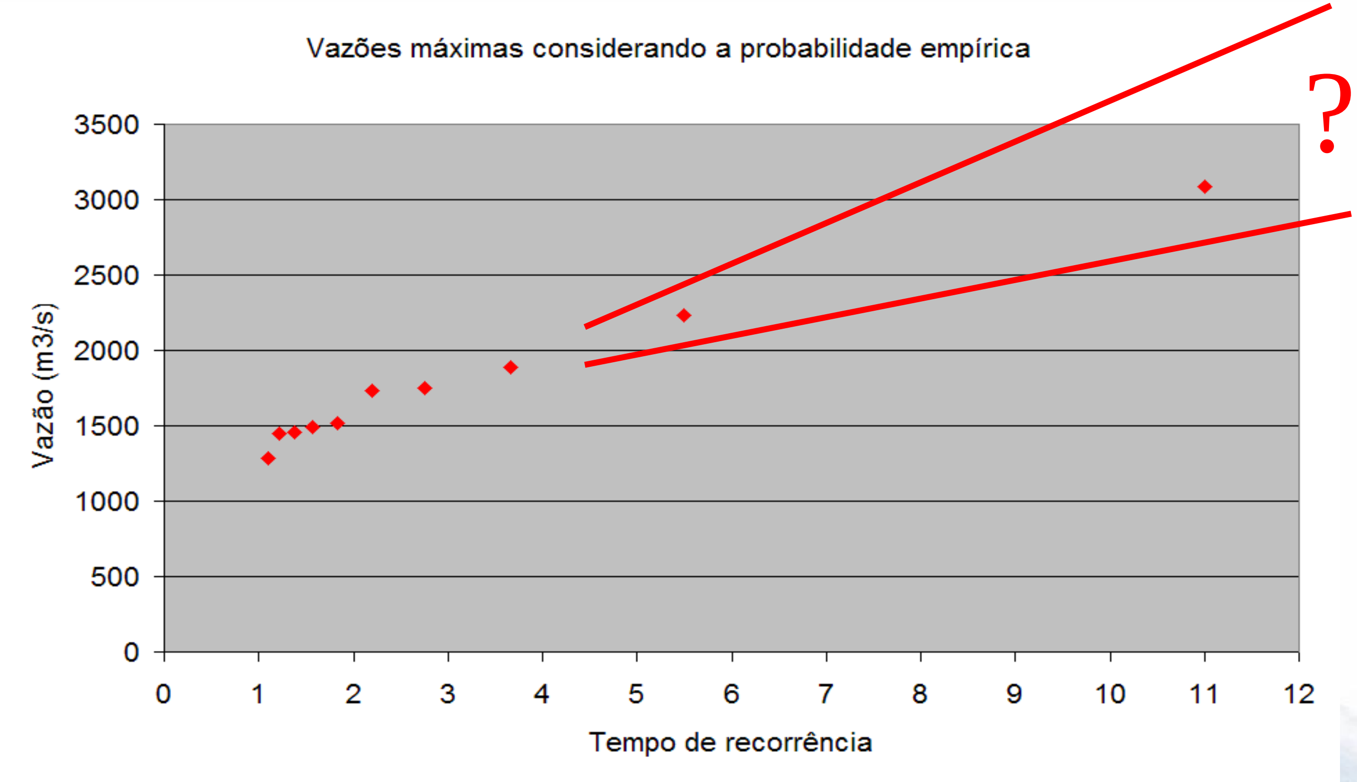
Qual a vazão para T = 5 anos?

Qual a vazão para T = 100 anos?

Ano	Vazão (m3/s)	Ordem	Probabilidade	TR (anos)
1988	2218.0	1	0.11	9.0
1989	2190.0	2	0.22	4.5
1987	1812.0	3	0.33	3.0
1984	1796.8	4	0.44	2.3
1991	1747.0	5	0.56	1.8
1986	1565.0	6	0.67	1.5
1985	1492.0	7	0.78	1.3
1990	1445.0	8	0.89	1.1

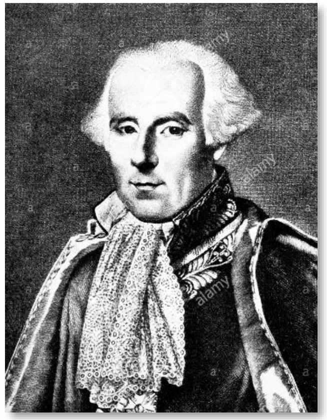
Problemas com a probabilidade empírica...

Se uma cheia de T = 100 anos ocorrer em uma série com 10 anos, será atribuído um período de retorno de 11 anos a esta cheia (!)



Como estimar vazões com T alto, usando séries de relativamente poucos anos?
Supor que os dados correspondem a uma distribuição de frequência conhecida.

Distribuição Normal



Pierre-Simon Laplace
(1749 – 1827)

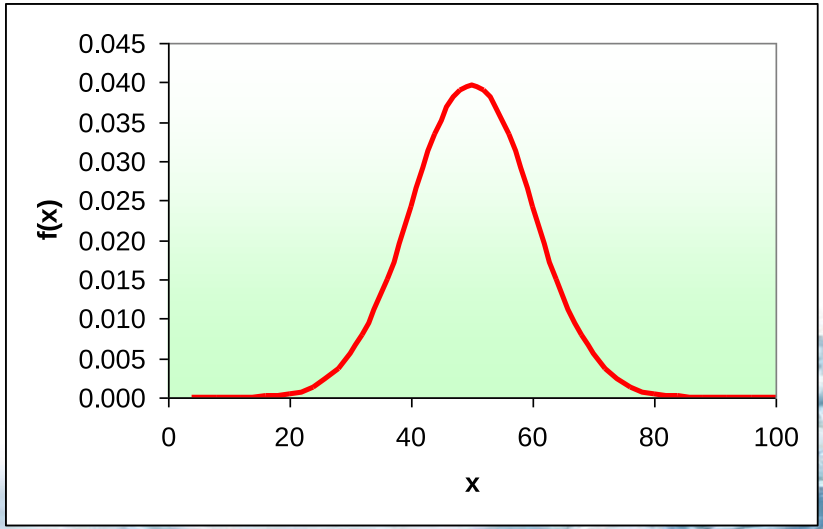
Função de distribuição de probabilidade

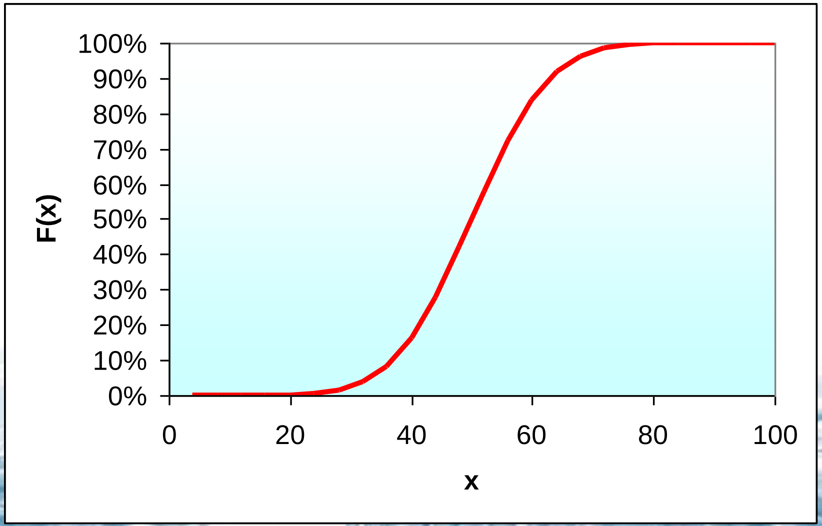
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Função acumulada de probabilidades de não excedência

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X\le x)$$

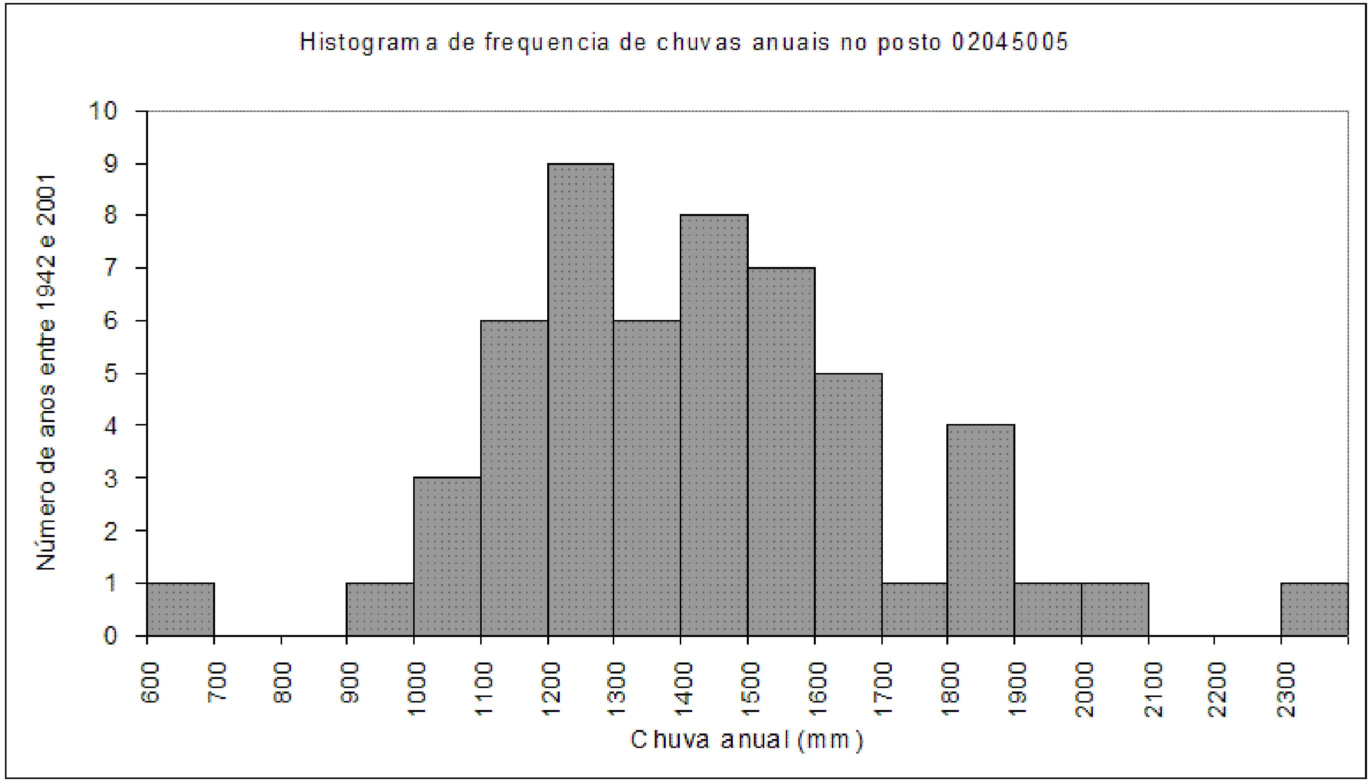
Carl Friedrich Gauss
1977 - 1855





Exemplo: chuvas totais anuais

O total de chuva que cai ao longo de um ano pode ser considerado uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal. Esta suposição permite explorar melhor amostras relativamente pequenas, com apenas 20 anos, por exemplo.

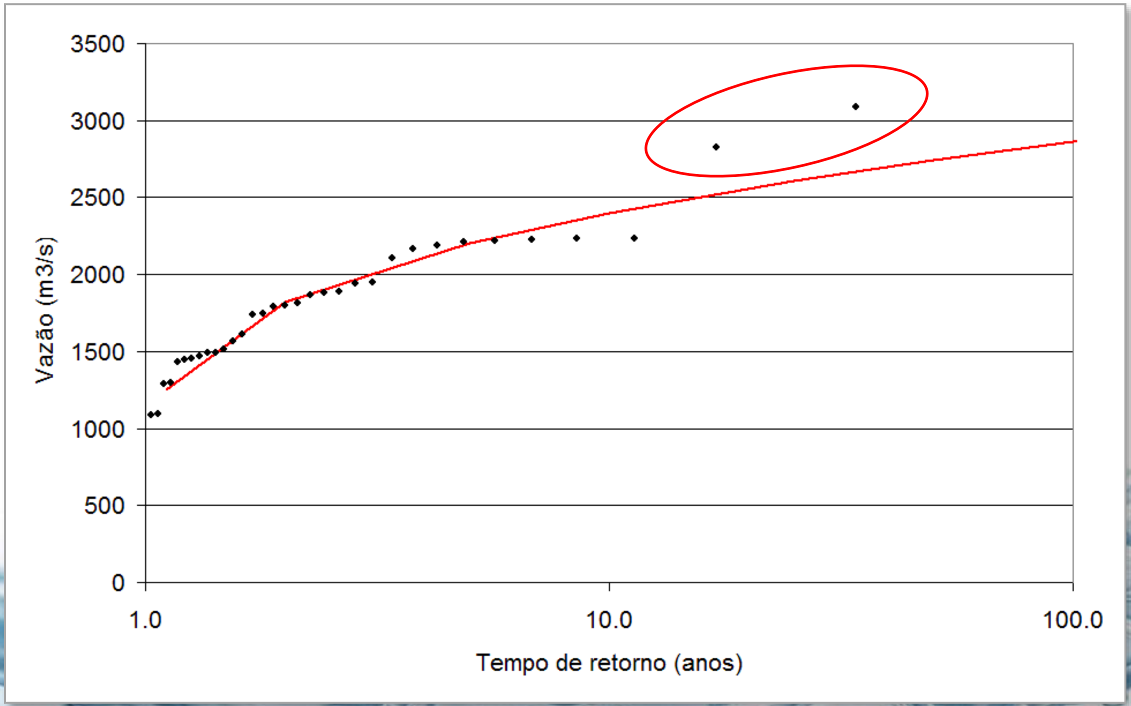


Usando a distribuição normal

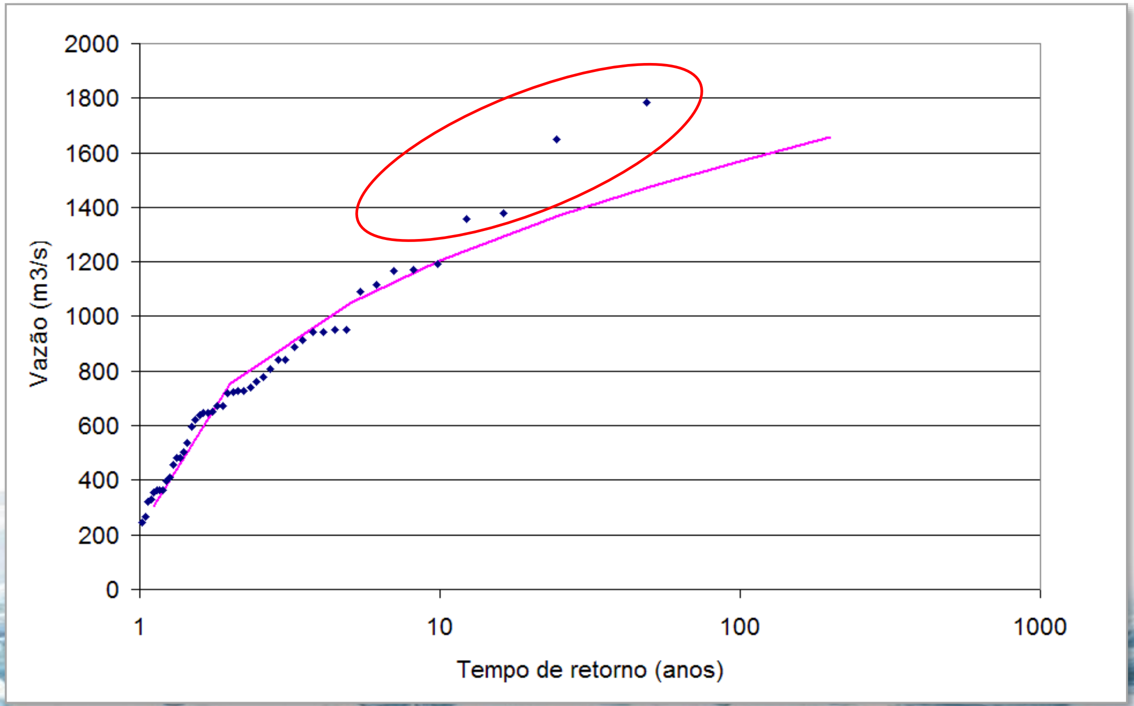
- Calcular a média
- Calcular o desvio padrão
- Obter os valores de vazões para probabilidades associadas a cada período de retorno

Subestimativa

Ajuste da Distribuição Normal aos dados do Rio Cuiabá de 1967 a 1999

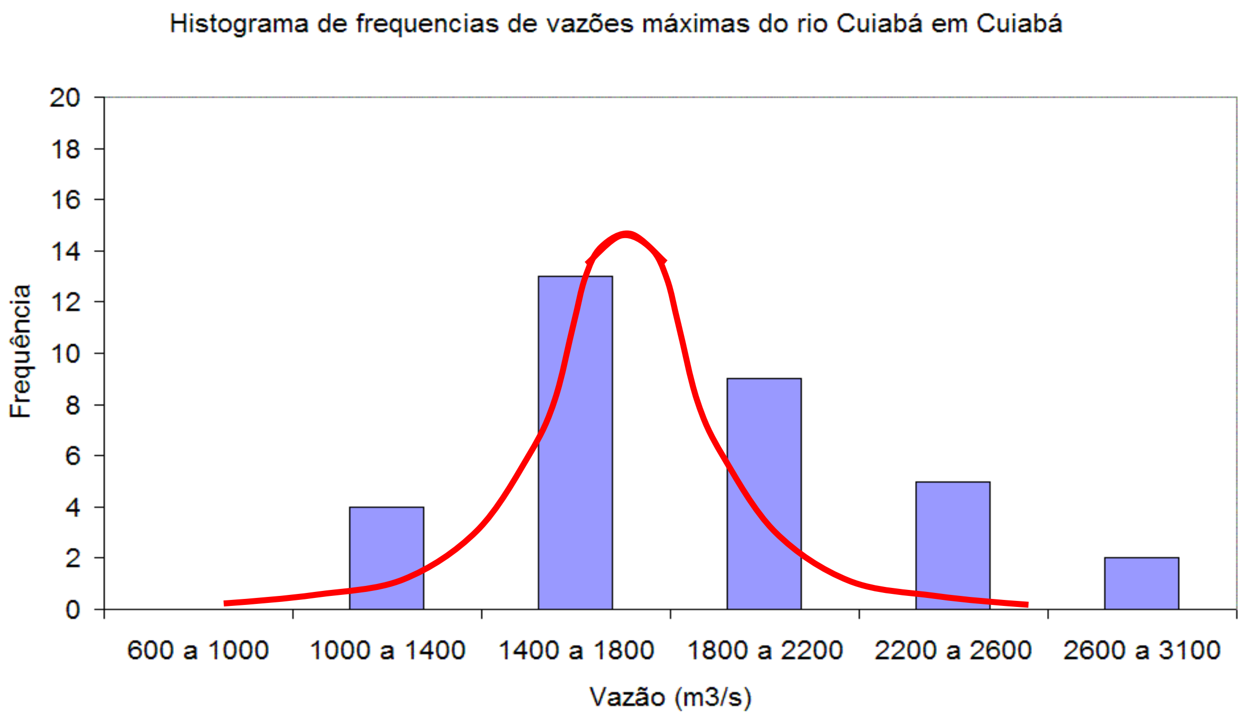


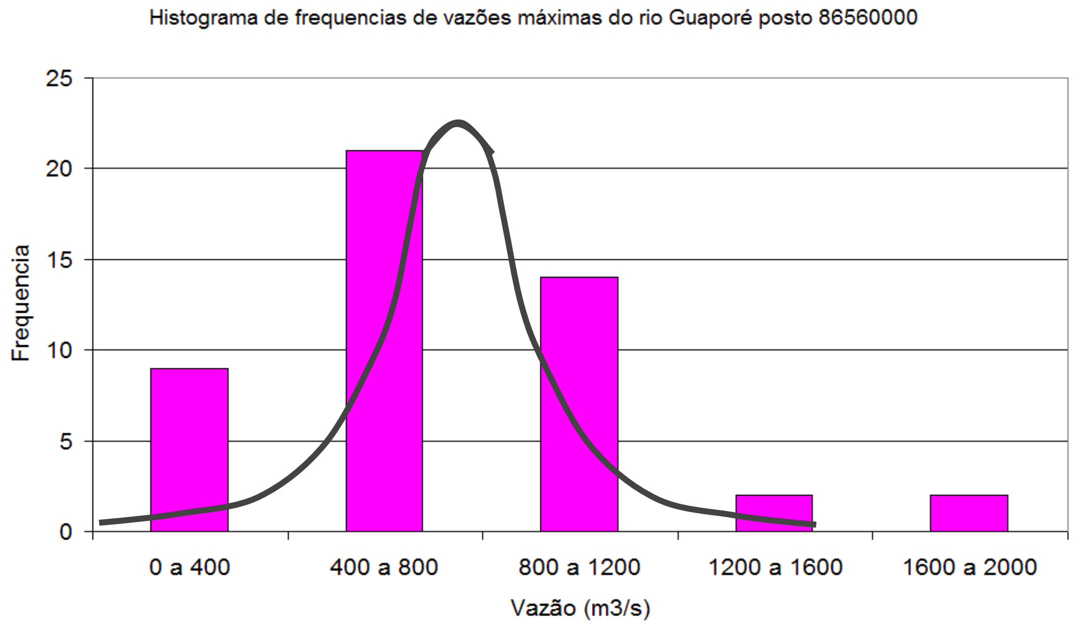
Ajuste da Distribuição Normal aos dados do Rio Guaporé de 1940 a 1995



LabSid

Problema





a distribuição de frequência de vazões máximas não é normal...

Distribuição Normal – variável normal padronizada

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X \leq x)$$

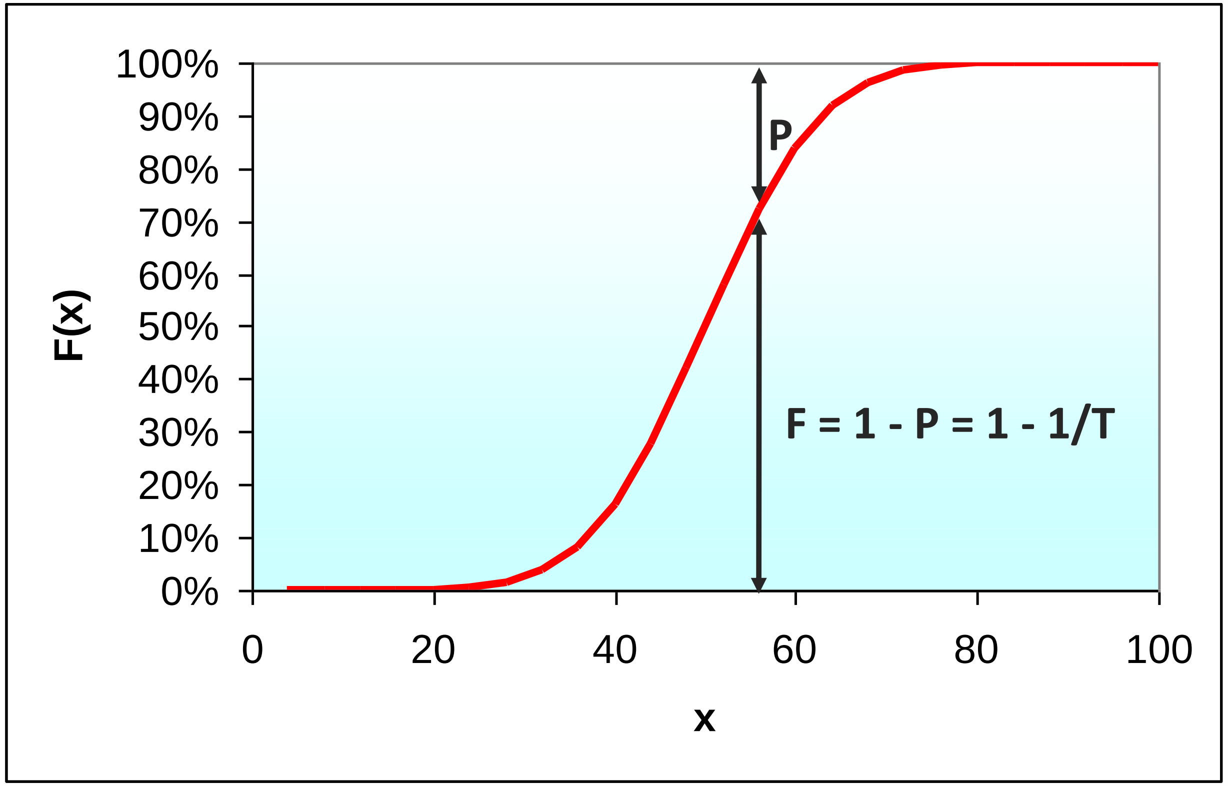
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

μ – média
σ – desvio padrão

$$B = \frac{1}{2} \cdot [1 + 0{,}196854 \cdot |z| + 0{,}115194 \cdot |z|^2 + 0{,}000344 \cdot |z|^3 + 0{,}019527 \cdot |z|^4]^{-4}$$

$F(z) = B$ para $z < 0$
$F(z) = 1 - B$ para $z \geq 0$

Função de probabilidade acumulada de não excedência



Tratando de máximas (colocamos os dados em ordem decrescente), se F(x) é função acumulada de probabilidades de não excedência, ela é igual a 1 menos a probabilidade de excedência

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx = P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - \frac{1}{T}$$

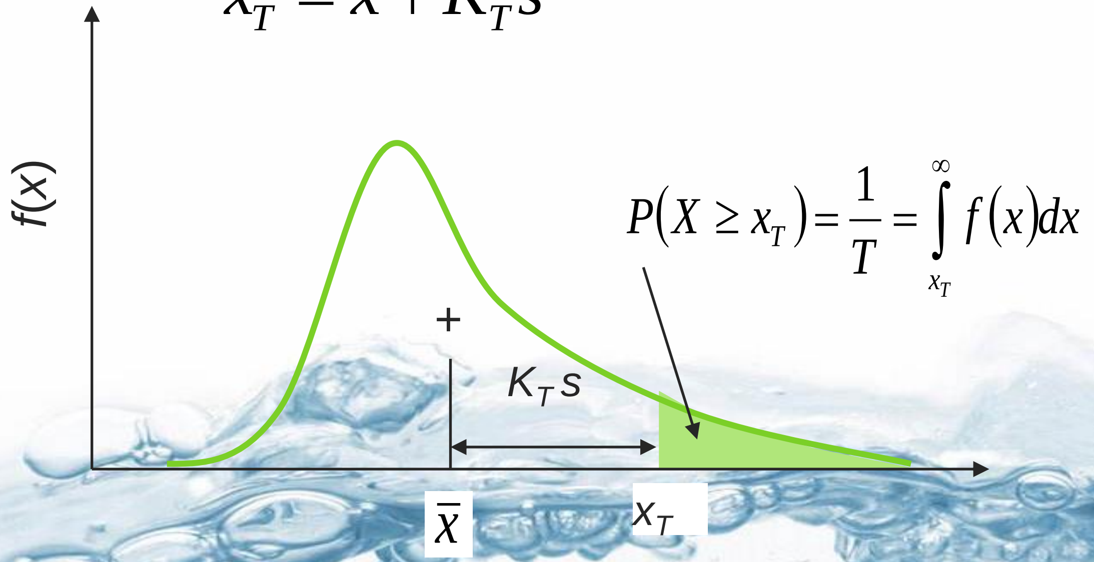
Fator de Frequência

A magnitude de um evento hidrológico x_T pode ser representada pela média acrescida de uma variação Δx_T em torno da média:

$$x_T = \bar{x} + \Delta x_T$$

A variação pode ser considerada igual ao produto do desvio padrão e um fator de frequência K_T, que está em função do período de retorno e do tipo de distribuição de probabilidade usada na análise:

$$x_T = \bar{x} + K_T s$$

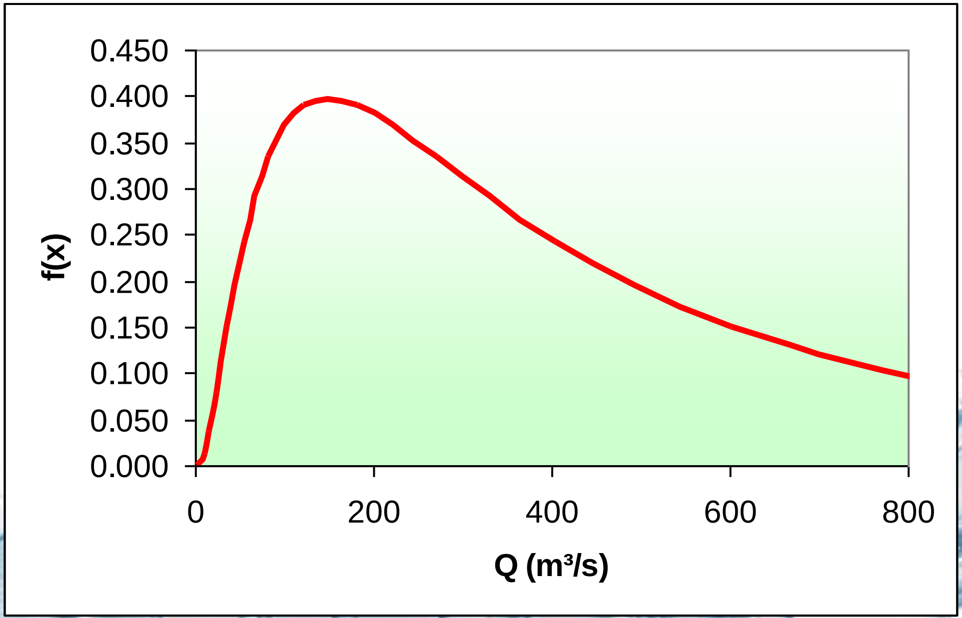


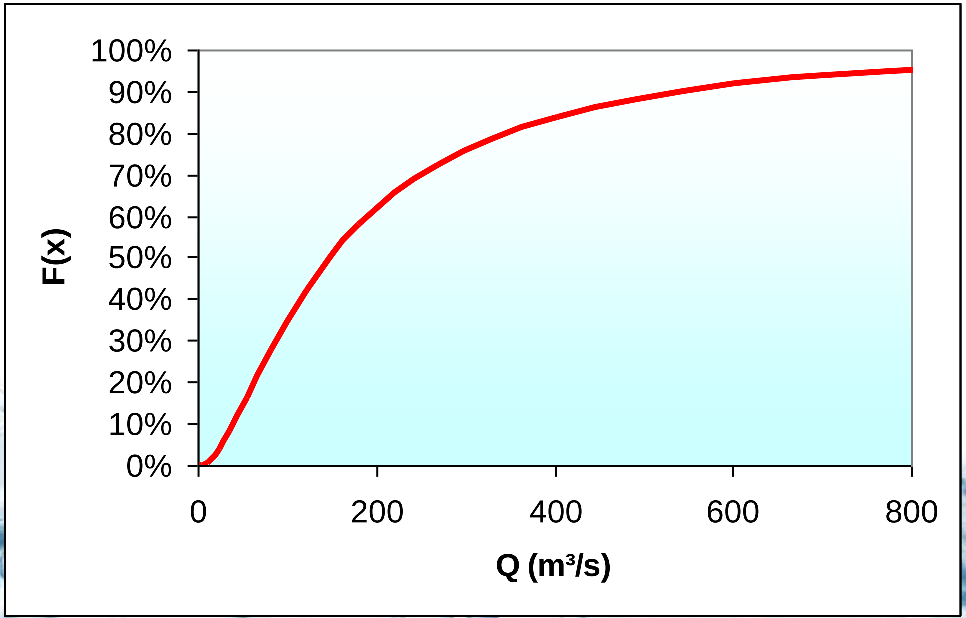
Distribuição Log Normal

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y - \mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2} \right)$$

Onde y = ln (x)
Extensão: $x > 0$

Admite que os logaritmos das vazões máximas anuais seguem uma distribuição normal (x = ln(Q)).





LabSid

Fator de Frequência para Distribuição Normal

$$K_T = \frac{x_T - \bar{x}}{s}$$

Variável normal padronizada

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

O valor de *z* corresponde a uma probabilidade de excedência de *p* (*p* = 1/*T*) e pode ser calculada com o auxílio de uma variável intermediária *w*:

$$K_T = z = w - \frac{2.515517 + 0.802853w + 0.010328w^2}{1 + 1.432788w + 0.189269w^2 + 0.001308w^3}$$

$$w = \left[\ln\left(\frac{1}{p^2}\right)\right]^{1/2} \quad (0 < p \leq 0.5)$$

Quando $p > 0.5$ substituir p por $1 - p$

LabSid

Exemplo – Distribuição Normal

Qual a vazão máxima anual para um período de retorno de 10 anos do rio Jaguari calculada usando o fator de freqüência para a distribuição Normal, conhecendo-se a média e o desvio padrão da série?

T = 10 anos, p = 1/10 = 0.1

$$w = \left[\ln\left(\frac{1}{0{,}1^2}\right)\right]^{1/2} = 2{,}146$$

$$K_T = 2{,}146 - \frac{2{,}515517 + 0{,}802853 \cdot 2{,}146 + 0{,}010328 \cdot 2{,}146^2}{1 + 1{,}432788 \cdot 2{,}146 + 0{,}189269 \cdot 2{,}146^2 + 0{,}001308 \cdot 2{,}146^3} = 1{,}279$$

$$x_T = \overline{x} + K_T \cdot s = 94{,}7 + 1{,}279 \cdot 68{,}3 = 182\ m^3\ s^{-1}$$

LabSid

Usando a distribuição Log Normal

- Calcular os logaritmos das Q máximas anuais: $x = \ln(Q)$
- Calcular a média: $\bar{x}$
- Calcular o desvio padrão: s
- Obter os valores de x para probabilidades de 50, 20, 10, 4, 2, 1%, etc, que correspondem aos T de 2, 5, 10, 25, 50, 100 anos, etc.
- Calcular as vazões correspondentes ($Q=e^x$) para cada T

Dica: no Excel podem ser utilizadas as funções DIST.NORM.N (x;média;desvpadrão;cumulativo) e a inversa INV.NORM.N (probabilidade;média;desvpadrão) ou diretamente a DIST.LOGNORMAL e INVLOGNORMAL

Retorna o inverso da distribuição log-normal cumulativa de x, onde ln(x) é normalmente distribuída.

Exercício

Estatística

- Data máxima para entrega: 26/07/2013
- Numero de Tentativas com Respostas Incorretas:

Para resolver os exercício, utilize preferencialmente as fórumlas fornecidas na apostila e apresentação.

Posto: FAZENDA SÃO DOMINGOS, Prefixo: 5B-007, Rio: SAPUCAI-MIRIM, Município de GUAIRA

Ano	Vazão
1980	391,78
1981	471,66
1982	679,12
1983	305,55
1984	321,48
1985	179,76
1986	245,05
1987	220,44
1988	257,03
1989	367,99
1990	453,46
1991	447,46
1992	345,71
1993	241
1994	465,56

1. Com os dados de vazões máximas diárias anuais observados, coloque a série em ordem decrescente e associe probabilidades e períodos de retornos amostrais.

2. Plote os pontos nos papéis de probabilidades fornecidos.

3. Desenhe nos papéis de probabilidades as retas teóricas das distribuições. Comente-os

4. Faça tabelas com valores de vazões obtidas das distribuições teóricas , associadas a períodos de retorno de 25, 500, 1000 e 10000 anos. Compare e comente os resultados.

T(anos)	Normal	Log-Normal	Gumbel	Log-Gumbel
25				
500				
1000				
10000				

4. Indique três procedimentos que podem ser adotados para verificar o nível de ajuste de uma distribuição de probabilidades aos valores observados. Comente

5. Faça um gráfico representando o risco nas ordenadas e a vida útil (limite a 50 anos) nas abscissas. Adote períodos de retorno de 25, 500, 1000 e 10000 anos. Comente.

Fim

LabSid