

Laboratório de Mecânica

4300254

Rolamento em um plano inclinado

Renato F. Jardim

2024

Introdução: os Experimentos Precursores de Galileu com Planos Inclinados

Com o auxílio de equipamentos que hoje poderíamos chamar de simples ou mesmo rudimentares, Galileu, um engenhoso experimentador, revolucionou os princípios científicos básicos postulados por Aristóteles e mantidos firmemente pelos estudiosos da Alta Idade Média (século V ao século X) e do Renascimento (século XIV até XVII). *Um de seus experimentos mais importantes foi o experimento do plano inclinado para investigar a taxa de variação da velocidade de objetos em queda.* Galileu usou como plano inclinado uma tábua simples com uma ranhura na qual ele rolou pequenas esferas (bolas) de mármore, para examinar as ideias aristotélicas sobre o movimento. O experimento do plano inclinado de Galileu alterou radicalmente essas ideias ao se concentrar na *aceleração*, um estágio do movimento ignorado por Aristóteles e pela maioria de seus seguidores. O experimento está descrito no livro de Galileu intitulado *Discourses on Two New Sciences* (1638).

Conta a história documentada que no ano de 1583, enquanto assistia à missa em uma catedral de Pisa, Galileu nos seus dezenove (19) anos observou o movimento oscilante de um candelabro, colocado em movimento por uma brisa passageira ou talvez pela pessoa que acabara de acendê-lo. Ficou claro para ele que, se não fosse perturbado, os balanços consecutivos se tornariam cada vez menores, mas quanto tempo levaria para cada um desses “balanços” consecutivos ocorrer? Usando seu pulso para medir o tempo (relógios relativamente precisos ainda não existiam naquela época), ficou surpreso ao descobrir que, embora o “tamanho” de cada balanço diminuísse, o tempo para que ocorresse permanecia praticamente o mesmo: ele certamente ficou intrigado.

Embora seja incerto se esta história é verdadeira, as primeiras notas de Galileu sobre um pêndulo oscilante (um bom modelo para um candelabro oscilante) ocorreram no final de 1588 ou início de 1589, ainda que ele não tenha iniciado os experimentos até o ano de 1602. Talvez a hipótese mais provável seja que Galileu notou esse tipo de movimento pendular e repetitivo enquanto ajudava seu pai, um compositor e músico, a realizar seus próprios experimentos envolvendo a tensão de cordas musicais em 1588 ou 1589. Os experimentos em questão envolviam a suspensão de pesos variados de uma corda, dedilhando-a e observando o tom do som resultante. Claramente, pequenos movimentos oscilantes do peso preso ocorreriam como um artefato de tais experimentos. Depois disso, Galileu provavelmente se lembrou de ter visto anteriormente o mesmo movimento no balanço de um candelabro de catedral sem nunca ter considerado sua física. De fato, é isso que ele faz Sagredo escrever em *Discourses on Two New Sciences*:

“Mil vezes prestei atenção às oscilações, em particular às de lamparinas de algumas igrejas penduradas em cordas muito longas, inadvertidamente acionadas por alguém, mas o máximo que consegui de tais observações foi a improbabilidade da opinião de muitos; quem diria que movimentos desse tipo são mantidos e continuados pelo meio, isto é, o ar. Parece-me que o ar deve ter um julgamento requintado e pouco mais para fazer, consumindo horas e horas empurrando para frente e para trás um peso pendurado com tanta regularidade.”

O movimento pendular gerou um bocado de novas investigações experimentais de Galileu e ele provavelmente iniciou algumas investigações iniciais com objetos rolando em um plano inclinado no ano de 1602. Entretanto e depois, desencorajado pela possibilidade de obter resultados úteis e confiáveis, alterou seus esforços retornou ao estudo do movimento pendular. ***No entanto, no ano de 1604 Galileu desenvolveu uma maneira de medir a taxa de alteração temporal da velocidade (aceleração) de um objeto***

rolando em um plano inclinado. Os experimentos que se seguiram forneceram a Galileu resultados experimentais bastante precisos, que ele então utilizou para conectar os movimentos de queda livre e de um pêndulo oscilante.

Galileu não havia se contentado em simplesmente ter descoberto que dois objetos de massas diferentes em queda livre caem ao mesmo tempo. Em vez disso, seu objetivo era determinar quanto tempo levaria para um objeto em queda atingir uma certa altura acima do solo. Para ser mais preciso, ele estava procurando por uma expressão matemática, ao contrário dos conceitos de Aristóteles, que relacionasse altura e tempo. Infelizmente, ao tentar resolver esse problema, Galileu teve alguns desafios experimentais a serem superados.

Embora existissem na época meios muito precisos para as medições de distância e peso de um dado material, a afirmação não pode ser verdadeira para **medir o tempo**. Foi necessário então que Galileu inventasse um “cronômetro”. O cronômetro de Galileu consistia em um recipiente cheio de água com um furo no fundo. Como a água escorria do fundo do recipiente a uma taxa constante (de aproximadamente três (03) onças fluidas (~ 90 ml) por segundo), Galileu observou uma maneira precisa de medir o tempo. Ele descreve seu projeto e garante sua precisão em *Discourses on Two New Sciences* (mais uma vez, através de Salviati):

“Para a medição do tempo, foi usado um grande recipiente com água colocado em posição elevada; ao fundo deste vaso foi soldado um tubo de pequeno diâmetro dando um fino jato de água, que recolhíamos num pequeno copo durante o tempo de cada descida, ... Saldo; as diferenças e proporções desses pesos nos deram as diferenças e proporções dos tempos, e isso com tal precisão que, embora a operação fosse repetida muitas e muitas vezes, não havia discrepância apreciável nos resultados.”

No entanto, mesmo com seu relógio de água, um objeto em queda livre constituía um movimento muito rápido para Galileu medir com grande precisão. Em vez disso, Galileu desenvolveu uma maneira de “desacelerar” a queda livre, preservando os principais resultados físicos que buscava e permitindo que ele fizesse medições precisas com o relógio de água. O projeto de investigação de Galileu foi muito simples e elegante: fazer o objeto rolar através de um plano inclinado.

O objeto agora “caindo ou rolando” com velocidade mais lenta permitiu que Galileu realizasse medições mais precisas com seu relógio de água. Ele estava convencido de que, quer um objeto role até uma certa altura (através de um plano inclinado) ou caia livremente até a mesma altura exata, a física subjacente seria a mesma. Portanto, ele antecipou que a relação matemática para calcular o tempo para atingir a altura, embora não exatamente a mesma, ainda era muito semelhante para ambas as rotas.

Afinal, a única diferença entre um objeto em queda livre até uma determinada altura e um que está rolando até a mesma altura é que o último se move tanto na direção vertical (altura) quanto na horizontal (comprimento), enquanto o primeiro tem apenas uma direção vertical, pois o objeto simplesmente “cai” diretamente no solo.

A história e a literatura pertinente também relatam que Galileu inicialmente usou outro meio de cronometrar objetos rolando no plano inclinado. Para relatar esse ponto é necessário informar que tanto o pai quanto o irmão de Galileu eram músicos, e o próprio Galileu era um competente praticante de alaúde (instrumento de cordas de origem árabe): talvez Galileu tenha feito uso de suas inclinações e habilidades musicais nessa oportunidade. A colocação de elásticos ou, no caso de Galileu, “trastes” de intestino suíno ao redor do plano inclinado teria causado um “som” cada vez que o objeto rolasse sobre cada um deles, permitindo uma demarcação temporal conveniente.

Ajustar os posicionamentos desses “trastes” de forma que o objeto alcance cada um deles no mesmo intervalo de tempo permitiria uma determinação precisa do tempo. A fim de definir tal posicionamento, Galileu teria iniciado o rolamento do objeto, ouvido o “dedilhar” de cada “traste” e, então, usando seu senso interno de ritmo (talvez ele batesse o pé ou cantasse uma marcha), fizesse os ajustes necessários na posição até que cada traste representasse um intervalo de tempo definido.



Figura 1 – Foto de uma montagem experimental muito similar àquela utilizada por Galileu para a investigação do movimento de corpos em um plano inclinado.

Agora bastava medir a distância da posição inicial da bola até cada um dos trastes, algo que Galileu podia determinar com muita precisão. Dado que os “*relógios*” da época não eram apropriados para medir intervalos de tempo menores que um (01) segundo com exatidão, esse método provavelmente seria mais preciso.



Figura 2 – Foto ilustrativa de um plano inclinado recentemente construída e similar à mostrada na Figura 1.

Dito isso, é importante ressaltar que o experimento do plano inclinado de Galileu, iniciado no ano 1602 e completado a partir de 1604, foi fundamental para os novos conceitos de movimento na época. A montagem experimental consistiu em um pedaço de moldura de madeira, com cerca de 12 côvados (cerca de 7,5 m) de comprimento, meio côvado (cerca de 30 cm) de largura e três larguras de dedo (cerca de 5 cm) de espessura, como mostrado nas Figuras 1 e 2. Em sua borda foi cortado um canal com pouco mais de um dedo de largura. Tendo feito este sulco muito reto, liso e polido, ele foi forrado com pergaminho, o mais liso e polido possível. Nesse sulco foram roladas ao longo dele esferas feitas de mármore e com alta dureza, lisas e com geometria muito próxima de uma esfera rígida.

Esse tipo de experimento já foi reproduzido diversas vezes e em diversos países. Em uma dessas construções o procedimento foi aplainar em um ângulo de 45° uma borda em dois de 16 pés e dois por quatro, que quando pregados formavam uma ranhura, como mostrado na Figura 2. Essas ranhuras foram lixadas e lubrificadas com o objetivo de criar um efeito de baixo atrito, em analogia com

o pergaminho de Galileu. Em vez de uma pequena bola ou esfera de mármore, foi utilizado um rolamento de esferas de aço inoxidável com diâmetros de três quartos de polegada (~ 20 cm). Foi adicionada uma peça de metal ao final do plano inclinado, contra a qual a bola batia no final de cada corrida, para tornar intervalos de tempos mais precisos. Os intervalos de tempo foram então medidos com cronômetros similares aos usados na prática do experimento do pêndulo simples.

O Movimento de Rolamento

O movimento de rolamento é *aquela combinação* muito comum dos movimentos *rotacional e translacional* que vemos em muitos lugares e situações, todos os dias. Pense nas diferentes situações de rodas se movendo em um carro ao longo de uma rodovia, ou rodas de um avião pousando em uma pista, ou rodas de um explorador robótico em outro planeta. Compreender as forças e torques envolvidos no movimento de rolamento é um fator crucial em muitos tipos diferentes de situações.

Movimento de Rolamento sem Escorregar ou Deslizar

A humanidade vem observando o movimento de “rolar sem escorregar ou rolar sem deslizar” desde a invenção da roda. Por exemplo, é possível observar a interação dos pneus de um carro e a superfície da estrada. Se o motorista “pisar fundo” no acelerador, de modo que os pneus girem sem que o carro se mova para a frente, deve haver atrito cinético entre as rodas e a superfície da estrada. Se o motorista “pisar fundo” no acelerador, mas de maneira um

pouco mais lenta, fazendo com que o carro avance, os pneus rodam sem escorregar. É surpreendente para a maioria das pessoas que, de fato, a parte inferior da roda esteja em repouso em relação ao solo, indicando que deve haver atrito estático entre os pneus e a superfície da estrada. Na Figura 3 a bicicleta está em movimento com a ciclista em pé. Os pneus têm contato com a superfície da estrada e, embora estejam rolando, as partes inferiores dos pneus se deformam levemente, não escorregam e ficam em repouso em relação à superfície da estrada por um intervalo de tempo pequeno, mas mensurável. Deve haver atrito estático entre o pneu e a superfície da estrada para que isso aconteça.



Figura 3 - (a) A bicicleta avança e seus pneus não escorregam. A parte inferior do pneu ligeiramente deformado fica em repouso em relação à superfície da estrada por um período de tempo mensurável. (b) Esta imagem mostra que a parte superior de uma roda rolante parece borrada por seu movimento, mas a parte inferior da roda está instantaneamente em repouso.

Para avaliar o rolamento sem escorregar, primeiro é necessário derivar as variáveis lineares de velocidade e aceleração do centro de massa **CM** da roda em termos das variáveis angulares que descrevem o movimento da roda. A situação física é mostrada na Figura 4.

Em primeiro lugar é importante salientar que em certas condições, o corpo rola pelo plano sem deslizar. Nesse caso, a linha de contato entre o cilindro e o plano forma o eixo instantâneo de rotação, isto é, são os pontos do cilindro encostados ao plano que

têm velocidade nula. Esse conjunto de pontos do corpo que está **parado** em relação ao plano, porém, altera de posição continuamente em relação ao plano, por isso esse entender que ele não precisa ser fixo no espaço, somente tem que ser capaz de simplificar a descrição da rotação, de modo que a velocidade \mathbf{v} de cada ponto do corpo a uma distância \mathbf{r} do eixo siga a lei simples $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{r}$ com uma mesma velocidade angular no instante considerado, independente da variação de $\boldsymbol{\omega}$ com o tempo. Além disso, **parado** não significa sem aceleração e os pontos que constituem o eixo instantâneo de rotação têm aceleração na direção perpendicular ao plano, de modo que aos poucos o antigo eixo se afasta do plano e outra linha do cilindro encosta no plano, para formar o novo eixo instantâneo de rotação.

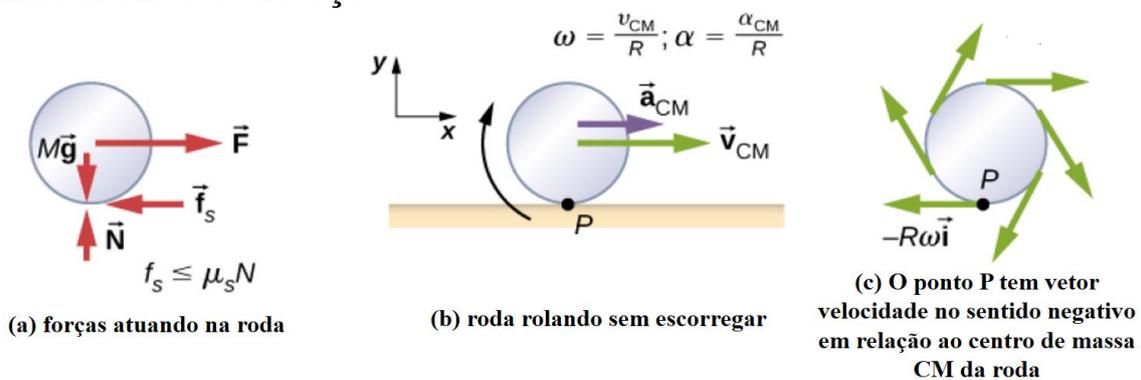


Figura 4 - (a) Uma roda é puxada por uma superfície horizontal por uma força \vec{F} . A força de atrito estático \vec{f}_S , $|\vec{f}_S| \leq \mu_s N$ é grande o suficiente

para evitar que ela escorregue. (b) Os vetores lineares velocidade e aceleração do centro de massa e as expressões relevantes para $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$. O ponto P está em repouso em relação à superfície. (c) Em relação ao referencial do centro de massa (CM), o ponto P tem velocidade linear $-\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}\hat{i}$.

Na Figura 4(a), é possível observar os vetores de força envolvidos na prevenção do deslizamento da roda. Em (b), o ponto P que toca a superfície está em repouso em relação à superfície. Em relação ao centro de massa CM , o ponto P tem velocidade $-\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}\hat{i}$ (note o sinal negativo em vermelho), onde R é o raio da roda e $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular ($\boldsymbol{\omega} = (v_{CM}/R)$) da roda em relação ao seu eixo. Como a roda está rolando, a velocidade de P em relação à superfície é sua velocidade em relação ao centro de massa CM

mais a velocidade do centro de massa em relação à superfície, ou seja

$$\overrightarrow{v_P} = -R\omega \hat{i} + v_{CM} \hat{i} \quad (1)$$

Como a velocidade de **P** em relação à superfície é essencialmente zero, $v_P = 0$, isso implica que

$$v_{CM} = R \omega \quad . \quad (2)$$

Assim, a velocidade do centro de massa da roda é dada pelo produto de seu raio **R** e a velocidade angular ω em torno de seu eixo de rotação ($v_{CM} = R\omega$). De fato, existe a correspondência da variável linear do lado esquerdo da Equação (2) com a variável angular do lado direito. Isso é feito abaixo para a aceleração linear.

Ao tomar a diferencial temporal no lado esquerdo da equação, é possível obter uma expressão para a aceleração linear a_{CM} do centro de massa. No lado direito da equação, **R** é uma constante e, como a *aceleração angular* $\alpha = d\omega/dt$, tem-se que

$$a_{CM} = R \alpha \quad . \quad (3)$$

Além disso, é possível encontrar a distância percorrida pela roda em termos de variáveis angulares consultando a Figura 5. À medida que a roda rola do ponto **A** ao ponto **B**, sua superfície externa é mapeada no solo exatamente pela distância percorrida, que é denominada de d_{CM} . É possível visualizar também na Figura

5 que o comprimento da superfície externa mapeada no solo é o comprimento do arco $R\theta$. Igualando as duas distâncias, obtém-se

$$d_{CM} = R \theta \quad . \quad (4)$$

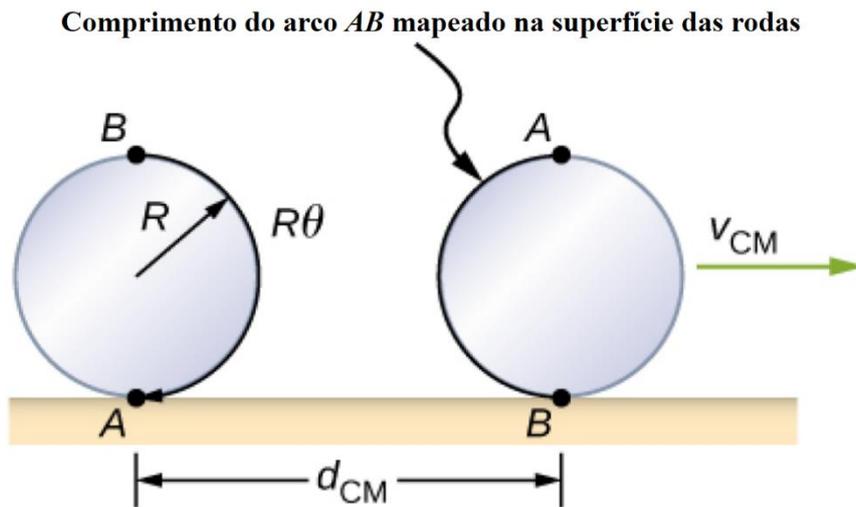


Figura 5 - À medida que a roda rola na superfície, o comprimento do arco $R\theta$ de A até B é mapeado na superfície, correspondendo à distância d_{CM} que o centro de massa se moveu.

Descendo em um Plano Inclinado

Vamos agora aplicar esses primeiros conceitos de rolamento ao movimento de um **cilindro sólido, maciço** que rola em um plano inclinado **sem escorregar**, partindo do repouso. O cilindro tem massa m e raio R . Pelo menos duas perguntas são de interesse aqui: (a) Qual é a aceleração adquirida pelo **cilindro sólido, maciço**? (b) Qual a condição física que o coeficiente de atrito estático μ_s deve satisfazer para que o cilindro não deslize?

Para avançar nesse ponto é necessário ter uma estratégia para responder as duas perguntas elaboradas acima. O primeiro passo é

desenhar um esboço e um diagrama de corpo livre e escolher um sistema de coordenadas, como mostrado na Figura 6. É conveniente escolher a coordenada x na direção para baixo do plano e y para cima, sendo esta última perpendicular ao plano. O segundo passo é identificar as forças envolvidas no sistema. Estas forças são a força normal N , a força da gravidade mg e a força devido ao atrito f_s . O terceiro passo é escrever as leis de Newton nas direções x e y e a lei de Newton para a rotação e, em seguida, resolver as relações matemáticas que determinam a aceleração e a força devida ao atrito.

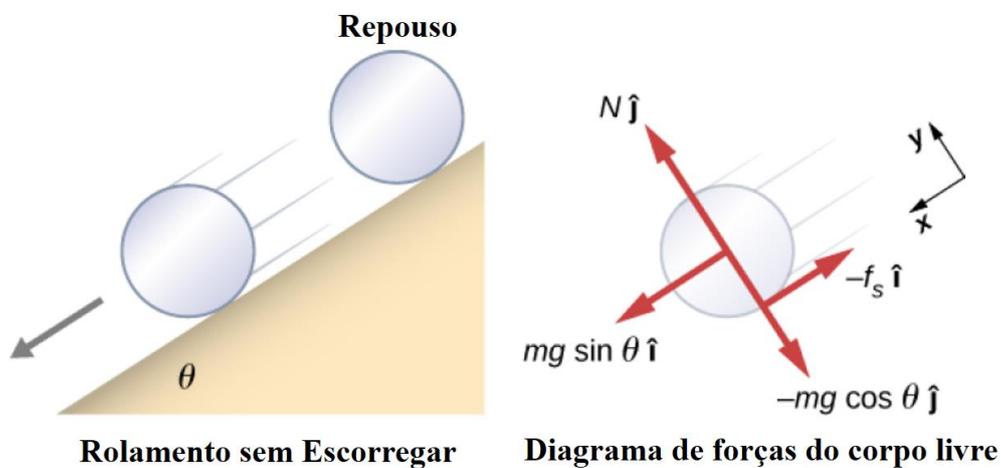


Figura 5 - Um cilindro maciço rolando em um plano inclinado sem escorregar a partir do repouso. O sistema de coordenadas tem x na direção para baixo do plano inclinado e y perpendicular ao plano. O diagrama do corpo livre é mostrado com a força normal, a força de atrito estático e as componentes do peso mg . O atrito faz com que o cilindro role pelo plano em vez de deslizar.

O diagrama do corpo livre e o esboço das forças atuantes na esfera são mostrados na Figura 5, incluindo a força normal, as componentes do peso e a força de atrito estático. Quase não há atrito suficiente para manter o cilindro rolando sem escorregar. Como não há deslizamento, a magnitude da força de atrito é menor ou igual a $\mu_s N$. Escrevendo as leis de Newton nas direções x e y , obtém-se

$$\sum F_x = m a_x ; \sum F_y = m a_y . \quad (6)$$

Substituindo a partir do diagrama do corpo livre,

$$mg \sin \theta - f_s = m(a_{CM})_x \quad (7)$$

$$N - mg \cos \theta = 0 \quad (8)$$

$$f_s \leq \mu_s N \quad , \quad (9)$$

é possível então resolver a aceleração linear, de translação do centro de massa a_{CM} a partir destas equações:

$$(a_{CM})_x = g (\sin \theta - \mu_s \cos \theta) . \quad (10)$$

No entanto, é conveniente expressar a aceleração linear em termos do momento de inércia. Para isso, a sugestão é escrever a segunda lei de Newton para rotação,

$$\sum \tau_{CM} = I_{CM} \alpha \quad (11)$$

onde τ_{CM} é o torque do centro de massa e I_{CM} seu momento de inércia. Os torques são calculados sobre o eixo através do centro de massa do cilindro. O único torque diferente de zero é fornecido pela força de atrito. Tem-se então que

$$f_s R = I_{CM} \alpha . \quad (12)$$

Finalmente, a aceleração linear está relacionada com a aceleração angular por

$$(a_{CM})_x = R \alpha . \quad (13)$$

Essas equações podem ser usadas para resolver a_{CM} , α e f_s em termos do momento de inércia I_{CM} , onde o subscrito x pode ser agora descartado. É possível então escrever a_{CM} em termos da componente vertical da gravidade e da força de atrito, fazendo as seguintes substituições.

$$a_{CM} = g \operatorname{sen} \theta - (f_s/m) \quad (14)$$

$$f_s = (I_{CM} \alpha / R) = (I_{CM} a_{CM} / R^2) . \quad (15)$$

E, das relações (14) e (15), obtém-se

$$\begin{aligned} a_{CM} &= g \operatorname{sen} \theta - (I_{CM} a_{CM} / m R^2) \\ &= (mg \operatorname{sen} \theta) / (m + (I_{CM}/R^2)) . \end{aligned} \quad (16)$$

Importante notar aqui que a Equação (16) indica que a aceleração do centro de massa a_{CM} é independente do coeficiente de fricção μ_s . Uma vez que o cilindro discutido aqui é sólido, homogêneo e maciço, de massa m e raio R , o momento de inércia do seu centro de massa é dado por

$$I_{CM} = (m R^2) / 2 \quad (17)$$

E a aceleração do centro de massa

$$\begin{aligned} a_{CM} &= (mg \operatorname{sen} \theta) / (m + (mR^2/2R^2)) \\ &= a_{CM} = (2/3) g \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$\alpha = (a_{CM} / R) = (2/(3R)) g \operatorname{sen} \theta \quad . \quad (19)$$

Importante salientar aqui que para o rolamento de um cilindro oco ou mesmo uma casca cilíndrica, onde os raios externo e interno são R e r , a aceleração angular do movimento difere pouco da equação (19) e é escrita como:

$$\alpha = (a_{CM} / R) = (1/(2R)) g \operatorname{sen} \theta \quad . \quad (20)$$

Agora o objetivo é retornar à questão (b) que motivou essa discussão, ou seja, qual a condição física que o coeficiente de atrito estático μ_s deve satisfazer para que o cilindro não deslize? Primeiro

é necessário lembrar que o escorregamento não ocorre, ou seja, $f_s < \mu_s N$. Resolvendo para a força de atrito (equação (15)),

$$f_s = (I_{CM} \alpha / R) = I_{CM} (a_{CM} / R^2) \\ = (I_{CM}/R^2) (mg \operatorname{sen} \theta / (m + (I_{CM}/R^2)))$$

$$f_s = (mg \operatorname{sen} \theta I_{CM}) / (mR^2 + I_{CM}) . \quad (21)$$

Substituindo esta expressão na condição de não escorregamento, e notando que $N = mg \operatorname{cos} \theta$, resulta em

$$(mg \operatorname{sen} \theta I_{CM}) / (mR^2 + I_{CM}) \leq \mu_s mg \operatorname{cos} \theta \quad (22)$$

ou ainda

$$\mu_s \geq \operatorname{tg} \theta / (1 + (mR^2 / I_{CM})) \quad (23)$$

Para um cilindro sólido e maciço, a equação (22) torna-se

$$\mu_s \geq \operatorname{tg} \theta / (1 + (2mR^2 / mR^2)) = (1/3) \operatorname{tg} \theta . \quad (24)$$

Uma vez que o momento de inércia I_{CM} para um cilindro sólido e maciço é dado por $I_{CM} = (1/2) mR^2$.

Da discussão feita cima é possível concluir que a aceleração linear é linearmente proporcional ao $\sin\theta$. Assim, quanto maior o ângulo de inclinação θ do plano inclinado, maior será a aceleração linear, como seria de esperar. A aceleração angular, entretanto, é linearmente proporcional a $\sin\theta$ e inversamente proporcional ao raio do cilindro R , como descrito na equação (19). Assim, quanto maior o raio R , menor será a aceleração angular.

Outra conclusão de interesse é que para que não ocorra deslizamento, o coeficiente de atrito estático μ_s deve satisfazer a relação $\mu_s \geq (1/3) \tan\theta$, ou seja, deve ser maior ou igual a $(1/3) \tan\theta$. Assim, quanto maior o ângulo de inclinação do plano inclinado θ , maior deve ser o coeficiente de atrito estático μ_s para evitar que o cilindro deslize.

Vale a pena repetir a equação (16) derivada neste exemplo para a aceleração de um objeto de geometria cilíndrica e maciça rolando sem escorregar:

$$a_{CM} = (mg \sin\theta) / (m + (I_{CM}/R^2)) .$$

Esta é uma equação muito útil para compreender essa situação física e para resolver problemas envolvendo rolamento sem escorregamento. Observe que a aceleração é menor do que aquela derivada para um objeto deslizando em um plano sem atrito e sem rotação do objeto. A aceleração também será diferente para dois cilindros girando com diferentes inércias rotacionais.

Movimento de Rolamento com Deslizamento

No caso do movimento de rolamento com deslizamento, é necessário usar o *coeficiente de atrito cinético* μ_K , que dá origem à *força de atrito cinético* f_K , pois o atrito estático não está presente. A situação é mostrada na Figura 6. No caso físico onde ocorre o escorregamento, $v_{CM} - R\omega \neq 0$, porque o ponto P da roda não está em repouso sobre a superfície, e $v_P \neq 0$. Por isso, $\omega \neq (v_{CM}/R)$, e $\alpha \neq (a_{CM}/R)$ (veja Figura 4 para estreita comparação).

Vamos então discutir essa situação física similarmente ao descrito acima, através de duas questões chave para uma compreensão do problema.

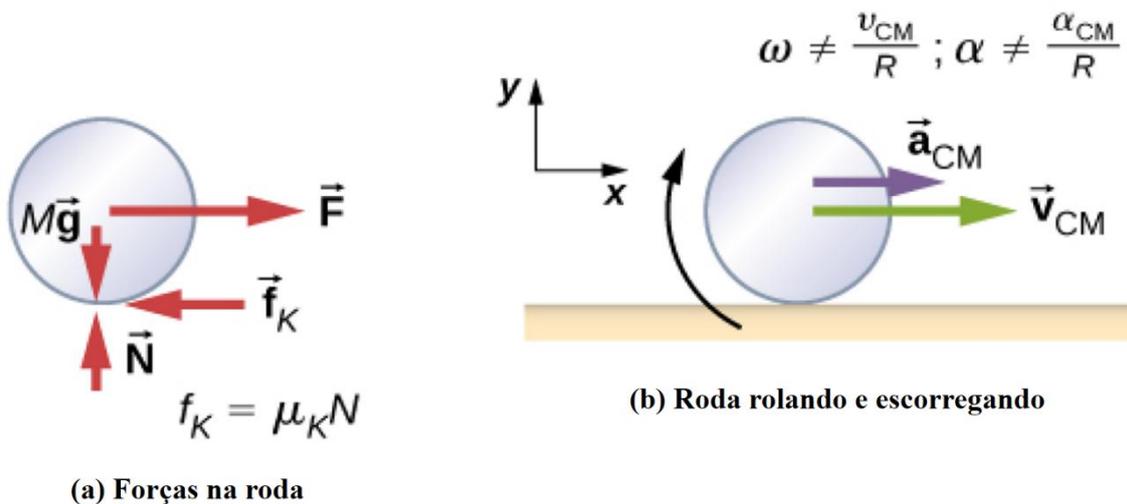


Figura 6 - (a) O atrito cinético surge entre a roda e a superfície porque a roda está escorregando. (b) As relações simples entre as variáveis lineares e angulares não são mais válidas.

Movimento de Rolamento em um Plano Inclinado com Deslizamento

A estratégia para avaliar esse problema tem início com um desenho esquemático da situação física experimentada pelo cilindro maciço. Sendo assim, vamos supor que um cilindro sólido, maciço rola para baixo em um plano inclinado a partir do repouso e sofre deslizamento, como mostrado na Figura 7. Esse cilindro tem massa m e raio R . As duas questões pertinentes para a compreensão e avaliação desse problema são: (a) Qual é sua aceleração linear? (b) Qual é sua aceleração angular em torno de um eixo que passa pelo centro de massa do cilindro?

Para iniciar essa discussão é necessário executar uma inspeção cuidadosa do diagrama de forças mostrado na Figura 7 para a situação do corpo livre. O diagrama de corpo livre é semelhante ao caso sem escorregamento mostrado na Figura 5, exceto pela força de atrito f_K , *que é de natureza cinética em vez de estática*. Aqui é importante utilizar a segunda lei de Newton para calcular a aceleração do cilindro na direção x e a mesma estratégia aplicada anteriormente, usando agora a segunda lei da rotação de Newton, para calcular a aceleração angular.

O diagrama de forças da Figura 7 indica que a soma das forças na direção y é zero. Logo, a força de atrito cinético é agora $f_K = \mu_K N = \mu_K mg \cos\theta$. Por outro lado, a segunda lei de Newton ao longo da direção x torna-se

$$\sum F_x = m a_x ;$$

$$mg \sin\theta - \mu_K mg \cos\theta = m (a_{CM})_x ,$$

ou ainda

$$(a_{CM})_x = g (\text{sen } \theta - \mu_K \text{cos } \theta) \quad . \quad (24)$$

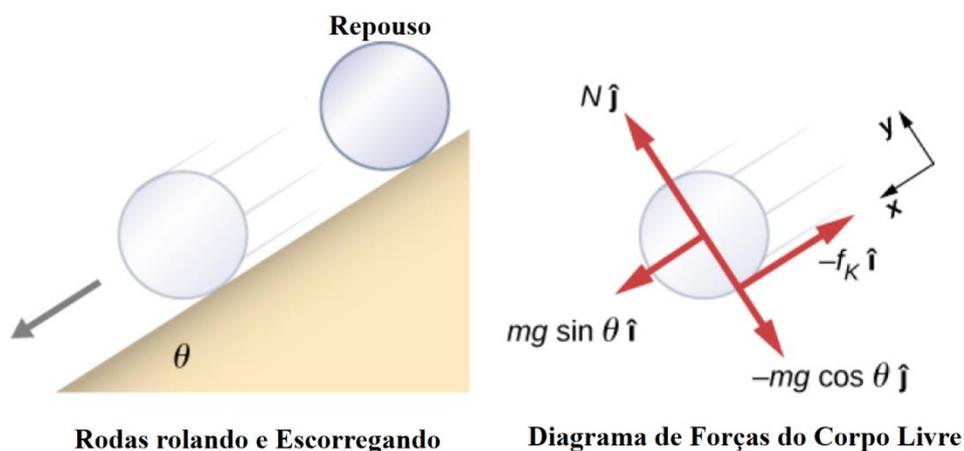


Figura 7 - Um cilindro maciço rola para baixo em um plano inclinado partindo do repouso e escorrega. O sistema de coordenadas tem x na direção para baixo do plano inclinado e y para cima, perpendicular ao plano. O diagrama de corpo livre mostra a força normal N , a força de atrito cinético $-f_K$ e as componentes da força peso $m\vec{g}$. Note as pequenas diferenças entre as forças atuando em relação ao diagrama de corpo livre mostrado na Figura 5.

O diagrama de forças da Figura 7 indica que a soma das forças na direção y é zero. Logo, a força de atrito cinético é agora $f_K = \mu_K N = \mu_K mg \text{cos } \theta$. Por outro lado, a segunda lei de Newton ao longo da direção x torna-se

Note que a equação (24) representa uma situação física bastante diferente daquela escrita na equação (6), sendo a última para o caso de rolamento sem escorregar. A força de atrito f_K fornece o único torque em torno do eixo através do centro de massa CM , de modo que a segunda lei de rotação de Newton torna-se, similarmente à equação (11),

$$\Sigma \tau_{CM} = I_{CM} \alpha \quad (25)$$

$$f_K R = I_{CM} \alpha = (1/2) mR^2 \alpha \quad . \quad (26)$$

Resolvendo para α

$$\alpha = (2 f_K / mR) = (1/R) 2 \mu_K g \cos \theta \quad . \quad (27)$$

Como visto acima, foi possível escrever as acelerações linear a_{CM} e angular α em termos do coeficiente de atrito cinético μ_K . A aceleração linear é a mesma encontrada para um objeto deslizando em um plano inclinado com atrito cinético. A aceleração angular em torno do eixo de rotação é linearmente proporcional à força normal, que depende do cosseno do ângulo de inclinação do plano inclinado θ . Quando $\theta \rightarrow 90^\circ$, esta força normal também tende a zero e, assim, a aceleração angular tende a zero.

Conservação da Energia Mecânica no Movimento de Rolamento

É muito provável que o leitor já tenha familiaridade com a energia cinética rotacional, tópico discutido em disciplinas básicas de mecânica dos corpos rígidos. Na verdade, um resumo desse tópico nos informa que qualquer objeto rolante transporta energia cinética rotacional, bem como energia cinética translacional e energia potencial, se o sistema assim exigir. Incluindo a energia potencial gravitacional, a energia mecânica total E_T de um objeto de massa m rolando de uma certa altura h deve ser escrita como

$$E_T = (1/2) m (v_{CM})^2 + (1/2) I_{CM} \omega^2 + mgh . \quad (28)$$

Na ausência de quaisquer forças não conservativas que retirariam energia do sistema na forma de calor, por exemplo, a energia total de um objeto rolante sem escorregar é conservada e é constante durante todo o movimento. Exemplos em que a energia não é conservada, entre outros, são um objeto rolante que está escorregando, produção de calor como resultado do atrito cinético e um objeto rolando encontrando resistência do ar.

O leitor pode perguntar por que um objeto rolante que não está escorregando conserva energia, já que a força de atrito estático não é conservativa. A resposta pode ser encontrada consultando novamente a Figura 4. O ponto P em contato com a superfície está em repouso em relação à superfície. Portanto, seu deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$ em relação à superfície é essencialmente zero e o trabalho incremental realizado pela força de atrito estático é, portanto, zero. É possível aplicar os princípios da conservação de energia ao nosso estudo do movimento de rolamento para obter alguns resultados interessantes.

O próximo passo então é utilizar a conservação de energia mecânica para analisar o problema de rolamento. Vamos supor uma roda, de raio R e massa m , em repouso, no topo de uma cratera em Marte de altura h . A roda está parada e possui apenas energia potencial. Note que Marte contém diversas crateras, fruto de, em épocas passadas, do resultado da colisão de asteroides com Marte, ejetando material em grande parte do planeta. No fundo da cratera, a roda possui energia cinética rotacional e translacional, que deve ser igual à energia potencial inicial por conservação de energia. Como a roda está girando sem escorregar, é necessário usar a relação $v_{CM} = R\omega$ para relacionar as variáveis translacionais com as variáveis rotacionais na equação de conservação de energia. Em seguida, é possível resolver a velocidade. Da Figura 8, é possível

observar que um cilindro oco é uma boa aproximação para a roda. Sendo assim, usar o momento de inércia de um cilindro oco para simplificar o cálculo não deixa de ser uma boa estratégia.



Figura 8 - O “rover Curiosity” do NASA Mars Science Laboratory durante o teste em 3 de junho de 2011. O local é dentro da instalação de montagem de espaçonaves no Jet Propulsion Laboratory da NASA em Pasadena, Califórnia.

Escrever que a energia no topo da bacia é igual à energia na parte inferior, ou seja

$$mgh = (1/2) m (v_{CM})^2 + (1/2) I_{CM} \omega^2 \quad . \quad (29)$$

Reescrevemos a equação de conservação de energia (29) eliminando ω usando $\omega = (v_{CM}/R)$

$$mgh = (1/2) m (v_{CM})^2 + (1/2) m R^2 ((v_{CM})^2 / R^2) \quad (30)$$

ou ainda

$$gh = (1/2) (v_{CM})^2 + (1/2)(v_{CM})^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{gh} . \quad (31)$$

Agora, vamos usar esse “rover Curiosity”, mostrado na Figura 8, para exemplificar uma situação física possível de ocorrer e que envolve a conservação de energia mecânica em um movimento de rolamento no planeta Marte. O “rover Curiosity” foi implantado em Marte em 6 de agosto de 2012. As rodas do “rover” têm um raio de 25 cm. Suponha que os astronautas cheguem a Marte no ano de 2050 e encontrem o agora inoperante Curiosity ao lado de uma cratera. Enquanto desmontam o “rover”, um astronauta acidentalmente perde o controle de uma das rodas, que rola sem escorregar para o fundo da cratera 25 metros abaixo. Se a roda tem massa de 5 kg, qual é sua velocidade no fundo da bacia?

As grandezas conhecidas são: $I_{CM} = mR^2$; $R = 0,25 \text{ m}$, e $h = 25,0 \text{ m}$. A energia mecânica no topo da cratera é igual à energia na parte inferior devido a conservação de energia, ou seja:

$$mgh = (1/2) m(v_{CM})^2 + (1/2) I_{CM} \omega^2 . \quad (32)$$

Reescrevendo a equação (32) de conservação de energia eliminando ω através da substituição de $\omega = (v_{CM} / R)$, tem-se que

$$mgh = (1/2) m(v_{CM})^2 + (1/2) MR^2 (v_{CM} / R^2) \quad (33)$$

ou ainda

$$gh = (1/2) (v_{CM})^2 + (1/2) m (v_{CM})^2 \quad (34)$$

ou mais apropriadamente

$$v_{CM} = \sqrt{gh} \quad . \quad (35)$$

Vale lembrar que em Marte, Em a aceleração da gravidade é de $\sim 3,71 \text{ m/s}^2$, o que fornece o módulo da velocidade no fundo da cratera sendo

$$v_{CM} = ((3,71 \text{ m/s}^2) \times 25,0 \text{ m})^2 = 9,63 \text{ m/s} \quad . \quad (36)$$

Este pode ser visto como um resultado bastante preciso, considerando que Marte tem uma atmosfera rarefeita e a perda de energia devido à resistência do ar é mínima e, portanto, podendo ser desconsiderada. O resultado também assume que o terreno é plano, de modo que a roda não encontre pedras e solavancos ao longo do caminho.

Além disso, neste exemplo, a energia cinética, ou energia do movimento, é igualmente compartilhada entre o movimento linear, translacional e o rotacional. Observa-se também que os momentos de inércia, descritos na Figura 9 para diversas geometrias, indicam que o cilindro oco tem o maior momento de inércia para um determinado raio e massa do objeto. Se as rodas do “rover” fossem sólidas e aproximadas por cilindros sólidos, maciços por exemplo, haveria mais energia cinética no movimento linear do que no

movimento rotacional. Isso forneceria à roda uma velocidade linear maior do que a aproximação do cilindro oco. Assim, o cilindro sólido atingiria o fundo da cratera mais rapidamente do que o cilindro oco ou a roda em questão.

Considerações Finais

- No movimento de rolamento sem deslizamento, uma força de atrito estático está presente entre o objeto rolante e a superfície. As relações $v_{CM} = R\omega$, $a_{CM} = R\alpha$, e $d_{CM} = R\theta$ se aplicam, de modo que a velocidade linear, a aceleração e a distância do centro de massa são as variáveis angulares multiplicadas pelo raio R do objeto.
- No movimento de rolamento com deslizamento, uma força de atrito cinético surge entre o objeto rolante e a superfície. Nesse caso, $v_{CM} \neq R\omega$, $a_{CM} \neq R\alpha$, e $d_{CM} \neq R\theta$.
- A conservação de energia pode ser usada para analisar o movimento de rolamento. A energia é conservada no movimento de rolamento sem deslizamento. A energia não é conservada no movimento de rolamento com deslizamento devido essencialmente ao calor gerado pelo atrito cinético.

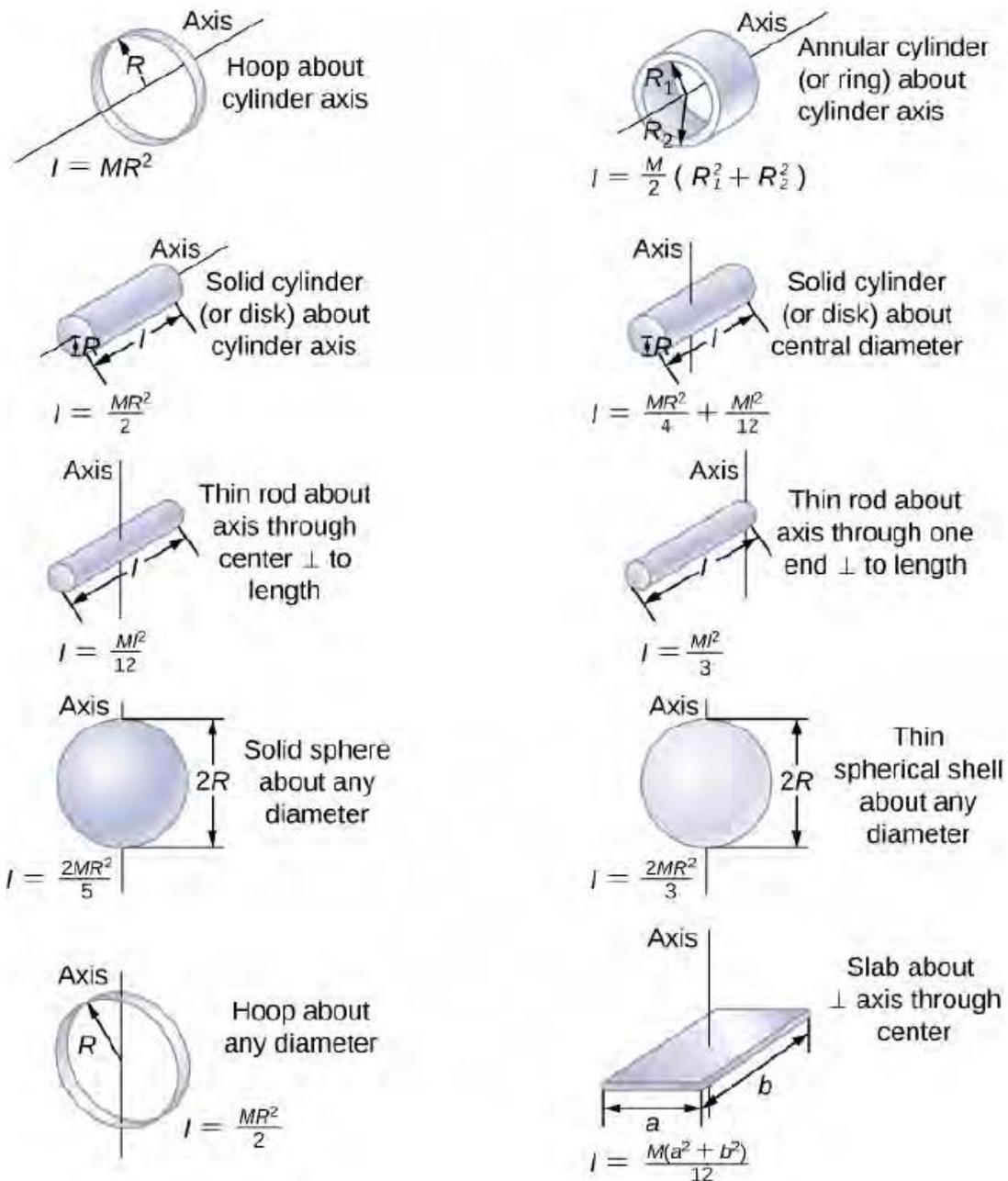


Figura 9 - Valores de momento de inércia rotacional para as formas mais comuns de objetos.