

Séries de Fourier

Os Coeficientes

No estudo dos problemas de valores iniciais e de fronteira encontramos séries de Fourier de vários tipos. Um deles é a série de senos de Fourier

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in (0, \ell). \quad (1)$$

O primeiro problema que abordamos é tentar encontrar os coeficientes A_n se ϕ é uma função dada. A observação chave é que as funções senos têm a propriedade

$$\int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{\ell}{2} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (2)$$

m e n sendo inteiros positivos. Isso pode ser verificado diretamente pela integração.

Verificação de (2). Para o caso $m \neq n$, vamos usar a identidade trigonométrica

$$\sin a \sin b = [\cos(a - b) - \cos(a + b)]/2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{\ell} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{\ell} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\ell}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{\ell} - \frac{\ell}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{\ell} \right] \Big|_0^\ell \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $m = n$, usamos a identidade $\sin^2 a = [1 - \cos 2a]/2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx &= \int_0^\ell \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2m\pi x}{\ell} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\ell}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{\ell} \right] \Big|_0^\ell \\ &= \frac{\ell}{2}. \end{aligned}$$

Vamos fixar m , multiplicar (1) por $\sin(m\pi x/\ell)$ e integrar a série resultante termo a termo para obter

$$\begin{aligned}\int_0^\ell \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx &= \int_0^\ell \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\ell A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx \\ &= \int_0^\ell A_m \sin^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx \\ &= A_m \frac{\ell}{2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$A_m = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \phi(x) \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Vamos considerar agora o caso da série de cossenos de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad x \in (0, \ell). \quad (4)$$

A observação chave agora é que as funções cossenos têm a propriedade

$$\int_0^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \frac{\ell}{2} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (5)$$

m e n sendo inteiros positivos. Isso pode ser verificado diretamente por integração. Para o caso $m \neq n$, valem a identidade trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)].$$

e para $m = n$ usamos

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}[1 + \cos 2a].$$

Exatamente pelo mesmo método acima, trocando seno por cosseno, obtemos

$$\int_0^{\ell} \phi(x) \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx = A_m \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{m\pi x}{\ell} dx = A_m \frac{\ell}{2}.$$

se $m \neq 0$. Para o caso $m = 0$, temos

$$\int_0^{\ell} \phi(x) \cdot 1 dx = \frac{1}{2} A_0 \int_0^{\ell} 1 dx = A_0 \frac{\ell}{2}.$$

Portanto,

$$A_m = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \phi(x) \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

[Esta é a razão para colocar $\frac{1}{2}$ na frente do termo constante em (4).]

Série de Fourier Completa

A série de Fourier completa, ou simplesmente a série de Fourier, de $\phi(x)$ no intervalo $-\ell < x < \ell$, é definido como

$$\phi(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (7)$$

Observamos que agora o intervalo é $(-\ell, \ell)$ e as funções $1, \cos(n\pi x/\ell), \sin(n\pi x/\ell), n = 1, 2, \dots$, satisfazem

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = 0 \text{ para todo } n, m$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} dx = 0 \text{ para } n \neq m$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} dx = 0 \text{ para } n \neq m$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \int_{-\ell}^{\ell} 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Também calculamos as integrais dos quadrados

$$\int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = l = \int_{-l}^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \quad \text{e} \quad \int_{-l}^l 1^2 dx = 2l.$$

Portanto, o mesmo procedimento funcionará para encontrar os coeficientes A_n e B_n , os quais são dados pelas fórmulas

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Observe que essas fórmulas não são exatamente as mesmas que (3) e (6).

Exemplo 1. Seja $\phi(x) = 1$ no intervalo $[0, \ell]$. Ela tem uma série de senos de Fourier com coeficientes

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = -\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^\ell \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

Assim, $A_n = 4/n\pi$ se n é ímpar e $A_n = 0$ se n é par. Assim,

$$1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{\ell} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{\ell} + \dots \right), \quad \text{para } x \in (0, \ell).$$

Exemplo 2. Seja $\phi(x) = 1$ no intervalo $[0, \ell]$. Ela tem uma série de cossenos de Fourier com coeficientes

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^\ell = 0 \text{ para } n \neq 0.$$

Portanto, há apenas um coeficiente diferente de zero, ou seja, aquele para $n = 0$. A série cosseno de Fourier é, portanto, trivial:

$$1 = 1 + 0 \cos \frac{\pi x}{\ell} + 0 \cos \frac{2\pi x}{\ell} + \dots, \quad \text{para } x \in [0, \ell].$$

Exemplo 3. Seja $\phi(x) = x$ no intervalo $(0, \ell)$. Sua série de senos de Fourier tem os coeficientes

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \left[-\frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] \Big|_0^\ell \\ &= -\frac{2\ell}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \sin n\pi \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\ell}{n\pi}. \end{aligned}$$

Assim, em $(0, \ell)$, temos

$$x = \frac{2\ell}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\ell} - \dots \right). \quad (10)$$

Exemplo 4. Seja $\phi(x) = x$ no intervalo $[0, \ell]$. Sua série de cossenos de Fourier tem os coeficientes

$$A_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \, dx = \frac{1}{\ell} x^2 \Big|_0^{\ell} = \ell,$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \left[\frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{2\ell}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right] \Big|_0^{\ell} \\ &= \frac{2\ell}{n\pi} \sin n\pi + \frac{2\ell}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \frac{2\ell}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \\ &= \frac{-4\ell}{n^2\pi^2} \text{ para } n \text{ ímpar, e } 0 \text{ para } n \text{ par.} \end{aligned}$$

Assim, em $(0, \ell)$, temos

$$x = \frac{\ell}{2} - \frac{4\ell}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{\ell} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{\ell} + \dots \right). \quad (11)$$

Exemplo 5. Seja $\phi(x) = x$ no intervalo $[-\ell, \ell]$. Sua série de Fourier completa tem os coeficientes

$$A_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} x \, dx = \frac{1}{\ell} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\ell}^{\ell} = 0,$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} x \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \left[\frac{x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{\ell}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right] \Big|_{-\ell}^{\ell} \\ &= \frac{\ell}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx = \left[\frac{-x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{\ell}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right] \Big|_{-\ell}^{\ell} \\ &= \frac{-\ell}{n\pi} \cos n\pi - \frac{-(-\ell)}{n\pi} \cos(-n\pi) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\ell}{n\pi}. \end{aligned}$$

Isso nos dá exatamente a mesma série (10) no Exemplo 3, exceto pelo fato de ser válida em $(-\ell, \ell)$, o que não é um resultado surpreendente porque ambos os lados de (10) são ímpares.

Exemplo 6. Resolva o problema

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\u(x, 0) &= x(\pi - x), & u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi.\end{aligned}$$

Resolução. Sabemos que $u(x, t)$ tem a expansão

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nct + B_n \sin nct) \sin nx.$$

Derivando com respeito a t ,

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} nc (-A_n \sin nct + B_n \cos nct) \sin nx.$$

Tomando $t = 0$, temos

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} nc B_n \sin nx$$

e assim $B_n = 0$ para todo n .

Fazendo $t = 0$ na expansão de $u(x, t)$, obtemos

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x(\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} (\pi - 2x) \, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(\pi - 2x) \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^2} (-2) \, dx \right] \\ &= -\frac{2}{\pi n^3} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) \\ &= \frac{8}{\pi n^3} \text{ para } n \text{ ímpar, e } 0 \text{ para } n \text{ par.} \end{aligned}$$

Portanto, a solução é

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos((2n-1)ct) \sin((2n-1)x).$$

Funções pares, ímpares e periódicas

Os conceitos de paridade e periodicidade estão intimamente relacionados com os tipos de séries de Fourier.

Definição. Diz-se que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função par se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$ e que é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

A definição presume que A tem a propriedade de simetria:

$$x \in A \Rightarrow -x \in A.$$

Os conjuntos \mathbb{R} , $[-\ell, \ell]$ com $\ell > 0$, \mathbb{Z} , por exemplo, têm essa propriedade.

A função $\sin x$ e a função $f(x) = x^3$ definidas em \mathbb{R} são ímpares.
A função $\cos x$ e a função $f(x) = |x|$ definidas em \mathbb{R} são pares.

Proposição.

1. A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.
2. A produto de duas funções pares é uma função par. A produto de duas funções ímpares é uma função par.
3. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.
4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx.$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função ímpar que é integrável em qualquer intervalo limitado. Então

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = 0.$$

Definição. Diz-se que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica se existe um número $p > 0$ tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo $x \in A$. O menor $p > 0$ que satisfaz esta propriedade é chamado de período fundamental de f .

A definição presume que A satisfaz

$$x \in A \Rightarrow x \pm p \in A.$$

Os conjuntos \mathbb{R} , $p\mathbb{Z} = \{pn; n \in \mathbb{Z}\}$, por exemplo, têm essa propriedade.

Exemplo.

1. As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ são periódicas de período 2π .
2. A função $f(x) = x - [x]$ é periódica e tem período 1, onde $[x]$ denota o maior inteiro menor ou igual a x .

Se uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica com período p , então $f(x + np) = f(x)$ para todo $x \in A$ e todo $n = 1, 2, 3, \dots$, ou seja, múltiplo inteiro de um período é período.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período p e $c > 0$, então a função g dada por $g(x) = f(cx)$ é periódica e tem período p/c . Por exemplo, a função $g(x) = \cos(2\pi x)$ é periódica e tem período 1.

A soma de duas funções de período p é uma função de período p . Por exemplo, a função $\cos(mx) + \sin(2mx)$ é a soma de funções de período fundamental $2\pi/m$ e $2\pi/2m = \pi/m$, respectivamente, e portanto tem período $2\pi/m$ (o maior dos dois).

Se uma função ϕ está definida apenas em um intervalo de comprimento p , ela pode ser estendida para uma função de período p .

A situação que nos interessa para a série de Fourier é a de uma função definida no intervalo $(-l, l)$. Sua extensão periódica é

$$\phi_{per}(x) = \phi(x - 2lm), \quad \text{para } -l + 2lm < x < l + 2lm$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. Esta definição não especifica o valor da extensão periódica nas extremidades $x = l + 2lm$. De fato, a extensão tem saltos nesses pontos, a menos que os limites laterais sejam iguais: $\phi(l-) = \phi(-l+)$ (Figura 1).

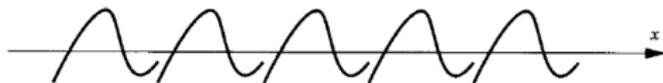


Figure: 1

Como cada termo da série de Fourier completa (7) tem período 2ℓ , sua soma (se convergir) é uma função que também tem período 2ℓ . Portanto, a série completa de Fourier pode ser considerada como uma expansão de uma função arbitrária no intervalo $(-\ell, \ell)$ ou como uma expansão de uma função periódica de período 2ℓ definida em toda a reta $(-\infty, \infty)$.

Dada qualquer função $\phi(x)$ definida no intervalo $(0, \ell)$, a extensão par de $\phi(x)$ é definida como

$$\phi_{par}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{para } 0 < x < \ell \\ \phi(-x) & \text{para } -\ell < x < 0. \end{cases}$$

A extensão ímpar de $\phi(x)$ é definida como

$$\phi_{impar}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{para } 0 < x < \ell \\ -\phi(-x) & \text{para } -\ell < x < 0. \\ 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Séries de Fourier e Condições de Fronteira

Dada uma série de senos de Fourier, cada um de seus termos, $\sin(n\pi x/\ell)$, é uma função ímpar. Portanto, sua soma (se convergir) também deve ser ímpar. Além disso, cada um de seus termos tem período 2ℓ , de modo que o mesmo deve ser verdade para sua soma. Portanto, a série de senos de Fourier pode ser considerada como uma expansão de uma função arbitrária que é ímpar, tem período 2ℓ e definida em toda a reta.

Da mesma forma, como todas as funções cosseno são pares, a série de cossenos de Fourier pode ser considerado como uma expansão de uma função arbitrária que é par, tem período 2ℓ definida em toda a reta.

Pelo que já vimos, esses conceitos têm a seguinte relação com as condições de fronteira:

- ▶ $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$: Condições de fronteira de Dirichlet correspondem à extensão ímpar.
- ▶ $u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0$: Condições de fronteira de Neumann correspondem à extensão par.
- ▶ $u(\ell, t) = u(-\ell, t)$, $u_x(\ell, t) = u_x(-\ell, t)$: Condições de fronteira periódicas (Exercício 4 da Lista 6) corresponde à extensão periódica.

Orthogonalidade e Séries de Fourier

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções contínuas, definimos

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Proposição. (\cdot, \cdot) assim definido é um produto interno em $C([a, b])$, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $(f, f) \geq 0, \forall f \in C([a, b])$.
- (ii) $(f, f) = 0 \iff f \equiv 0$.
- (iii) $(\alpha f + g, h) = \alpha(f, h) + (g, h), \forall f, g \in C([a, b]), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- (iv) $(f, g) = (g, f), \forall f, g \in C([a, b])$.

Dizemos que $f, g \in C([a, b])$ são ortogonais se $(f, g) = 0$.

A observação chave em cada caso discutido na aula anterior é que toda autofunção é ortogonal a todas as outras autofunções. Vamos entender porque isso ocorre.

Estamos estudando o operador $-d^2/dx^2$ com condições de contorno (ou Dirichlet ou Neumann ou etc). Sejam X_1 e X_2 duas autofunções diferentes. Assim.

$$-X_1'' = \lambda_1 X_1 \quad \text{e} \quad -X_2'' = \lambda_2 X_2, \quad (12)$$

onde ambas as funções satisfazem as mesmas condições de fronteira. Vamos supor que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Considere a seguinte identidade chave:

$$-X_1'' X_2 + X_1 X_2'' = (-X_1' X_2 + X_1 X_2)'$$

Após integrar esta identidade, obtemos

$$\int_a^b (-X_1'' X_2 + X_1 X_2'') dx = (-X_1' X_2 + X_1 X_2') \Big|_a^b \quad (13)$$

A identidade (13) é chamada a *segunda identidade de Green*.

Se no lado esquerdo de (13) usamos as equações diferenciais (12) e no lado direito usamos as condições de fronteira obtemos as seguintes conclusões:

Caso 1: Dirichlet. $X_1(a) = X_1(b) = X_2(a) = X_2(b) = 0$. Assim, o lado direito de (13) é zero.

Caso 2: Neumann. $X_1'(a) = X_1'(b) = X_2'(a) = X_2'(b) = 0$. Assim, o lado direito de (13) é zero.

Caso 3: Periódica $X_i(a) = X_i(b)$, $X_i'(a) = X_i'(b)$ para $i = 1, 2$. Assim, o lado direito de (13) é zero.

Caso 4: Robin. Novamente o lado direito de (13) é zero (veja Lista 8).

Nos quatro casos, o lado esquerdo de (13) se reduz a

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b X_1(x)X_2(x) dx = 0. \quad (14)$$

Portanto, X_1 e X_2 são ortogonais se $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Devemos observar que o lado direito de (13) nem sempre é zero. Por exemplo, considere as condições de fronteira:

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = 2X'(b).$$

Então o lado direito (13) é $X_1'(b)X_2(b) - X_1(b)X_2'(b)$, o qual não necessariamente é zero. Então o método nem sempre funciona; as condições de contorno devem ter uma certa simetria.

Condições de fronteira simétricas

Então agora vamos qualquer par de condições de fronteira

$$\alpha_1 X(a) + \beta_1 X(b) + \gamma_1 X'(a) + \delta_1 X'(b) = 0 \quad (15)$$

$$\alpha_2 X(a) + \beta_2 X(b) + \gamma_2 X'(a) + \delta_2 X'(b) = 0$$

envolvendo oito constantes reais. [Cada um dos exemplos acima corresponde a uma escolha dessas constantes.] Esse conjunto de condições de fronteira é chamado **simétrico** se

$$(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \Big|_a^b = 0 \quad (16)$$

para qualquer par de funções $f(x)$ e $g(x)$, ambas satisfazendo o par de condições de contorno (15).

A segunda identidade de Green (13) então implica o seguinte teorema. Por uma autofunção agora entendemos uma solução não trivial de $-X'' = \lambda X$ que satisfaz (15).

Teorema 1. Se o conjunto de condições de fronteira é simétrico, quaisquer duas autofunções associadas a autovalores distintos são ortogonais. Portanto, se qualquer função é expandida em uma série dessas autofunções, os coeficientes estão determinados.

Demonstração. Sejam duas autofunções diferentes X_1 e X_2 com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Escrevemos a segunda identidade de Green (13). Como as condições de fronteira são simétricas, o lado direito de (13) é zero. Usando as equações (12), lado esquerdo de (13) escreve-se como (14), o que prova a ortogonalidade.

Se X_n são as autofunções associadas aos autovalores λ_n e se

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

é uma série convergente, então, por ortogonalidade,

$$(\phi, X_m) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n, X_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (X_n, X_m) = A_m (X_m, X_m).$$

Assim,

$$A_m = \frac{(\phi, X_m)}{(X_m, X_m)}.$$

Duas palavras de cautela. Primeiro, até agora evitamos todas as questões de convergência. Em segundo lugar, se houver duas autofunções, digamos X_1 e X_2 associadas ao mesmo autovalor, então elas não precisam ser ortogonais. Mas se elas não são ortogonais, o processo de Gram-Schmidt de ortogonalização fornece autofunções ortogonais (ver lista de exercícios). Por exemplo, no caso de condições de contorno periódicas as duas autofunções $\sin(n\pi x/\ell)$ e $\cos(n\pi x/\ell)$ são ortogonais em $(-\ell, \ell)$, embora tenham o mesmo autovalor $(n\pi/\ell)^2$. Mas as duas autofunções $\sin(n\pi x/\ell)$ e $[\cos(n\pi x/\ell) + \sin(n\pi x/\ell)]$ não são ortogonais.

Autovalores Complexos

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções de valor complexo, definimos o produto interno em (a, b) como

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

Agora suponha que tenhamos as condições de contorno (15) com oito reais constantes. Elas são chamados simétricos (ou hermitianos) se

$$f'(x) \overline{g(x)} - f(x) \overline{g'(x)} \Big|_a^b = 0$$

para toda f, g satisfazendo as condições de fronteira. Então o Teorema 1 é verdadeiro para funções complexas sem nenhuma alteração. Mas também temos o seguinte fato importante.

Teorema 2. Se o conjunto de condições de fronteira é simétrico, todos os autovalores são números reais. Além disso, todas as autofunções podem ser escolhidas para serem de valor real.

Demonstração. Seja λ um autovalor, possivelmente complexo. Seja X sua autofunção, também possivelmente complexa. Então X satisfaz $-X'' = \lambda X$ e as condições de fronteira simétricas.

Tomemos o conjugado complexo desta equação; assim $-\overline{X''} = \overline{\lambda X}$ mais condições de fronteira. Então $\overline{\lambda}$ também é um autovalor.

Agora use a segunda identidade de Green com as funções X e \overline{X} .

Assim,

$$\int_a^b (-X''\overline{X} + X\overline{X''}) dx = (-X'\overline{X} + X\overline{X}') \Big|_a^b = 0,$$

pois as condições de fronteira são simétricas. Assim,

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b X\overline{X} dx = 0.$$

Mas $X\overline{X} = |X|^2 \geq 0$ e X não é a função nula. Assim a integral não pode se anular. Portanto, $\lambda = \overline{\lambda}$, e portanto λ é real.

Em seguida, vamos reconsiderar o mesmo problema $-X'' = \lambda X$ junto com (15), sabendo que λ é real. Se $X(x)$ é complexo, escrevemos como $X(x) = Y(x) + iZ(x)$, onde $Y(x)$ e $Z(x)$ são reais. Então $-Y'' - iZ'' = \lambda Y + i\lambda Z$. Portanto $-Y'' = \lambda Y$ e $-Z'' = \lambda Z$. As condições de contorno ainda valem para Y e Z porque as oito constantes em (15) são reais. Assim, o autovalor real λ tem as autofunções reais Y e Z . Isso completa a prova de Teorema 2.

Autovalores Negativos

Vimos que a maioria dos autovalores é positiva. A questão é se todos eles são positivos. Aqui está uma condição suficiente.

Teorema 3. Assuma as mesmas condições do Teorema 1. Se

$$f(x)f'(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \leq 0 \quad (17)$$

para todas as funções de valor real $f(x)$ que satisfazem as condições de fronteira, então não há autovalor negativo.

Este teorema é provado na lista de exercícios. É fácil verificar que (17) é válido para Dirichlet, Neumann e condições de contorno periódicas, de modo que em nestes casos não existem autovalores negativos (veja lista de exercícios). No entanto, pode não ser válido para certas condições de Robin.

Convergência da série de Fourier

Estudaremos três teoremas de convergência. Para nos convencer de que os teoremas da convergência são mais do que um exercício sofisticado, mencionamos alguns fatos curiosos:

1. Existe uma função integrável $f(x)$ cuja série de Fourier diverge em cada ponto x ;
2. Existe uma função contínua cuja série de Fourier diverge em muitos pontos.

Para uma demonstração desses fatos veja [Zy]¹.

Para o que segue, precisamos introduzir várias noções de convergência.

¹[Zy] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 3rd ed., 2003.

TRÊS NOÇÕES DE CONVERGÊNCIA

Definição 1. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto I de \mathbb{R} , **converge pontualmente** para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $x \in I$, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$. Isto é, para cada $x \in I$, temos

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Isto é, para cada $x \in I$, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro \mathcal{N} , dependendo de ϵ e eventualmente de x , tal que

$$N \geq \mathcal{N} \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| < \epsilon.$$

Definição 2. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um subconjunto I de \mathbb{R} , **converge uniformemente** para uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se,

$$\sup_{x \in I} \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro \mathcal{N} , dependendo somente de ϵ , tal que

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right| < \epsilon$$

para todo $x \in I$ e $N \geq \mathcal{N}$.

Em vez de recorrer à definição para estabelecer a convergência uniforme de uma série de funções, o seguinte critério é frequentemente utilizado.

Teorema (Teste de Weierstrass). Seja $|f_n(x)| \leq a_n$, para todo $n \geq 1$ e $x \in I$. Se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente e uniformemente em I .

Definição 3. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funções $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas em um intervalo $[a, b]$, **converge em média quadrática** (ou L^2) para uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n(x) \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty.$$

Observe que a convergência uniforme é mais forte do que a convergência simples e convergência L^2 .

Considere o problema de autovalor

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (18)$$

com condições de fronteira simétricas.

Teorema 1. Os autovalores de (18) formam uma sequência de números reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ que tende para ∞ .

Uma demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada no Capítulo 11 de [S]² ou no Capítulo 7 de [CL]³.

Podemos admitir que as autofunções X_n são funções a valores reais e que são ortogonais duas a duas. Por exemplo, se k autofunções linearmente independentes correspondem ao mesmo autovalor λ_n , então o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt garante que as autofunções podem ser escolhidas ortogonais duas a duas.

²[S] W. Strauss, Partial Differential Equations: an introduction, John Wiley & Sons, New York, 1992.

³[CL] E. Coddington and E. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

Desse modo, a sequência pode ser numerada de modo que λ_n seja repetido k vezes e os autovalores podem ser listados como

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$$

com as autofunções correspondentes X_1, X_2, X_3, \dots ortogonais duas a duas.

Para qualquer função $f(x)$ definida em (a, b) , sua série de Fourier é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n, \quad \text{onde } A_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}. \quad (19)$$

Observamos que (19) é mais geral que a série de Fourier clássica (completa, seno e cosseno). Um exemplo disso é (18) com condição de Robin com autovalor negativo $\lambda = -\gamma^2$ e correspondente autofunção $X(x) = \cosh \gamma x + \frac{a_0}{\gamma} \sinh \gamma x$.

Teoremas de Convergência

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer. Considere a série de Fourier para o problema (18) com qualquer condição de fronteira simétrica.

Teorema 2. (Convergência Uniforme)

A série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n$ de f converge uniformemente para f em $[a, b]$ desde que

- (i) f , f' e f'' existem e são contínuas em $[a, b]$ e
- (ii) f satisfaz a condição de fronteira dada.

O Teorema 2 nos garante a convergência uniforme desde que as condições em f e suas derivadas sejam atendidas. Para a série clássica de Fourier (completa, seno e cosseno), não é necessário que $f''(x)$ exista porque a periodicidade de f supri a falta desta hipótese.

Teorema 3. (Convergência em média quadrática) A série de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n$ de f converge em média quadrática para f em (a, b) desde que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

O Teorema 3 nos garante um certo tipo de convergência sob uma hipótese muito fraca na função f . Poderíamos até usar a integral de Lebesgue mais geral aqui em vez da integral padrão (Riemann) encontrada nos cursos de cálculo.

O Teorema 3 é o mais fácil de aplicar porque $f'(x)$ não precisa existir e a própria f nem precisa ser contínua.

A seguir, apresentamos um teorema intermediário em relação às hipóteses sobre f . Requer mais duas definições.

Definição. Uma função f tem uma descontinuidade de primeira espécie (salto) num ponto $x = c$ se os limites laterais $f(c+)$ e $f(c-)$ existem, mas são diferentes. [Não importa o que $f(c)$ venha a ser ou mesmo se $f(c)$ está definido ou não.]

Definição. Uma função f é chamada contínua por partes em um intervalo $[a, b]$ se for contínua, exceto eventualmente num número finito de pontos, e tiver descontinuidades de primeira espécie nesses pontos. Outra maneira de dizer isso é que em todos os pontos do intervalo (incluindo as extremidades) existem os limites laterais $f(c+)$ e $f(c-)$ e são iguais, exceto eventualmente em um número finito de pontos.

Teorema 4. (Convergência pontual da série de Fourier clássica)

- (i) A série de Fourier clássica (completa, seno ou cosseno) converge para f pontualmente em (a, b) desde que f seja uma função contínua em $[a, b]$ e f' é contínua por partes em $[a, b]$.
- (ii) De forma geral, se f for apenas contínua por partes em $[a, b]$ e f' também é contínua por partes em $[a, b]$, então a série de Fourier clássica (completa, seno ou cosseno) converge em todo ponto x . A soma da série de Fourier clássica é

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)], \quad \forall a < x < b.$$

A soma é $\frac{1}{2}[f_{\text{ext}}(x+) + f_{\text{ext}}(x-)]$ para todo $-\infty < x < \infty$, onde $f_{\text{ext}}(x)$ é a função extensão de f (periódica, periódica ímpar ou periódica par, respectivamente).

Assim, numa descontinuidade de primeira espécie, a série converge para a média dos limites laterais à direita e à esquerda. No caso da série de Fourier de seno (ou cosseno) em $(0, \ell)$, a função extensão $f_{ext}(x)$ é a função ímpar (ou par) do período 2ℓ . Para a série completa em $(-\ell, \ell)$, $f_{ext}(x)$ é a extensão periódica. A extensão é contínua por partes com uma derivada contínua por partes em $(-\infty, \infty)$.

É conveniente reescrever o Teorema 4 diretamente para funções que já estão definidas em toda a reta. Considerando as extensões periódicas, pares e ímpares das funções, o Teorema 4 é equivalente ao seguinte resultado:

Teorema 4_∞. Se f é uma função periódica de período 2ℓ para a qual f e f' são contínuas por partes, então a série completa de Fourier clássica converge para $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$, ou seja,

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

para todo $-\infty < x < \infty$.

Observação. A série de Fourier de uma função contínua mas não diferenciável f não é garantida convergir pontualmente. Pelo Teorema 3, ela deve convergir para f no sentido L^2 . Se quisermos ter certeza de sua convergência pontual, temos que saber algo sobre sua derivada $f'(x)$.

Exemplo. A série de senos de Fourier de $f(x) = 1$ em $[0, \pi]$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \quad (20)$$

Pelo Teorema 4, item (i), essa série converge pontualmente para $f(x) = 1$ para cada $x \in (0, \pi)$, isto é,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x, \quad x \in (0, \pi). \quad (21)$$

mas esta convergência não é uniforme no intervalo $[0, \pi]$, pois a série converge para 0 em $x = 0$ e $x = \pi$, mas $f(x) = 1$ nesses pontos. Note que condição (ii) do Teorema 2 não é satisfeita: as condições de contorno são de Dirichlet e a função $f(x)$ não se anula nos extremos.

Podemos aproveitar este exemplo para ver que séries de Fourier nem sempre podem ser derivadas termo a termo. Veja o caso de (21), o lado esquerdo tem derivada igual a zero. No lado direito, obteríamos a série

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x,$$

que é divergente pois o termo geral não tende para 0 com $n \rightarrow \infty$.

A diferenciação de uma série de Fourier é um assunto delicado. Mas a integração termo a termo não é delicada e é geralmente válida (ver Exercício 4 da Lista 9).

A Teoria L^2

O produto interno de funções f, g definidas em (a, b) é definido por

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Caso as funções tenham valor real, simplesmente ignoramos o conjugado complexo.

A norma L^2 de f é definida como

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

A métrica L^2 é definida por

$$\|f - g\| = \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

O Teorema 3 pode ser reescrito nos seguintes termos:

Se X_n são autofunções associadas a um conjunto de condições de fronteira simétricas e se $\|f\| < \infty$, então

$$\|f - \sum_{n=1}^N A_n X_n\| \rightarrow 0, \quad \text{com } N \rightarrow \infty.$$

Teorema 5 (Aproximação de mínimos quadrados). Seja $\{X_n\}$ qualquer conjunto ortogonal de funções. Seja f uma função tal que $\|f\| < \infty$. Seja N um inteiro positivo fixo. Entre todas as escolhas possíveis de N constantes c_1, c_2, \dots, c_N , a escolha que minimiza

$$\|f - \sum_{n=1}^N c_n X_n\|$$

é

$$c_1 = A_1, c_2 = A_2, \dots, c_N = A_N,$$

isto é, os coeficientes de Fourier de f .

Demonstração. Denote o erro por

$$E_N = \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n X_n \right\|^2 = \left(f - \sum_{n=1}^N c_n X_n, f - \sum_{n=1}^N c_n X_n \right).$$

Usando a linearidade do produto interno, temos

$$E_N = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n (f, X_n) + \sum_{m,n=1}^N c_n c_m (X_n, X_m)$$

Usando a ortogonalidade das funções X_n , obtemos

$$E_n = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^N c_n (f, X_n) + \sum_{n=1}^N c_n^2 \|X_n\|^2.$$

Completando o quadrado, temos

$$E_N = \sum_{n=1}^N \|X_n\|^2 \left(c_n - \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} \right)^2 + \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \frac{(f, X_n)^2}{\|X_n\|^2}. \quad (22)$$

Agora os coeficientes c_n aparecem em apenas no termo entre parênteses. A expressão é portanto a menor se o termo entre parênteses for nulo, ou seja, se

$$c_n = \frac{(f, X_n)}{\|X_n\|^2} = A_n.$$

Observação. O complemento do quadrado tem outras consequências. Escolhendo os coeficiente c_n como sendo os coeficientes de Fourier A_n na expressão (22), o erro E_N torna-se

$$0 \leq E_N = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \frac{(f, X_n)^2}{\|X_n\|^2} = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N A_n^2 \|X_n\|^2. \quad (23)$$

Como esta diferença é não negativa, temos

$$\sum_{n=1}^N A_n^2 \int_a^b |X_n|^2 dx \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

No lado esquerdo temos as somas parciais de uma série de termos positivos, as quais são limitadas pelo termo à direita. Portanto, a série correspondente converge e sua soma satisfaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b |X_n|^2 dx \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Isto é conhecido como **desigualdade de Bessel** e é válido desde que $\|f\| < \infty$.

Teorema 6. A série de Fourier de f converge em média quadrada para f se e somente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \int_a^b |X_n|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx. \quad (24)$$

Demonstração. Por definição, a série de Fourier de f converge em média quadrada para f se e somente se $E_N \rightarrow 0$ com $N \rightarrow \infty$.

Mas por (23) isto significa que $\sum_{n=1}^N A_n^2 \|X_n\|^2 \rightarrow \|f\|^2$ com $N \rightarrow \infty$, o qual por sua vez é (24).

A identidade (24) é conhecida como **identidade de Parseval**.

Definição. Um conjunto ortogonal infinito de funções $\{X_1, X_2, \dots\}$ é chamado **completo** se a identidade de Parseval (24) for verdadeira para toda f com $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$.

O Teorema 3 afirma que o conjunto de autofunções que satisfazem condições de fronteira simétricas é sempre completo. Assim temos a seguinte conclusão.

Corolário 1. Se $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$, então a identidade de Parseval é válida.

Exemplo. A série de senos de Fourier de $f(x) = 1$ em $[0, \pi]$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x.$$

Pela identidade de Parseval,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n-1)\pi} \right)^2 \int_0^{\pi} \sin^2(2n-1)x \, dx = \int_0^{\pi} 1^2 \, dx,$$

isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n-1)\pi} \right)^2 \frac{\pi}{2} = \pi,$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Demonstração do Teorema 4

Vamos demonstrar a convergência pontual da série de Fourier completa na reta toda (Teorema 4_∞). Primeiramente supomos $f \in C^1(\mathbb{R})$ periódica de período 2ℓ . Para facilitar a redação, vamos considerar $\ell = \pi$. A série de Fourier completa de f é

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

com os coeficientes

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \, dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny \, dy \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A N -ésima soma parcial da série é

$$S_N(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

Queremos mostrar $S_N(x) \rightarrow f(x)$ com $N \rightarrow \infty$, para cada x fixado.

Passo 1. Inserir as fórmulas dos coeficientes na soma parcial e reorganizar os termos:

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^N (\cos ny \cos nx + \sin ny \sin nx) \right] f(y) \frac{dy}{2\pi}$$

Dentro dos parênteses está o cosseno de uma diferença de ângulos, então podemos resumir a fórmula como

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} k_N(x - y) f(y) \frac{dy}{2\pi} \quad (25)$$

onde

$$K_N(\theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos n\theta$$

Passo 2. Estudar as propriedades da função K_N , que é conhecida como *núcleo de Dirichlet*. Note que K_N tem período 2π e que

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1.$$

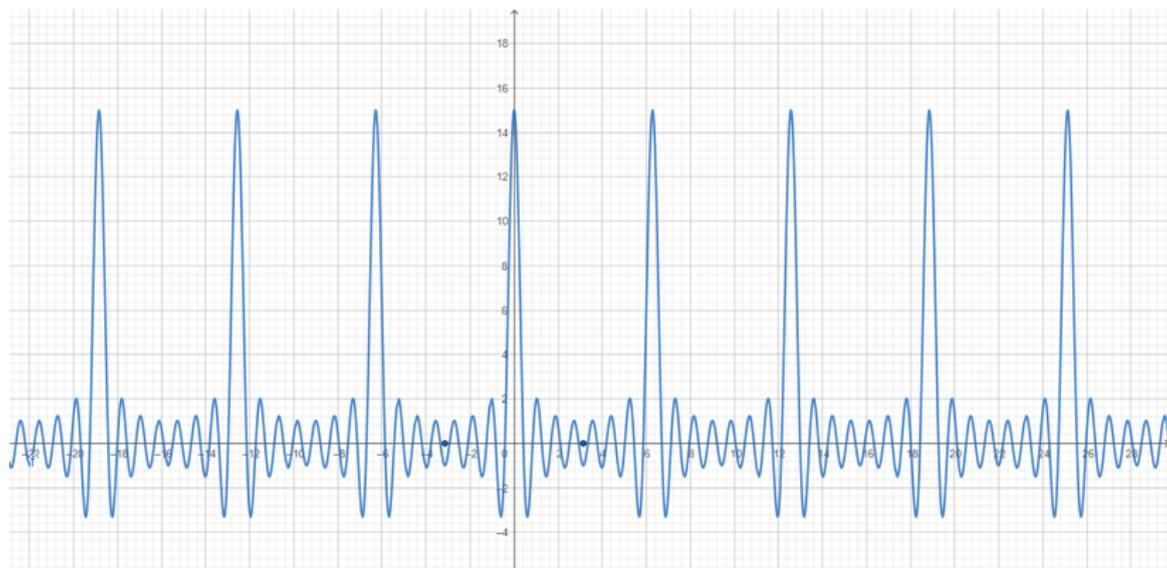


Figure: 2. Esboço do gráfico de $K_N(\theta)$

É um fato notável que a série para K_N pode ser somada. De fato,

$$K_N(\theta) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \quad (26)$$

para $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. Para verificar esta fórmula, usaremos a fórmula de Moivre,

$$K_N(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}$$

Como esta é a soma parcial de uma série geométrica cujo primeiro termo é $e^{-iN\theta}$, o raio é $e^{i\theta}$ e o último termo é $e^{iN\theta}$, segue que

$$\begin{aligned} K_N(\theta) &= \frac{e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}i\theta} [e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}]}{e^{-\frac{1}{2}i\theta} [1 - e^{i\theta}]} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{-e^{\frac{1}{2}i\theta} + e^{-\frac{1}{2}i\theta}} \\ &= \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}. \end{aligned}$$

Passo 3. Combinar (25) e (26). Tomando $\theta = y - x$ em (25) e usando que K_N é uma função par, obtemos

$$S_N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) f(x + \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

O intervalo de integração deveria ser $[x - \pi, x + \pi]$, mas como K_N e f têm período 2π , qualquer intervalo de comprimento 2π serve.

Usando agora a fórmula (26), temos

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} K_N(\theta) [f(x + \theta) - f(x)] \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \frac{d\theta}{2\pi} \end{aligned} \quad (27)$$

onde

$$g(\theta) = \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

Passo 4. Tudo o que temos a mostrar é que a integral (27) tende a 0 com $N \rightarrow \infty$. Para tanto, notemos que as funções

$$\phi_N(\theta) := \sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \quad (N = 1, 2, \dots)$$

formam um conjunto ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$. Portanto, se $\|g\| < \infty$, segue da desigualdade de Bessel que

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{|(g, \phi_N)|^2}{\|\phi_N\|^2} \leq \|g\|^2 < \infty.$$

Por um cálculo direto, $\|\phi_N\|^2 = \pi$. Se $\|g\| < \infty$, esta série é convergente e assim $(g, \phi_N) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, isto é, a integral em (27) tende a zero.

O passo final é mostrar que $\|g\| < \infty$. Temos,

$$\|g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[f(x + \theta) - f(x)]^2}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}$$

Como o numerador de $g(\theta)$ é contínuo, o único ponto que devemos analisar é em $\theta = 0$, pois o seno se anula nesse ponto. Pelo Primeiro limite fundamental, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x + \theta) - f(x)}{\theta} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = 2f'(x).$$

Portanto, $g(\theta)$ tem extensão contínua em $[-\pi, \pi]$ de modo que $\|g\| < \infty$. Isso completa a prova de convergência pontual da série de Fourier de qualquer função de classe C^1 .

Prova do Teorema 4 para funções descontínuas

Se a função periódica f é apenas contínua por partes e f' também é contínua por partes em \mathbb{R} , queremos provar que a série de Fourier converge e que sua soma é $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

A prova começa como antes. No entanto, modificamos o terceiro passo, substituindo (27) por

$$\begin{aligned}
S_N(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \int_0^\pi K_N(\theta)[f(x+\theta) - f(x+)] \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\quad + \int_{-\pi}^0 K_N(\theta)[f(x+\theta) - f(x-)] \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^\pi g_+(\theta) \sin[(N + \frac{1}{2})\theta] d\theta \\
&\quad + \int_{-\pi}^0 g_-(\theta) \sin[(N + \frac{1}{2})\theta] d\theta,
\end{aligned}$$

onde, por (26),

$$g_\pm(\theta) = \frac{f(x+\theta) - f(x\pm)}{\sin \frac{1}{2}\theta}$$

O quarto passo é notar que as funções $\sin[(N + \frac{1}{2})\theta]$, $N = 1, 2, \dots$, formam um conjunto ortogonal no intervalo $(-\pi, 0)$, bem como no intervalo $(0, \pi)$. Usando a desigualdade de Bessel, ambas as integrais acima tendem a zero com $N \rightarrow \infty$ desde que $\int_{-\pi}^0 |g_-(\theta)|^2 d\theta$ e $\int_0^\pi |g_+(\theta)|^2 d\theta$ sejam finitas.

Esse é o quinto passo. A única razão possível para a divergência dessas integrais viria do anulamento de $\sin \frac{1}{2}\theta$ em $\theta = 0$. Agora o limite lateral $g_+(\theta)$ é

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} g_+(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(x + \theta) - f(x+)}{\theta} \frac{\theta}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} = 2f'(x+),$$

se x é um ponto onde existe a derivada lateral $f'(x+)$. Se $f'(x+)$ não existe, então f ainda é diferenciável nos pontos próximos. Pelo teorema do valor médio,

$$\frac{f(x + \theta) - f(x+)}{\theta} = f'(\theta^*)$$

para algum ponto θ^* entre x e $x + \theta$. Como a derivada é limitada, segue que $[f(x + \theta) - f(x+)]/\theta$ é limitada também para θ pequeno e positivo. Então $g_+(\theta)$ é limitada e a integral $\int_0^\pi |g_+(\theta)|^2 d\theta$ é finita. Argumento análogo se aplica para $g_-(\theta)$. Isto completa a prova do Teorema 4.

Demonstração da Convergência Uniforme

Faremos agora a demonstração do Teorema 2 da convergência uniforme das séries de Fourier para o caso da série de Fourier clássica. Seja f uma função periódica de período 2ℓ , contínua, com derivada f' contínua.

A ideia é aplicar o teste de Weierstrass. Como

$$\left| A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right| \leq |A_n|, \quad \left| B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right| \leq |B_n|,$$

devemos mostrar que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \tag{28}$$

converge.

Usando integração por partes, concluímos que

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_{-\ell}^{\ell} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f'(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \end{aligned}$$

de modo que

$$A_n = -\frac{\ell}{n\pi} B'_n$$

onde B'_n denota o coeficiente de Fourier de senos da função f' .

Usando integração por partes e a periodicidade de f , concluímos

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_{-\ell}^{\ell} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \end{aligned}$$

de modo que

$$B_n = \frac{\ell}{n\pi} A'_n$$

onde A'_n denota o coeficiente de Fourier de cossenos da função f' .

Portanto, a soma parcial de ordem k da série (28) é

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k (|A_n| + |B_n|) &= \frac{\ell}{\pi} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} (|A'_n| + |B'_n|) \\ &\leq \frac{\ell}{\pi} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left[\sum_{n=1}^k (|A'_n| + |B'_n|)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\ell}{\pi} \left(\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left[\sum_{n=1}^k (|A'_n|^2 + |B'_n|^2) \right]^{1/2}\end{aligned}$$

onde usamos na primeira inequação a desigualdade de Schwarz para vetores de \mathbb{R}^k (veja Lista 8) e na segunda inequação a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$.

Portanto, a série (28) é majorada por

$$\frac{\sqrt{2}\ell}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|A'_n|^2 + |B'_n|^2) \right]^{1/2},$$

onde ambas as séries convergem, a segunda é convergente devido à desigualdade de Bessel para a derivada f' , mais especificamente,

$$\frac{|A'_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|A'_n|^2 + |B'_n|^2) \leq \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f'(x)|^2 dx.$$

Portanto, pelo teste de Weierstrass a série de Fourier de f converge absolutamente e uniformemente. Já sabemos pelo Teorema 4_∞ que a soma série de Fourier de f é de fato $f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, a série de Fourier de f converge uniformemente para f .

Observação. A demonstração continua válida se f é contínua mas f' é contínua por partes. Um exemplo é a função $f(x) = |x|$, para $|x| \leq \pi$, e periódica de período 2π .

Solução do PVIF para a Equação do Calor

Teorema 7. Seja $f : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(\ell) = 0$ e tal que a derivada f' exista e seja contínua por partes em $[0, \ell]$. Então a função $u(x, t)$ definida por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / \ell^2} \sin \frac{n \pi x}{\ell}, \quad (29)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n \pi x}{\ell} dx, \quad (30)$$

é contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$, possui derivadas parciais u_t e u_{xx} em $(0, \ell) \times (0, \infty)$ e satisfaz

$$\begin{cases} u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t), & t > 0, \quad 0 < x < \ell, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases} \quad (31)$$

Demonstração. Os coeficientes c_n definidos em (30) são os coeficientes de Fourier da função f , dada em $[0, \ell]$, e estendida para o resto de \mathbb{R} de modo a ser ímpar e periódica de período 2ℓ . Sendo $f(0) = f(\ell) = 0$, a extensão é contínua e como f' é contínua por partes em $[0, \ell]$, a derivada primeira da extensão é contínua por partes. Pelo Teorema 4,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = u(x, 0)$$

para todo $x \in [0, \ell]$, provando que u satisfaz a terceira identidade em (31).

Para provar que u é contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$, notemos que a série (29) é majorada por $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, $\forall (x, t) \in [0, \ell] \times [0, \infty)$.

Usando integração por partes

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \\&= -\frac{2}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \\&= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} f'(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$c_n = \frac{\ell}{n\pi} d_n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

onde os d_n são os coeficientes de Fourier de f' estendida como uma função par e periódica de período 2ℓ . Então,

$$|c_n| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\ell}{n\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} d_n^2$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{\ell^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty, \quad (32)$$

onde se usou a desigualdade de Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \leq \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |f'(x)|^2 dx$, para concluir que a última série em (32) é convergente.

Agora, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / \ell^2} \cos \frac{n \pi x}{\ell}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 k t / \ell^2} \sin \frac{n \pi x}{\ell},$$

convergem uniformemente em qualquer retângulo $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ contido em $(0, \ell) \times (0, \infty)$, pois elas são majoradas, resp., pelas

séries $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\alpha n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\alpha n^2}$, onde $\alpha = \pi^2 k t_1 / \ell^2$, cujas

convergências seguem da aplicação do teste da razão.

Portanto, basta aplicar o teste de Weierstrass para concluir a convergência das duas séries de funções acima.

Agora lembramos o seguinte resultado: “Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ uma série de funções continuamente diferenciáveis em um retângulo $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$, tal que ela convirja para uma função $u(x, t)$ e tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t)$, obtida por derivação termo a termo, convirja uniformemente para uma função $v(x, t)$. Então, $\frac{\partial u}{\partial x}$ existe e é igual a v .”

Usando esse resultado, obtemos

$$u_t(x, t) = -\frac{\pi^2 k}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 kt / \ell^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$u_{xx}(x, t) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n e^{-n^2 \pi^2 kt / \ell^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

o que mostra que u é solução da equação $u_t = ku_{xx}$ em $(0, \ell) \times (0, \infty)$ e a prova do Teorema 7 está completa.

Solução do PVIF para a Equação das Ondas

Teorema 8. Suponha que $f, g : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ são tais que f, f', f'', g, g' são contínuas e f''' e g'' são contínuas por partes, $f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$. Então a função $u(x, t)$ definida por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (33)$$

onde

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

é contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$, é de classe C^2 em $(0, \ell) \times (0, \infty)$ e satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = cu_{xx}(x, t), & t > 0, 0 < x < \ell, \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases} \quad (34)$$

Demonstração. Sendo f e g de classe C^1 em $[0, \ell]$ e $f(0) = f(\ell) = g(0) = g(\ell) = 0$, as funções f e g podem ser estendidas continuamente a toda reta de modo a serem ímpares e periódicas de período 2ℓ . Pelo Teorema 4, as seguintes igualdades ocorrem:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad \forall x \in [0, \ell]$$

com

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \quad \frac{n\pi c}{\ell} b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

de onde obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

Para provar que u definida por (33) é contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$, basta mostrar a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$, pois ela majora a série (33). Integração por partes três vezes e as hipóteses $f(0) = f(\ell) = f''(0) = f''(\ell) = 0$ implicam que

$$a_n = -\frac{2\ell^2}{n^3\pi^3} \int_0^\ell f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (35)$$

e integração por partes duas vezes e $g(0) = g(\ell) = 0$ implicam que

$$\frac{n\pi c}{\ell} b_n = -\frac{2\ell}{n^2\pi^2} \int_0^\ell g''(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (36)$$

De (35) e (36), segue que

$$|a_n| \leq \frac{C}{n^3} \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{\tilde{C}}{n^3}$$

onde C e \tilde{C} são constantes positivas.

Logo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|)$ convergem, o que mostra que u é contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$ e de classe C^1 em $(0, \ell) \times (0, \infty)$. E mostra também que as derivadas parciais de primeira ordem de u podem ser obtidas derivando-se (33) termo a termo:

$$u_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{n\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + b_n \frac{n\pi}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right] \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (37)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi ct}{\ell} + b_n \frac{n\pi c}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell} \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (38)$$

Novamente de (35) e (36), obtemos

$$|a_n| \leq \frac{D}{n^3} |c_n| \quad \text{e} \quad |b_n| \leq \frac{\tilde{D}}{n^3} |d_n|, \quad (39)$$

onde c_n e d_n são respectivamente os coeficientes de Fourier de f''' e g''' e D e \tilde{D} são constantes positivas.

Usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ em (39), temos

$$n^2|a_n| \leq \frac{D}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n|^2 \right)$$

$$n^2|b_n| \leq \frac{\tilde{D}}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |d_n|^2 \right)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2|a_n| + n^2|b_n|) \leq \frac{D + \tilde{D}}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \right) \quad (40)$$

As duas últimas séries em (40) convergem em virtude da desigualdade de Bessel. Logo, a série à esquerda em (40) converge, o que implica que u é de classe C^2 em $(0, \ell) \times (0, \infty)$ e as derivadas parciais de segunda ordem de u podem ser obtidas derivando (37) e (38) termo a termo para obter:

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos \frac{n\pi ct}{l} - b_n \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi ct}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l},$$

(41)

$$u_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \left(\frac{n\pi c}{l} \right)^2 \cos \frac{n\pi ct}{l} - \left(b_n \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi ct}{l} \right] \sin \frac{n\pi x}{l},$$

(42)

o que mostra que $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ para todo $0 < x < l$ e $t > 0$. E, assim, concluímos a demonstração do Teorema 8.

Comentários sobre as hipóteses do Teorema 8

Uma função $u : [0, \ell] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada solução clássica do PVFI (34) se

- (i) ela for contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$ e de classe C^2 em $(0, \ell) \times (0, \infty)$, com u_t contínua em $[0, \ell] \times [0, \infty)$;
- (ii) ela satisfaz as condições iniciais e de fronteira;
- (iii) ela satisfaz a equação da onda.

O Teorema 6 dá condições suficientes para a existência de solução clássica do PVIF (34). Entretanto as hipóteses feitas para conseguir isso são muito fortes, pois muito se pede em termos de diferenciabilidade dos dados iniciais.

Para citar um exemplo, não podemos aplicar o Teorema 8 para o problema da corda dedilhada. Para tratar desse problema e de outros problemas de interesse físico há necessidade de ampliar o conceito de solução. Os interessados podem encontrar uma introdução do conceito de solução generalizada na Seção 5.11 do livro [D. G. de Figueredo, Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018].