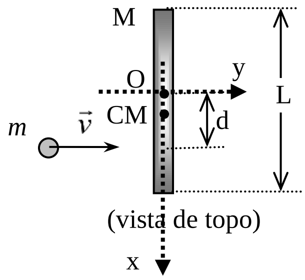
7. (TIPLER CAP 10, E 50) A figura ao lado mostra uma barra delgada de comprimento L e massa M, e uma pequena esfera de massa plástica, com a massa *m*. O sistema está pousado sobre uma superfície horizontal sem atrito. A massa de plástico desloca-se para a direita, com a velocidade v, atinge a barra a uma distância d do respectivo centro de massa e fica colada na barra no ponto de contato. Determinar as expressões da velocidade do centro de massa do sistema e da velocidade angular do sistema na rotação em torno do centro de massa.



Inicialmente a barra está em repouso, ∴ o momento angular é o momento da esfera. Após a colisão, o sistema todo se movimenta, más deve ser considerada a inércia rotacional de cada uma das partes. Assim, a velocidade final dependerá das inércias rotacionais da esfera e da barra. Como não há outras forças externas agindo no sistema (ou pelo menos não há forças na direção do movimento da barra), usamos o conceito de conservação da quantidade de movimento.
Escolheremos no início do raciocínio a origem de coordenadas no CM da barra. Uma vez que a esfera gruda na barra, o novo centro de massa, CM $_{b+p}$ (barra+ projétil) está a uma distância δ do CM original e a inércia rotacional do sistema, além da inércia rotacional da barra inclui o projétil uma vez grudado na mesma.
$x_{CM} = \frac{0.M+d.m}{(M+m)} = \delta = cte$ adotamos p = projétil; b = barra
A velocidade do centro de massa do sistema é: $v_{CM} = \frac{0.M+v_{p,s}.m}{(M+m)}$
Vamos analisar em primeiro lugar desde o referencial inercial do centro de massa:

$$\vec{v}_{p,s} = \vec{v}_{p,CM} + \vec{v}_{CM,s} \Rightarrow \vec{v}_{p,CM} = \vec{v}_{p,s} - \vec{v}_{CM,s}$$

Por outro lado, $\vec{v}_{b,s} = \vec{v}_{b,CM} + \vec{v}_{CM,s}$por ser nula a velocidade inicial da barra em relação ao solo, $\vec{v}_{b,CM} = -\vec{v}_{CM,s}$
A quantidade de movimento angular inicial do sistema está composta pela quantidade de movimento do projétil mais a quantidade de movimento da barra em relação ao centro de massa do sistema, sendo $L_{z,projetil} = r \times p = r \times m_p v_{p,CM}$ no caso do projétil:

$$L_{p,CM} = (d-\delta)mv_{p,CM} = (d-\delta)m(v_{p,s} - v_{CM,s}) = (d-\delta)m\left(v_{p,s} - \frac{v_{p,s}.m}{(M+m)}\right) =$$

$$= (d-\delta)mv_{p,s}\left(\frac{(M+m)-m}{(M+m)}\right) = (d-\delta)mv_{p,s}\frac{M}{M+m}$$

ou o correspondente no caso da barra: $L_{z,barra} = r \times p = r \times Mv_{b,CM}$:

$$L_{b,CM} = \delta M(-v_{b,CM}) = \delta M(v_{CM,s}) = \delta M\frac{v_{p,s}.m}{(M+m)} \text{ porque o impulso gerado na colisao é positivo}$$

$$L_{z\ tot} = (d-\delta)mv_{p,s}\frac{M}{M+m} + \delta M\frac{v_{p,s}.m}{(M+m)} = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}(d-\delta+\delta) = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}d$$

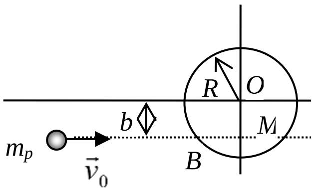
$$L_{z\ f} = I\omega \text{ como } L_{z\ tot} = L_{z\ f} \quad \therefore \quad I\omega = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}d \Rightarrow \omega = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}\frac{d}{I}$$

$$I_{barra,CM\ s} = \frac{1}{12}ML^2 + M\delta^2 \qquad I_{barra+bola} = \frac{1}{12}ML^2 + M\delta^2 + m(d-\delta)^2$$

Este problema também pode ser resolvido desde o referencial solo, em O.
O momento angular inicial, é só devido ao movimento do projétil, assim:
$L_0 = mv_0 d$
Esse momento angular pode ser interpretado como:

$$L_0 = L_{sistema,CM} + L_{CM,O}(*)$$
$$= I\omega + (M+m)v_{CM,O} = I\omega + (M+m)\frac{v_o.m}{(M+m)}\delta = I\omega + v_o.m\delta$$
$$L_0 = L_f \qquad \therefore v_o.md = I\omega + v_o.m\frac{d.m}{(M+m)}$$
$$I\omega = v_o.md - v_o.md\frac{m}{(M+m)} = v_o.md\left(1 - \frac{m}{(M+m)}\right) = v_o.md\left(\frac{M+m-m}{(M+m)}\right)$$
$$\omega = \frac{v_o.mM}{M+m}\frac{d}{I}$$

(*) $\vec{L}_o = \sum m_i\vec{r}_i \wedge \vec{v}_{i(o)} \qquad \vec{r}_{i,o} = \vec{r}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o} \therefore \vec{v}_{i,o} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM,o}$
$$\vec{L}_o = \sum m_i(\vec{r}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o}) \wedge (\vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM,o}) =$$
$$= \sum m_i\vec{r}_{i,CM} \wedge \vec{v}_{i,CM} + \sum m_i\vec{r}_{i,CM} \wedge \vec{v}_{CM,o} + \vec{r}_{CM,o} \wedge \sum m_i\,\vec{v}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o} \wedge \sum m_i\,\vec{v}_{CM,o} =$$
$$= L_{CM,o} + M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM,o} + \vec{R}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM,o} + \ldots$$



8. (TIPLER CAP 10, E 54) Um projétil de massa m_p, com velocidade constante $\vec{v}_0$, atinge um disco estacionário de massa M e raio R que pode girar em torno de um eixo perpendicular ao plano da figura, que passa por O, como mostra a figura ao lado. Antes da colisão, o projétil descreve uma trajetória retilínea a uma distância b, abaixo do eixo. O projétil atinge o disco e fica retido no ponto B. O projétil pode ser considerado puntiforme. a) Antes do impacto, qual o momento angular L_0 do projétil e do disco em relação ao eixo O? b) qual a velocidade angular ω do disco com o projétil logo depois da colisão? c) Qual a energia cinética do disco e do projétil logo depois da colisão? d) qual a energia mecânica perdida na colisão?

a) Antes do impacto, o momento angular do sistema é o momento angular devido ao movimento do projétil, então, $L_{z,0} = b.m_pv_0$.
b) Como há conservação da quantidade de movimento, $L_{z,f} = L_{z,i}$, mas deve ser considerado o momento de inércia do disco, assim,
$L_{z,f} = (I_{disco} + I_{projétil})\omega_f = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_f,$ assim:
$$bm_pv_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m_pR^2\right)\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{bm_pv_0}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_pR^2\right)} = \frac{2bm_pv_0}{R^2(M+2m_p)}.$$
c) Depois da colisão, a energia cinética do disco e do projétil é:
$$E_{c,sistema} = \frac{1}{2}I_{sistema}\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_pb^2\right)\omega_f^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_pR^2\right)\left(\frac{2bm_pv_0}{R^2(M+2m_p)}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{M + 2m_p}{2}\right) \frac{4\left(bm_p v_0\right)^2}{\left(R^2\left(M + 2m_p\right)\right)^2} = \left(M + 2m_p\right) \frac{\left(bm_p v_0\right)^2}{R^2\left(M + 2m_p\right)^2}$$

$$= \frac{\left(bm_p v_0\right)^2}{R^2\left(M + 2m_p\right)}$$