1. Encontre a série de cossenos de Fourier da função $|\sin x|$ no intervalo $(-\pi, \pi)$. Use-a para encontrar as somas das séries
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

2. Uma haste tem comprimento $L = 1$ e constante $k = 1$. Sua temperatura satisfaz a equação do calor. A extremidade esquerda da haste é mantida na temperatura 0, e a extremidade direita na temperatura 1. Inicialmente (em $t = 0$) a temperatura é dada por
$$\phi(x) = \begin{cases} 5x/2 & \text{para } 0 < x < 2/3 \\ 3 - 2x & \text{para } 2/3 < x < 1. \end{cases}$$
Encontre a solução, incluindo os coeficientes. (Dica: primeiro encontre a solução de equilíbrio $U(x)$ e, em seguida, resolva a equação do calor com a condição inicial $u(x, 0) = \phi(x) - U(x)$.)

3. Resolva $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para $0 < x < \pi$, com as condições de fronteira de Neumann e as condições iniciais $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \cos^2 x$.

4. (a) Prove que se $\phi(x)$ é uma função ímpar, sua série de Fourier completa em $(-L, L)$ tem apenas termos em seno.

   (b) Além disso, se $\phi(x)$ é uma função par, sua série de Fourier completa em $(-L, L)$ tem apenas termos em cosseno.

5. Mostre que a série de senos de Fourier em $(0, L)$ pode ser obtida da Série de Fourier em $(-L, L)$ como segue. Seja $\phi(x)$ qualquer função (contínua) em $(0, L)$. Seja $\tilde{\phi}(x)$ sua extensão ímpar. Escreva a série completa para $\tilde{\phi}(x)$ em $(-L, L)$. [Suponha que sua soma seja $\tilde{\phi}(x)$.] Pelo Exercício anterior, esta série tem apenas termos em seno. Simplesmente restrinja sua atenção a $0 < x < L$ para obter a série de senos para $\phi(x)$.

6. Mostre que a série de cossenos em $(0, L)$ pode ser obtida da série completa em $(-L, L)$ usando a extensão par de uma função.

7. Considere o problema $u_t = k u_{xx}$ para $0 < x < L$, com as condições de fronteira $u(0, t) = U$, $u_x(L, t) = 0$, e a condição inicial $u(x, 0) = 0$, onde U é uma constante.

   (a) Encontre a solução em forma de série. (Dica: considere $u(x, t) - U$.)

   (b) Se ϵ for uma dada margem de erro, estime quanto tempo é necessário para o valor $u(L, t)$ ser aproximado pela constante U na margem de erro ϵ. (Dica: É uma série alternada com a primeira termo U, de modo que o erro seja menor que o próximo termo.)

8. Mostre diretamente que $(-X_1' X_2 + X_1 X_2')\Big|_a^b = 0$ se X_1 e X_2 satisfazem o mesma condição de fronteira de Robin em $x = a$ e o mesma condição de fronteira de Robin em $x = b$.

9. (a) Mostre que a condição $f(x)f'(x)\Big|_a^b \leq 0$ é válido para qualquer função $f(x)$ que satisfaz Dirichlet, Neumann ou condições de contorno periódicas.

   (b) Mostre que também é válido para as condições de fronteira de Robin desde que as constantes a_0 e a_L sejam positivos.

10. Prove a primeira identidade de Green: Para cada par de funções $f(x)$, $g(x)$ em (a, b),
$$\int_a^b f''(x) g(x)\, dx = -\int_a^b f'(x) g'(x)\, dx + f' g\Big|_a^b.$$

11. Use a primeira identidade de Green para provar o Teorema 3. (Dica: Substitua $f(x) = X(x) = g(x)$, uma autofunção real.)