1. Considere o problema de autovalor com condição de Robin:

$$X'' + \lambda X = 0$$
$$X'(0) - a_0 X(0) = 0,$$
$$X'(\ell) + a_\ell X(\ell) = 0.$$

(a) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor se e somente se

$$a_0 + a_\ell = -a_0 a_\ell \ell.$$

(b) Encontre as autofunções correspondentes ao autovalor nulo. (Dica: primeiro resolva a EDO para $X(x)$. As soluções não são senos ou cossenos.)

2. Considere o problema de autovalor de Robin. Se $a_0 < 0$, $a_\ell < 0$ e $-a_0 - a_\ell < a_0 a_\ell \ell$, mostre que existem dois autovalores negativos. Este caso pode ser chamado "absorção substancial em ambas as extremidades." (Dica: mostre que a curva racional $y = -(a_0 + a_\ell)\gamma/(\gamma^2 + a_0 a_\ell)$ tem um único máximo e cruza a reta $y = 1$ em dois pontos. Deduza que ela cruza a curva $y = \tanh \gamma\ell$ em dois pontos.)

3. No Exercício 2 (absorção substancial em ambas as extremidades) mostre graficamente que existe um número infinito de autovalores positivos. Mostrar graficamente que satisfazem (36) e (37) do slide da aula *Problemas de Valores Iniciais e de Fronteira.*

4. Se $a_0 = a_\ell = a$ no problema de Robin, mostre que:

(a) Não há autovalores negativos se $a \geq 0$, há um se $-2/\ell < a < 0$, e há dois se $a < -2/\ell$.

(b) Zero é um autovalor se e somente se $a = 0$ ou $a = -2/\ell$.

5. Considere novamente as condições de Robin em ambas as extremidades para a_0 e a_ℓ arbitrários.

(a) No plano $a_0 a_\ell$, esboce a hipérbole $a_0 + a_\ell = -a_0 a_\ell \ell$. Indicar as assíntotas. Para (a_0, a_ℓ) nesta hipérbole, zero é um autovalor, de acordo com o Exercício 1(a).

(b) Mostre que a hipérbole separa todo o plano em três regiões, dependendo se há dois, um ou nenhum autovalores negativos.

6. Considere a equação de difusão em $(0, \ell)$ com as condições de contorno de Robin

$$u_x(0,t) - a_0 u(0,t) = 0 \text{ e } u_x(\ell,t) + a_\ell u(\ell,t) = 0.$$

Se $a_0 > 0$ e $a_\ell > 0$, use o método da energia para mostrar que os pontos extremos $x = 0$ e $x = \ell$ contribuem para a diminuição da energia $\int_0^\ell u^2(x,t)dx$. (Isto é interpretado como parte da energia é perdida na fronteira, por isso chamamos as condições de fronteira irradiante ou dissipativo.)

7. (a) Prove que a energia (total) é conservada para a equação das ondas com condições de contorno de Dirichlet, onde a energia é definida como

$$E = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(c^{-2}u_t^2 + u_x^2\right) dx.$$

(b) Faça o mesmo para a condição de contorno de Neumann.

(c) Para a condição de contorno de Robin, mostre que

$$E_R = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(c^{-2}u_t^2 + u_x^2\right) dx + \frac{1}{2}a_\ell[u(\ell,t)]^2 + \frac{1}{2}a_0[u(0,t)]^2$$

é conservado. Assim, embora a energia total E_R ainda seja constante, parte da energia interna é "perdida" na fronteira se a_0 e a_ℓ são positivos e é "ganha" na fronteira se a_0 e a_ℓ forem negativos.