ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 15

Cap. 2.3 – Linguagens não livres de contexto

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

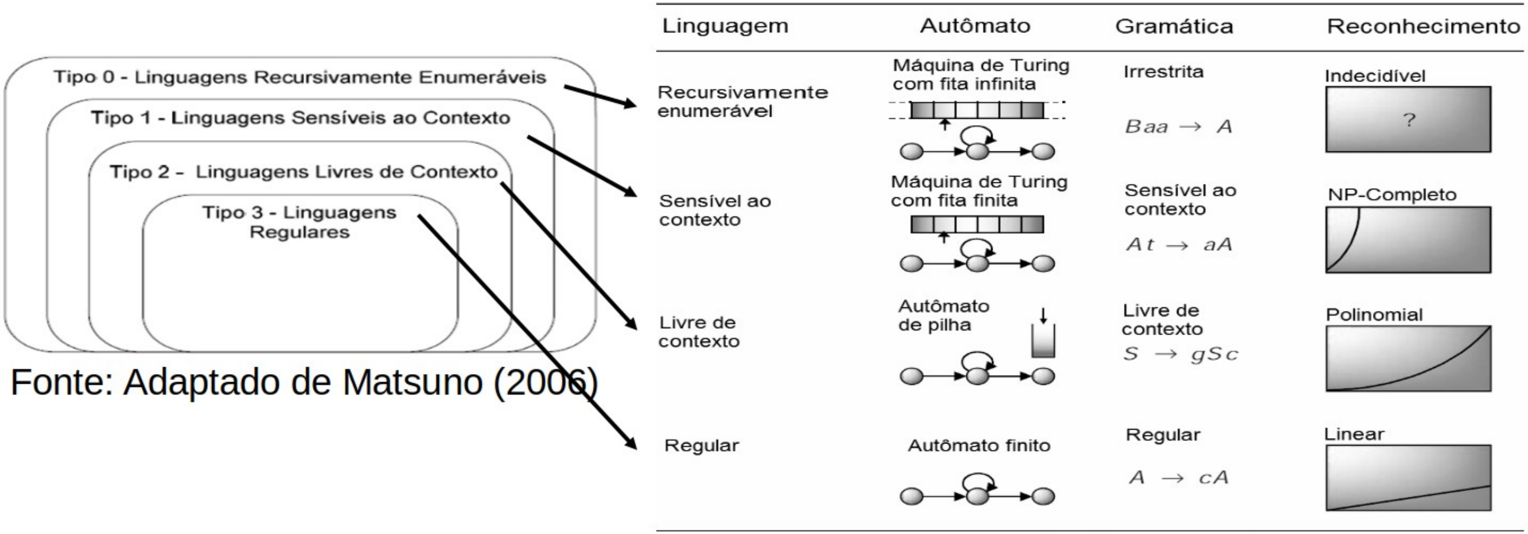
Aulas passadas

- Gramáticas livres de contexto (GLC): $V \rightarrow (\Sigma \cup V)^*$
  - Derivações, árvores sintáticas, ambiguidade
  - Análise sintática de GLCs (alg. CYK / Forma normal de Chomsky)
- Autômatos com pilha NÃO-determinísticos (APN)
  - Reconhecem mais linguagens que um AP determinístico
- Equivalência entre GLC e APN

Aula de hoje

- Como provar que uma linguagem NÃO é livre de contexto?

→ lema do bombeamento das linguagens livres de contexto



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)

Fonte: Adaptado de Searls (2002)

RECORDANDO

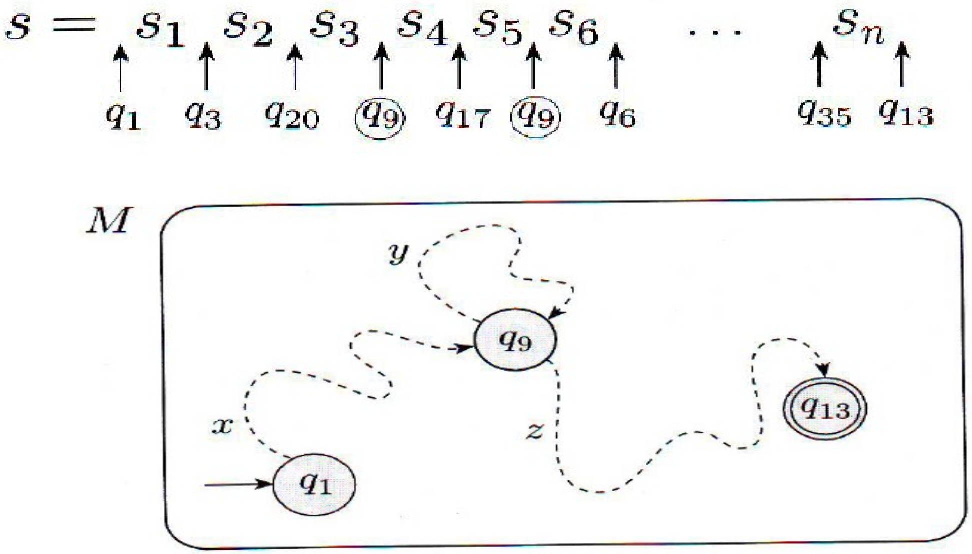
(lema do bombeamento para linguagens regulares...)

EACH USP Profa. Ariane Machado Lima

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.



usamos p =

número de estados do AFD

TEOREMA 1.70

(para **TODAS** as cadeias)

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

(existe **pelo menos uma** divisão)

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, — isto é, y pode ser bombeada (para **todos i** >=0)
2. $|y| > 0$, e — isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Também importante notar que y pode estar em diversas posições (até p), mas sempre **CONFINADO** entre as p primeiras posições

x ≠ ε

$S = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$ — $\underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p}_{xy}$

$S = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$ — $\underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots}_{xy}$

x = ε

$S = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$ — $\underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p}_{xy}$

$S = s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$ — $\underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots}_{xy}$

|xy| = p

|xy| < p

EACH USP Profa. Ariane Machado Lima

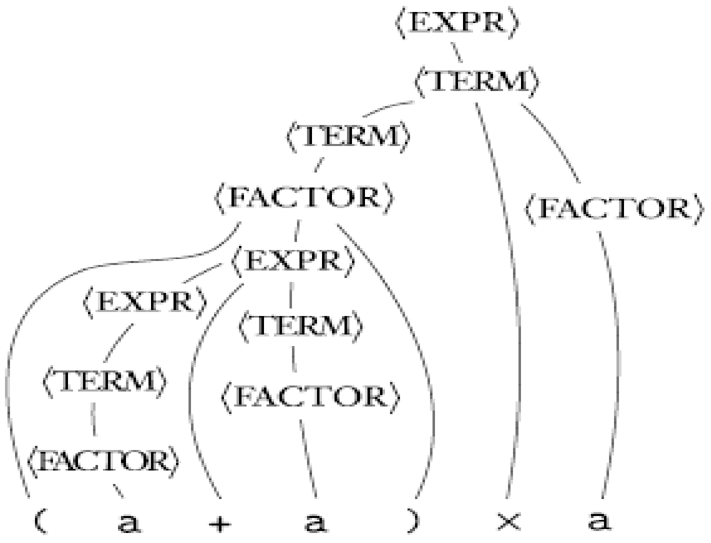
Lema do bombeamento

Linguagens regulares: uma cadeia corresponde a um caminho em um AFD (do estado inicial a um estado final)

Linguagens livres de contexto: uma cadeia corresponde a pelo menos uma árvore sintática segundo a gramática (raiz é o símbolo inicial e folhas são terminais)

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

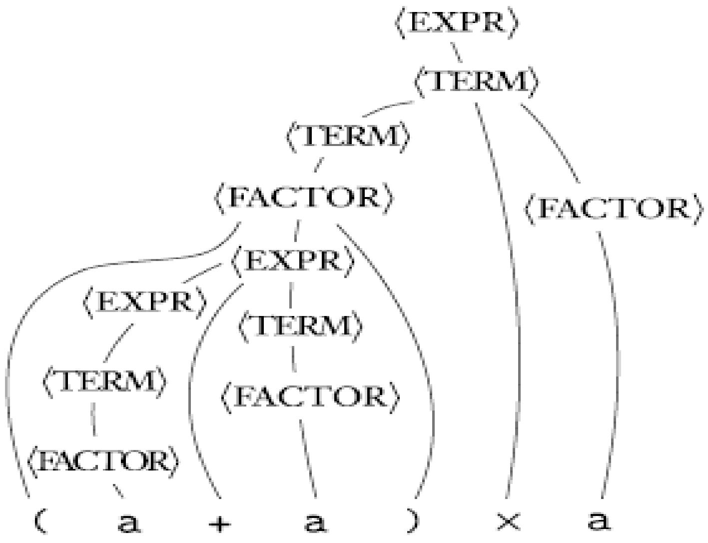
- Para “cadeias longas” da linguagem, sua árvore sintática deve conter pelo menos um “caminho longo” da variável inicial (raiz) até um terminal (folha)



$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{EXPR} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{TERMO} \rangle \mid \langle \mathrm{TERMO} \rangle \\
\langle \mathrm{TERMO} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{TERMO} \rangle \times \langle \mathrm{FATOR} \rangle \mid \langle \mathrm{FATOR} \rangle \\
\langle \mathrm{FATOR} \rangle &\rightarrow (\, \langle \mathrm{EXPR} \rangle \,) \mid \mathtt{a}
\end{aligned}
$$

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

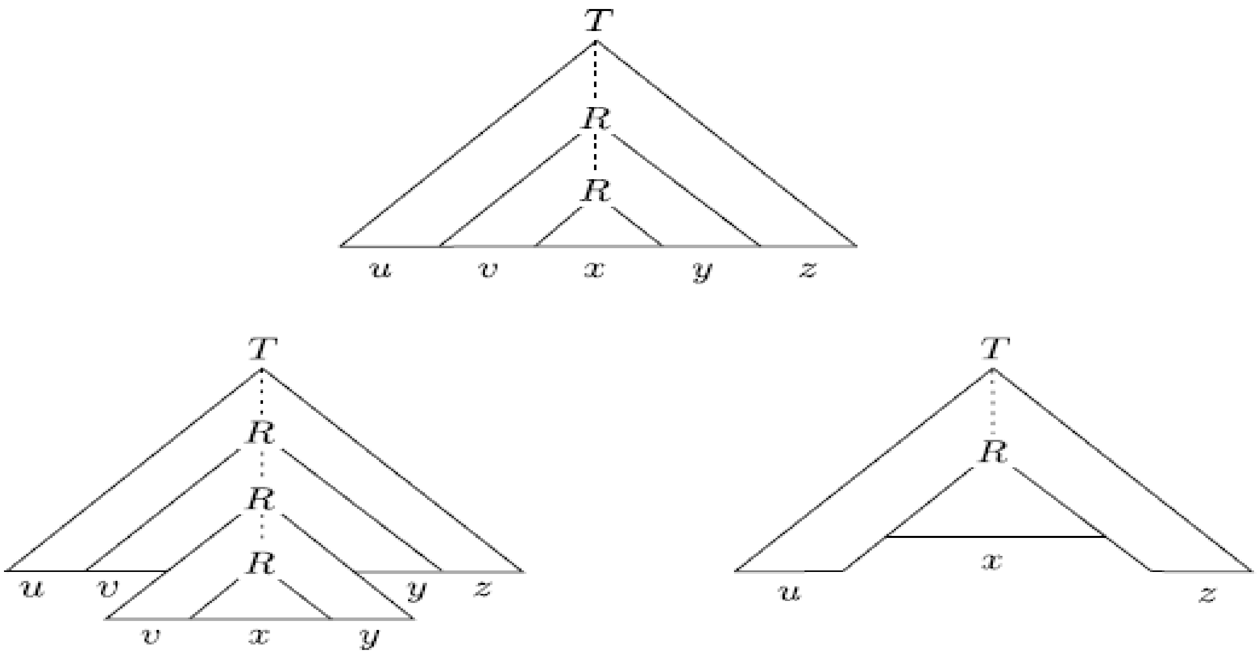
- Para “cadeias longas” da linguagem, sua árvore sintática deve conter pelo menos um “caminho longo” da variável inicial (raiz) até um terminal (folha)



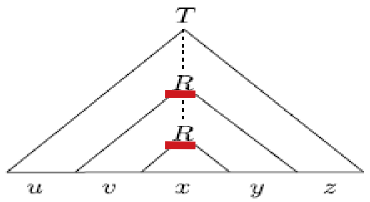
- Se o caminho é longo o suficiente, há repetição de não terminais

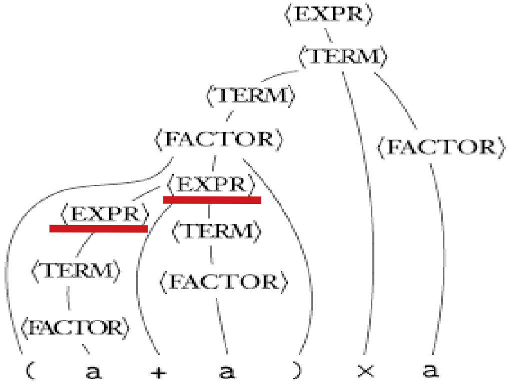
$$\begin{aligned} \langle \mathrm{EXPR} \rangle &\to \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{TERMO} \rangle \mid \langle \mathrm{TERMO} \rangle \\ \langle \mathrm{TERMO} \rangle &\to \langle \mathrm{TERMO} \rangle \times \langle \mathrm{FATOR} \rangle \mid \langle \mathrm{FATOR} \rangle \\ \langle \mathrm{FATOR} \rangle &\to (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid \mathtt{a} \end{aligned}$$

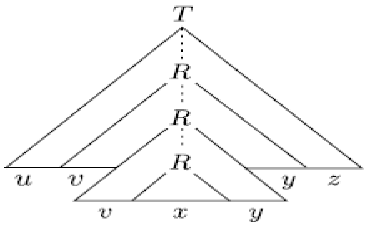
- Se há repetição de não terminais (ex: R), então as sub-árvores com raiz em R poderiam ser trocadas entre si
- Ou seja, se um não-terminal é R, ele pode ser substituído por qualquer uma de suas árvores (derivações)

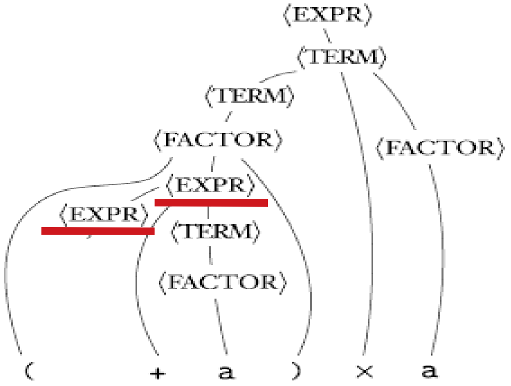


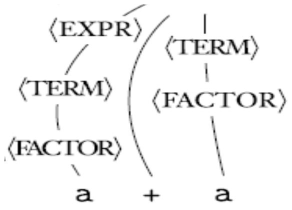
$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$$
$$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$$
$$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \text{a}$$



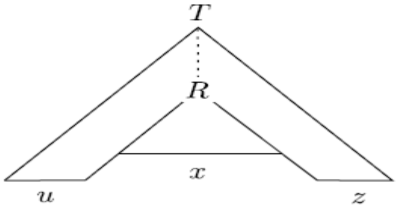


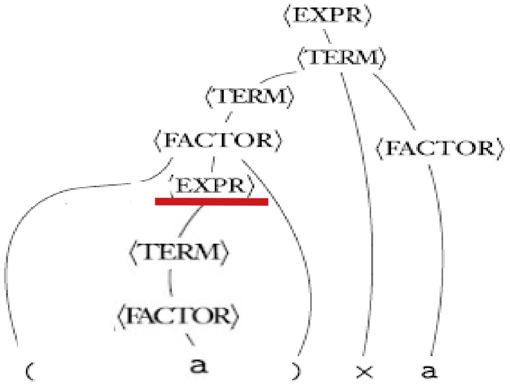






(a + a + a) x a





(a) x a

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

Obs: note que nos dois lemas do bombeamento vale só a ida (=>)

TEOREMA 2.34

Lema do bombeamento para linguagens livres-do-contexto Se A é uma linguagem livre-do-contexto, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) onde, se s é uma cadeia qualquer em A de comprimento pelo menos p, então s pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ satisfazendo as condições

1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e → Isto é, a cadeia v concatenada com a cadeia y não pode ser ε (ie, não podem AMBAS serem ε)
3. $|vxy| \leq p$.

EACH USP
Profa. Ariane Machado Lima

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto

TEOREMA 2.34 ....

Lema do bombeamento para linguagens livres-do-contexto Se A é uma linguagem livre-do-contexto, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) onde, se s é uma cadeia qualquer em A de comprimento pelo menos p, então s pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ satisfazendo as condições

1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Qual será esse p?

EACH USP
Profa. Ariane Machado Lima

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

- Seja G uma GLC, que gera uma linguagem livre de contexto (LLC) A
- b: nr máximo de símbolos do lado direito de uma regra

Ex: b = ?

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{EXPR} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{TERMO} \rangle \mid \langle \mathrm{TERMO} \rangle \\
\langle \mathrm{TERMO} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{TERMO} \rangle \times \langle \mathrm{FATOR} \rangle \mid \langle \mathrm{FATOR} \rangle \\
\langle \mathrm{FATOR} \rangle &\rightarrow (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid a
\end{aligned}
$$

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

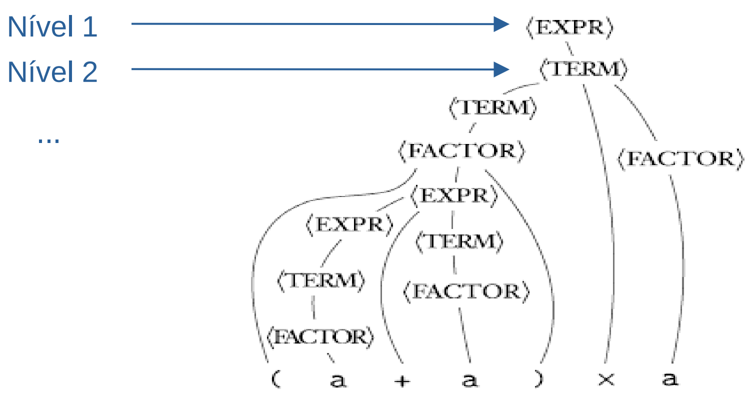
- Seja G uma GLC, que gera uma linguagem livre de contexto (LLC) A
- b: nr máximo de símbolos do lado direito de uma regra

Ex: b = 3

$$
\begin{aligned}
\langle \mathrm{EXPR} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{TERMO} \rangle \mid \langle \mathrm{TERMO} \rangle \\
\langle \mathrm{TERMO} \rangle &\rightarrow \langle \mathrm{TERMO} \rangle \times \langle \mathrm{FATOR} \rangle \mid \langle \mathrm{FATOR} \rangle \\
\langle \mathrm{FATOR} \rangle &\rightarrow (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid a
\end{aligned}
$$

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

- Seja G uma GLC, que gera uma linguagem livre de contexto (LLC) A
- b: nr máximo de símbolos do lado direito de uma regra
- Árvore sintática de qualquer cadeia de A terá essas características:
  - um nó não pode ter mais que b filhos
  - Cada nível n+1 tem no máximo b^n símbolos (nível de um nó = nr de nós da raiz ao nó)
  - Logo: Árvore de altura no máximo h => cadeia de tamanho no máximo b^h



$$\begin{aligned}
\langle \text{EXPR} \rangle &\to \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle \\
\langle \text{TERMO} \rangle &\to \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle \\
\langle \text{FATOR} \rangle &\to (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \mathtt{a}
\end{aligned}$$

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

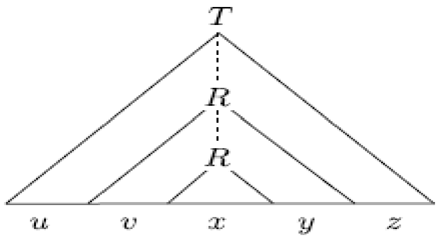
- Seja G uma GLC, que gera uma linguagem livre de contexto (LLC) A
- b: nr máximo de símbolos do lado direito de uma regra
- Árvore sintática de qualquer cadeia de A terá essas características:
  - um nó não pode ter mais que b filhos
  - Cada nível n+1 tem no máximo b^n símbolos (nível de um nó = nr de nós da raiz ao nó)
  - Logo: Árvore de altura no máximo h => cadeia de tamanho no máximo b^h
- Se uma cadeia tem tamanho >= b^h +1, então suas árvores necessariamente têm altura >= h+1
- Comprimento de bombeamento: $b^{|V|}$ +1 (|V| = nr de variáveis de G), uma variável vai se repetir!!!

Se s pertence à LLC A e |s| >= $b^{|V|}$ +1, então as árvores de s têm altura >= |V| +1

- Escolha a árvore com menor número de nós. Nela existe pelo menos um caminho com comprimento >= |V| + 1 (|V|+2 nós, ou seja, 1 nó terminal e |V|+1 nós de variáveis) => pelo menos uma variável se repete (escolhemos R, que se repete entre as |V|+1 variáveis mais baixas desse caminho)

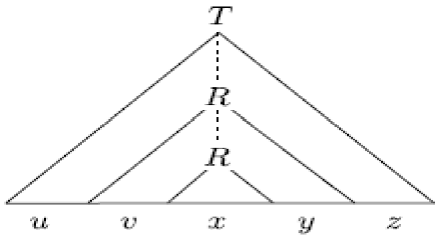
Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

- Dividimos s em uvxyz (figura)



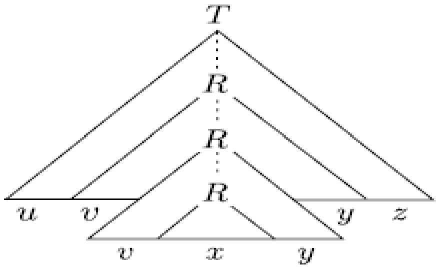
Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

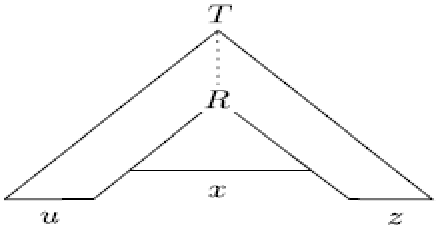
- Dividimos s em uvxyz (figura)



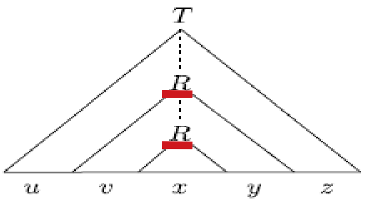
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

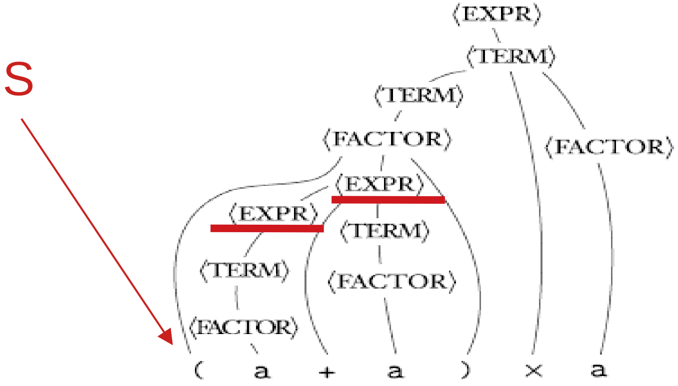
1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,





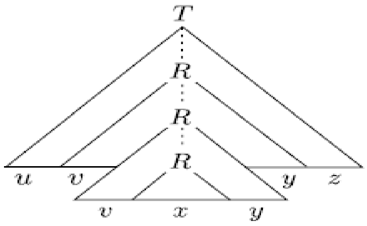
$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$$
$$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$$
$$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\, \langle \text{EXPR} \rangle \,) \mid \text{a}$$

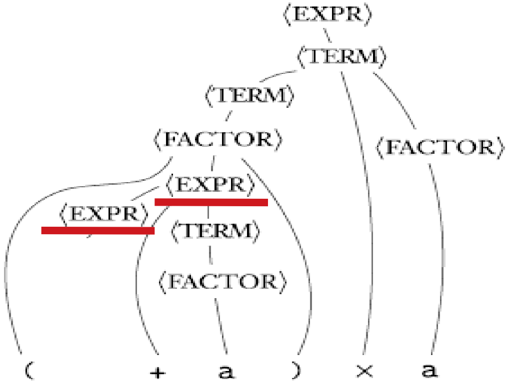


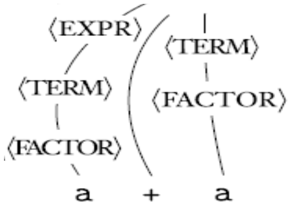


Dividimos s em uvxyz (figura)

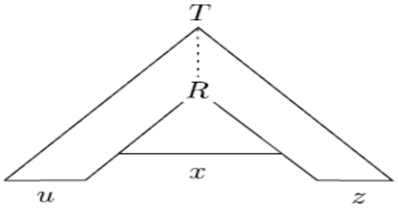
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

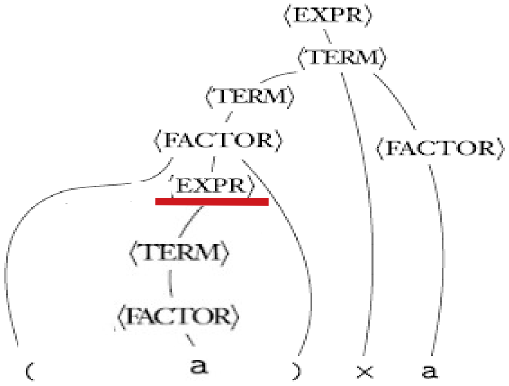






(a + a + a) x a

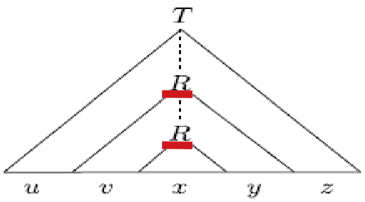


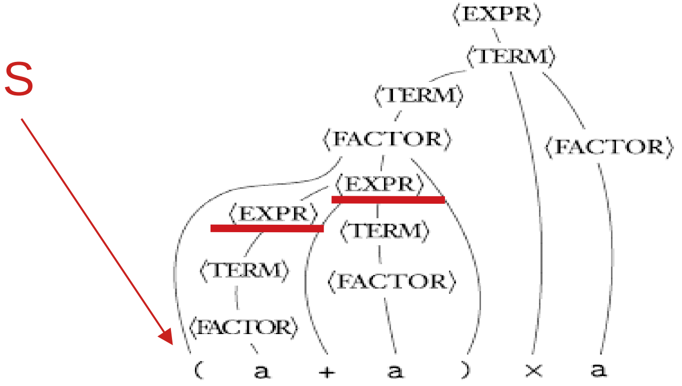


(a) x a

uvxyz = ?
vxy =
x =
v =
y =
u =
z =

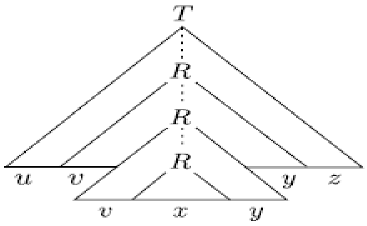
⟨EXPR⟩ → ⟨EXPR⟩+⟨TERMO⟩ | ⟨TERMO⟩
⟨TERMO⟩ → ⟨TERMO⟩x⟨FATOR⟩ | ⟨FATOR⟩
⟨FATOR⟩ → (⟨EXPR⟩) | a

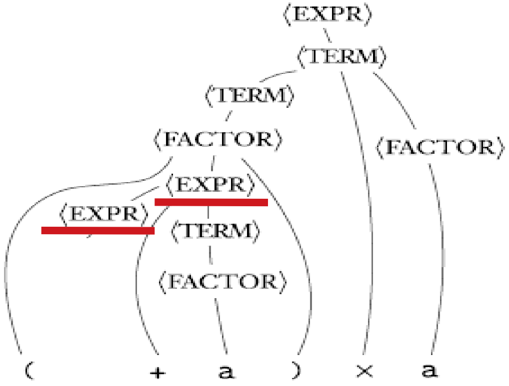


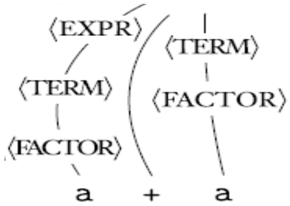


Dividimos s em uvxyz (figura)

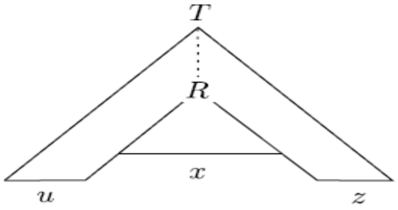
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

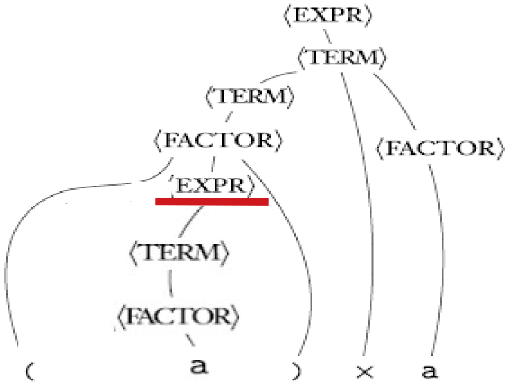






(a + a + a) x a

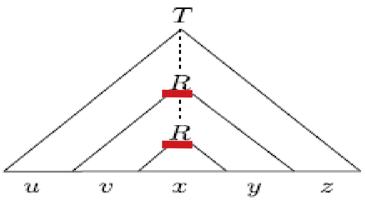


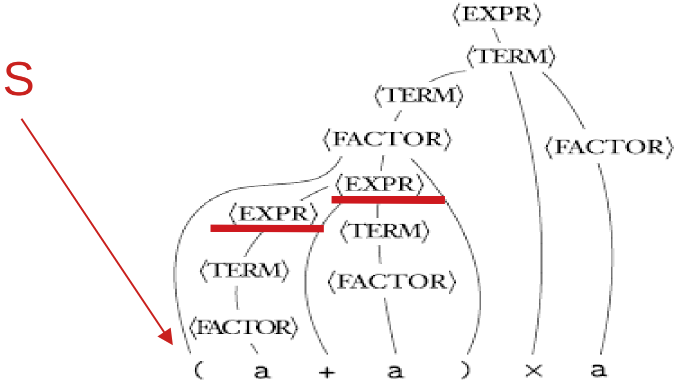


(a) x a

uvxyz = ?
vxy = a+a
x =
v =
y =
u =
z =

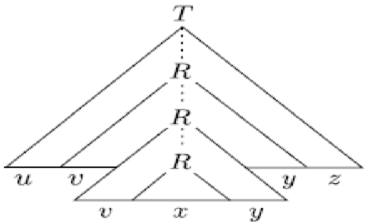
$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$
$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$
$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \text{a}$

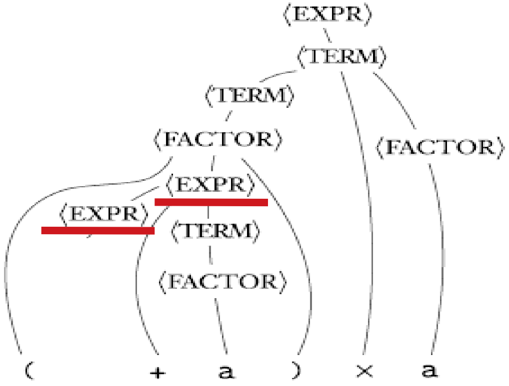


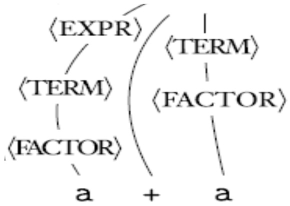


Dividimos s em uvxyz (figura)

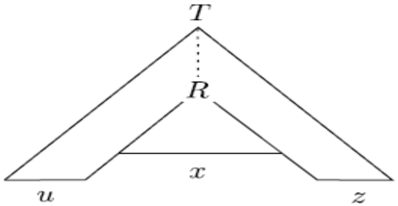
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

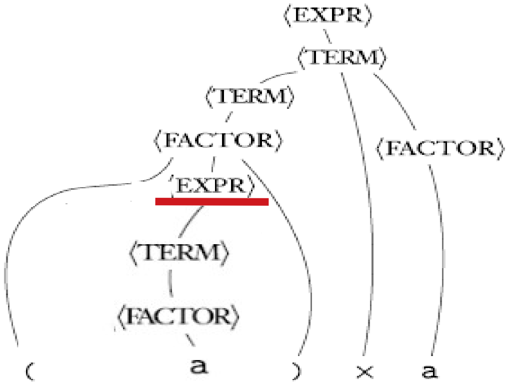






(a + a + a) x a

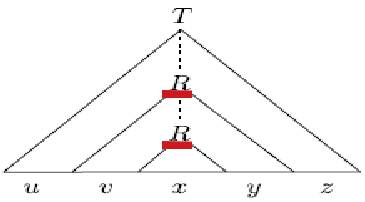


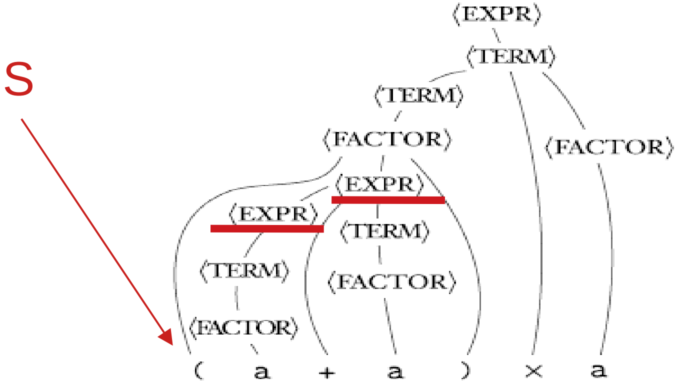


(a) x a

uvxyz = ?
vxy = a+a
x = a
v =
y =
u =
z =

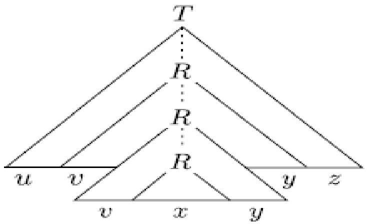
$$
\begin{aligned}
\langle \text{EXPR} \rangle &\rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle \\
\langle \text{TERMO} \rangle &\rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle \\
\langle \text{FATOR} \rangle &\rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \text{a}
\end{aligned}
$$

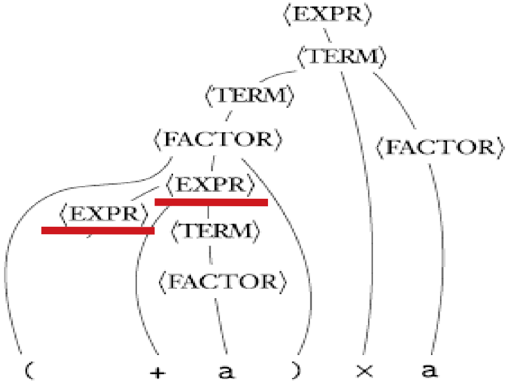


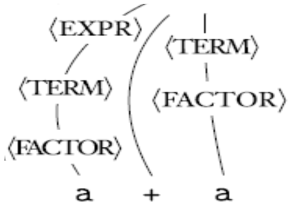


Dividimos s em uvxyz (figura)

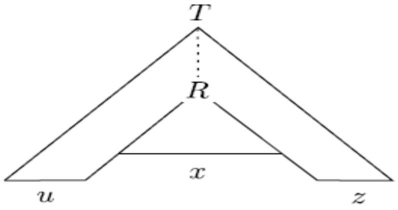
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz ($i > 1$) ou uxz ($i = 0$) - (cond 1 do lema)

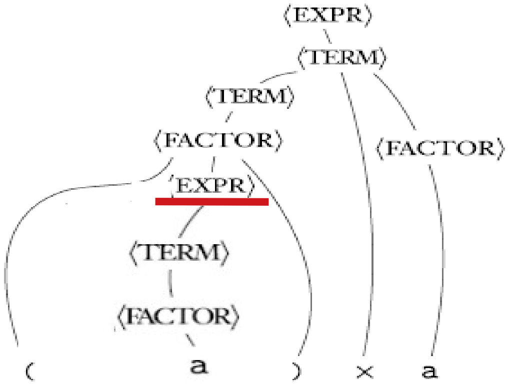






(a + a + a) x a





(a) x a

uvxyz = ?

vxy = a+a

x = a

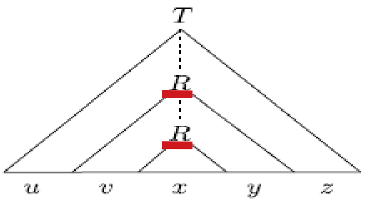
v = ε

y =

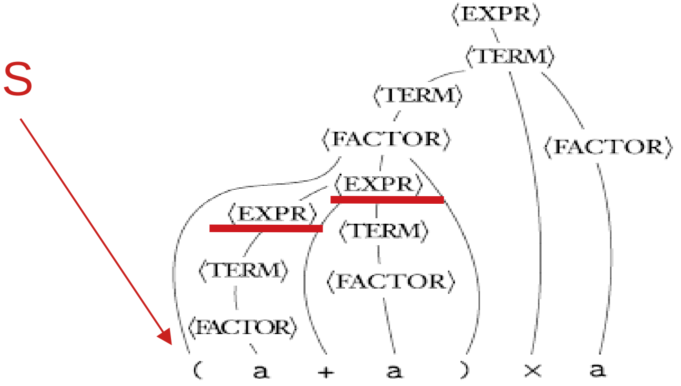
u =

z =

$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$$
$$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$$
$$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid a$$

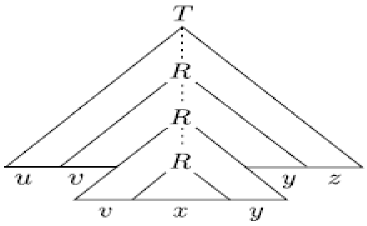


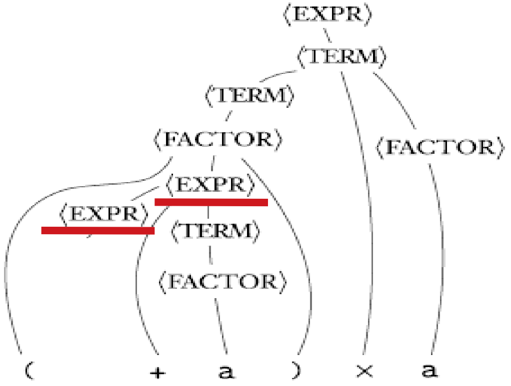
S

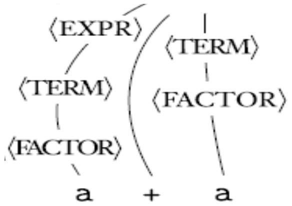


Dividimos s em uvxyz (figura)

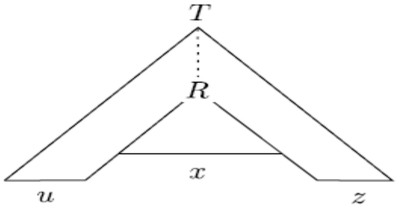
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz ($i > 1$) ou uxz ($i = 0$) - (cond 1 do lema)

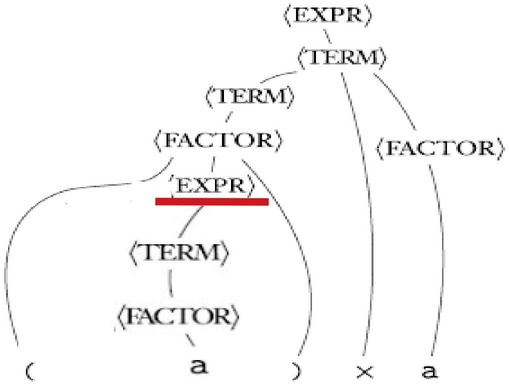






(a + a + a) x a



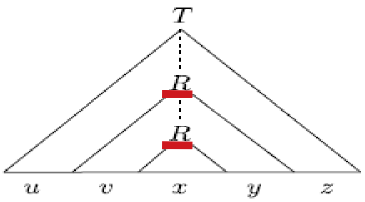


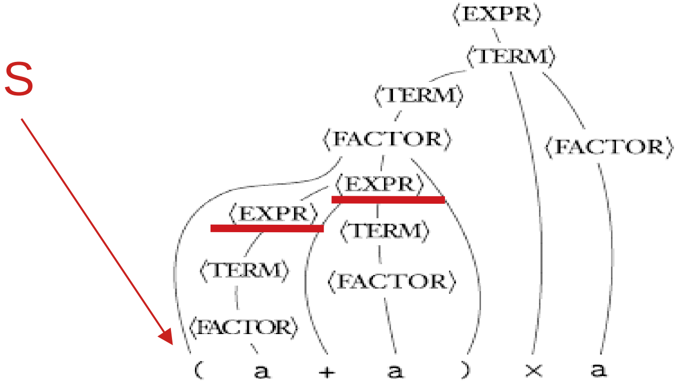
(a) x a

uvxyz = ?
vxy = a+a
x = a
v = ε
y = +a
u =
z =

Profa. Ariane Machado Lima

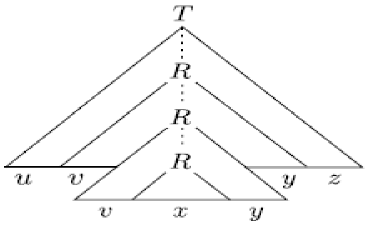
$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$$
$$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$$
$$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \text{a}$$

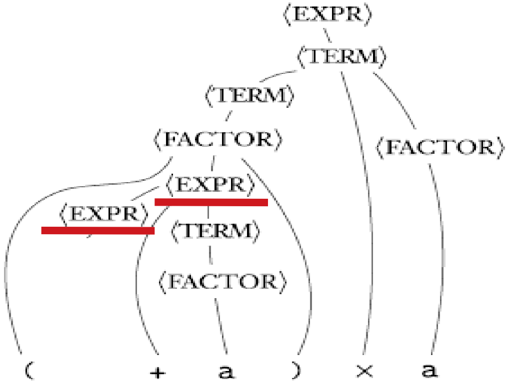


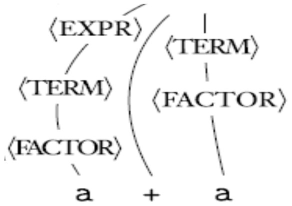


Dividimos s em uvxyz (figura)

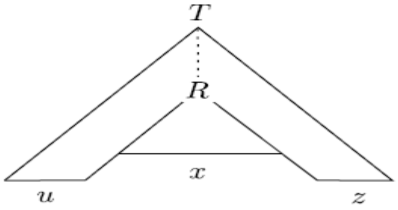
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

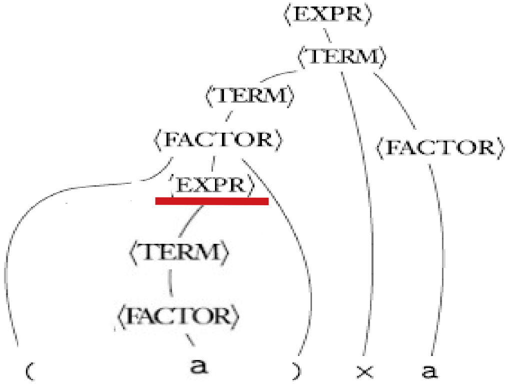






(a + a + a) x a

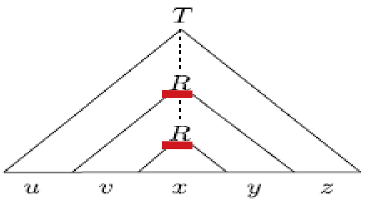


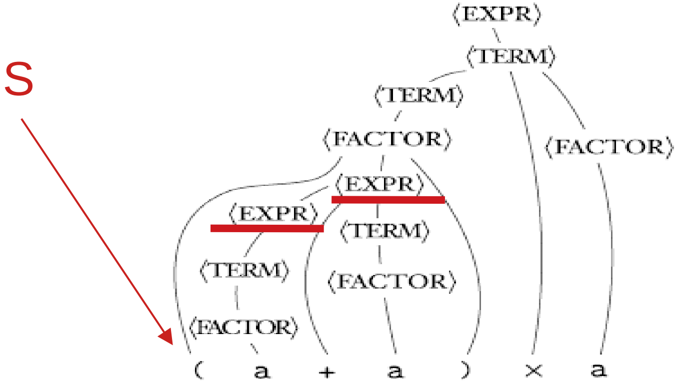


(a) x a

uvxyz = ?
vxy = a+a
x = a
v = ε
y = +a
u = (
z =

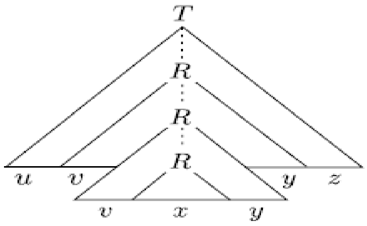
$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERMO} \rangle \mid \langle \text{TERMO} \rangle$$
$$\langle \text{TERMO} \rangle \rightarrow \langle \text{TERMO} \rangle \times \langle \text{FATOR} \rangle \mid \langle \text{FATOR} \rangle$$
$$\langle \text{FATOR} \rangle \rightarrow (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \text{a}$$

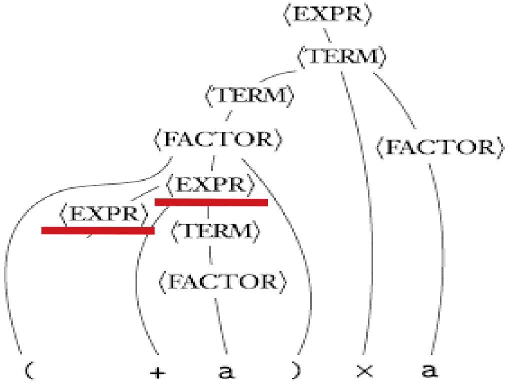


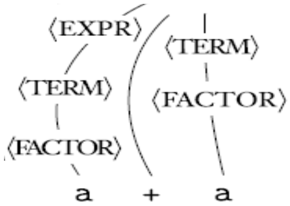


Dividimos s em uvxyz (figura)

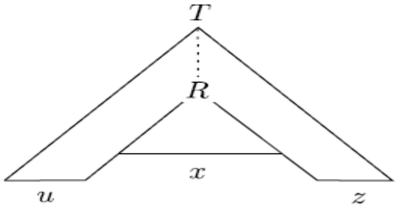
- Podemos substituir cada subárvore de R pela outra, obtendo uv^ixy^iz (i > 1) ou uxz (i =0) - (cond 1 do lema)

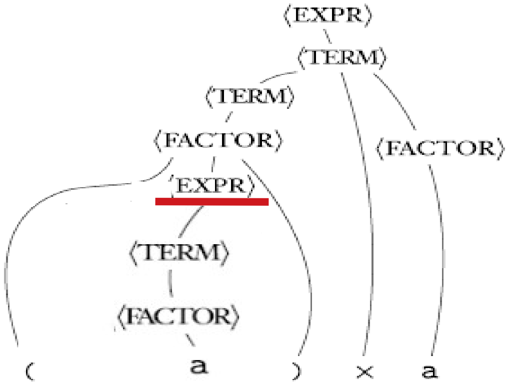






(a + a + a) x a



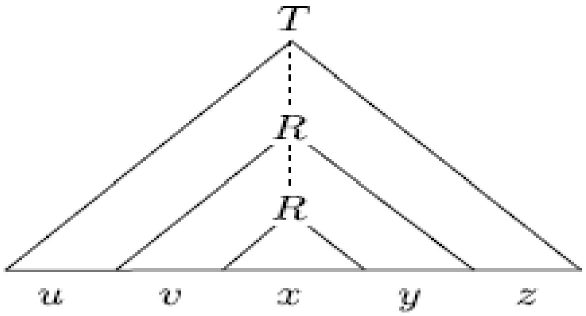


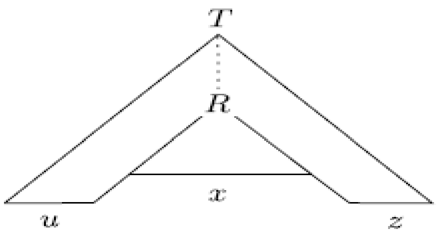
(a) x a

uvxyz = ?
vxy = a+a
x = a
v = ε
y = +a
u = (
z =) x a

Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

- (cond 2 : |vy| > 0): Se vy = ε, então poderíamos trocar a subárvore maior de R pela menor, e a nova árvore (com menos nós) ainda geraria s. Mas tal árvore não existe, pois já tínhamos escolhido a menor.

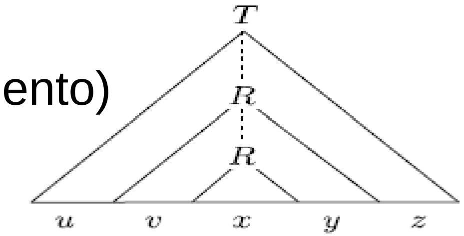




Lema do bombeamento para linguagens livres de contexto (prova)

- (cond 3 : |vxy| <= p): vxy é gerada pela ocorrência superior de R (subárvore maior), e R foi escolhida dentre as |V|+1variáveis mais baixas do caminho → subárvore maior de R tem altura <= |V|+1 (para que ocorra a primeira repetição da variável) → a sequência gerada por essa subárvore (vxy) tem tamanho <= $b^{|V|+1}$. Como $b^{|V|} + 1 <= b^{|V|+1}$, podemos considerar $p = b^{|V|+1}$ (novo comprimento do bombeamento, para satisfazer a condição 3).

- Resumo:
  - Sequências de tamanho entre $b^{|V|} + 1$ e $b^{|V|+1}$ precisam de uma árvore de altura |V|+1
  - Portanto sequências de tamanho $b^{|V|} + 1$ é o tamanho mínimo necessário para ter uma árvore de altura |V|+1 e portanto precisar repetir pelo menos uma variável no caminho mais longo
  - Mas para satisfazer condição 3, $p = b^{|V|+1}$ (comprimento do bombeamento)

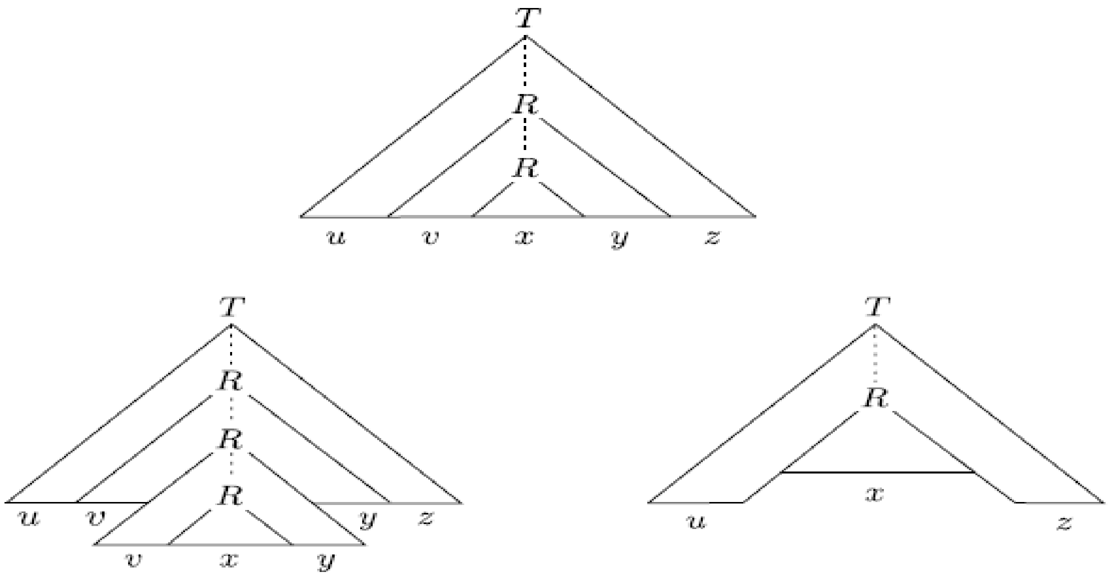


TEOREMA 2.34

Lema do bombeamento para linguagens livres-do-contexto Se A é uma linguagem livre-do-contexto, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) onde, se s é uma cadeia qualquer em A de comprimento pelo menos p, então s pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ satisfazendo as condições

1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

$p = b^{|V|+1}$



Exemplo 1

Prove que B = {$a^n b^n c^n$ | n >= 0} não é livre de contexto

Exemplo 1

Prove que B = $\{a^n b^n c^n \mid n >= 0\}$ não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja s =

Exemplo 1

Prove que B = {$a^n b^n c^n$ | n >= 0} não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja s = $a^p b^p c^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), o que dificulta a prova (em relação às provas de linguagens não-regulares)

PRECISA IDENTIFICAR TODAS AS POSSÍVEIS POSIÇÕES!!!!

Exemplo 1

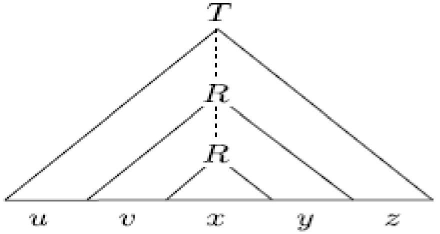
Prove que $B = \{a^n b^n c^n \mid n >= 0\}$ não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja $s = a^p b^p c^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há quantas situações?

Exemplo 1



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que B = {$a^nb^nc^n$ | n >= 0} não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja s = $a^pb^pc^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há três situações:

- v e y contêm o mesmo símbolo (só a’s, só b’s, ou só c’s)

  a...ab..bc..c
  vxy completamente em **uma** dessas cores

- v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

  a...ab..bc..c — vxy completamente na área laranja
  a...ab..bc..c — vxy completamente na área laranja

  - v contém apenas um símbolo (ex. a) e y contém apenas um outro símbolo (ex. b)

    a...ab..bc..c
    v y ou v y

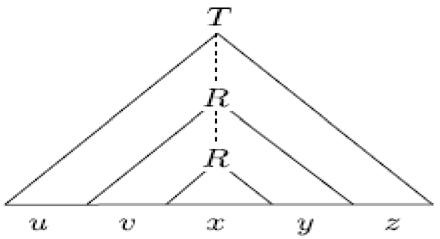
  - v ou y misturam dois símbolos

    v mistura a/b e y só tem b, ou
    v só a e y mistura a/b, ou
    v mistura b/c e y só tem c, ou
    v só tem b e y mistura b/c

O que acontece em cada caso?

Profa. Ariane Machado Lima

Exemplo 1



Prove que B = {$a^n b^n c^n$ | n >= 0} não é livre de contexto

1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

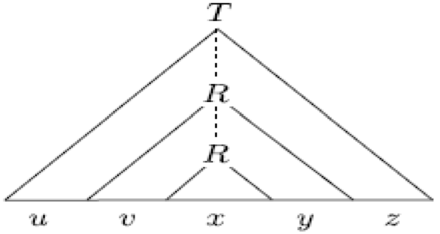
Seja s = $a^p b^p c^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há três situações:

- v e y contêm o mesmo símbolo (viola proporção entre a's, b's e c's)
- v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)
  - v contém apenas um símbolo (ex. a) e y contém apenas um outro símbolo (ex. b)
  - v ou y misturam dois símbolos

O que acontece em cada caso?

Exemplo 1



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que B = $\{a^nb^nc^n \mid n >= 0\}$ não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

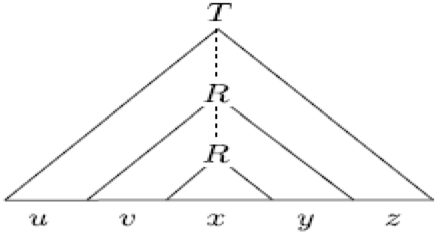
Seja s = $a^pb^pc^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há três situações:

- v e y contêm o mesmo símbolo (viola proporção entre a's, b's e c's)
- v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)
  - v contém apenas um símbolo (ex. a) e y contém apenas um outro símbolo (ex. b) (mesmo que |v| = |y|, viola a proporção em relação ao terceiro símbolo)
  - v ou y misturam dois símbolos

O que acontece em cada caso?

Exemplo 1



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que B = $\{a^nb^nc^n \mid n >= 0\}$ não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja s = $a^pb^pc^p$

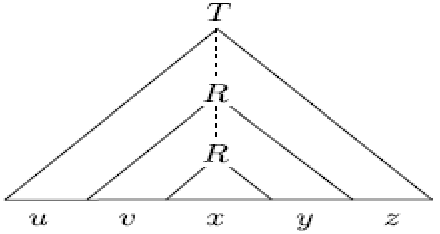
Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há três situações:

- v e y contêm o mesmo símbolo (viola proporção entre a's, b's e c's)
- v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)
  - v contém apenas um símbolo (ex. a) e y contém apenas um outro símbolo (ex. b) (mesmo que |v| = |y|, viola a proporção em relação ao terceiro símbolo)
  - v ou y misturam dois símbolos (viola a ordem)

O que acontece em cada caso?

Profa. Ariane Machado Lima

Exemplo 1



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que B = $\{a^nb^nc^n \mid n >= 0\}$ não é livre de contexto

Assuma que B é LLC, então vale Lema do Bombeamento

Seja s = $a^pb^pc^p$

Note que vxy pode estar qualquer posição (diferentemente do lema para linguagens regulares), mas no caso desta cadeia há três situações:

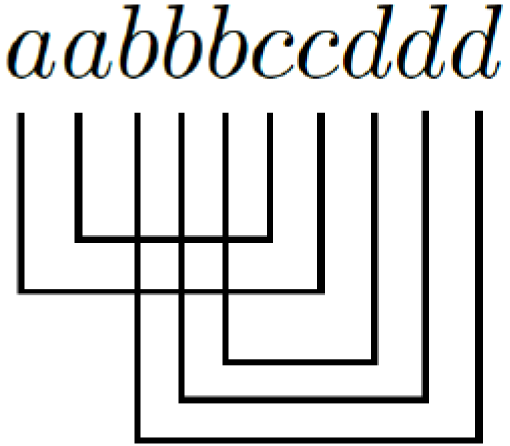
- v e y contêm o mesmo símbolo (viola proporção entre a’s, b’s e c’s)
- v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)
    - v contém apenas um símbolo (ex. a) e y contém apenas um outro símbolo (ex. b) (mesmo que |v| = |y|, viola a proporção em relação ao terceiro símbolo)
    - v ou y misturam dois símbolos (viola a ordem)

isto é, a cadeia resultante não pertence a B em TODAS as possíveis divisões → CONTRADIÇÃO !!!

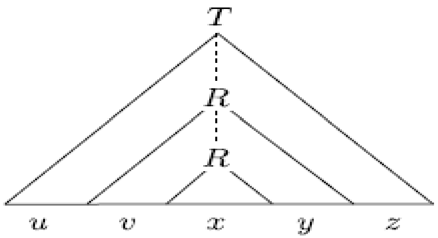
Observação

Obs: Linguagens com dependências cruzadas NÃO são livres de contexto

L = {$a^n b^m c^n d^m$| m,n >= 0} não é livre de contexto



Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

   1a) vxy só tem a's:

   1b) vxy só tem b's:

   1c) vxy só tem c's:

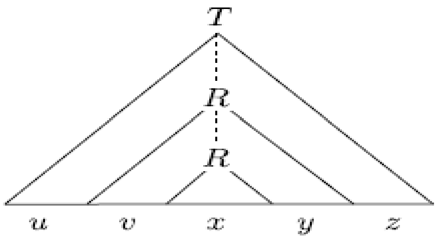
2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

   2a) v contém apenas a’s e y contém apenas b’s:

   2b) v contém apenas b’s e y contém apenas c’s:

   2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

   1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

   1b) vxy só tem b's:

   1c) vxy só tem c's:

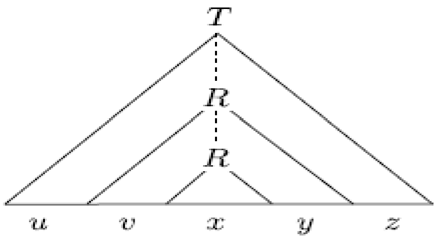
2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

   2a) v contém apenas a's e y contém apenas b's:

   2b) v contém apenas b's e y contém apenas c's:

   2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

1c) vxy só tem c's:

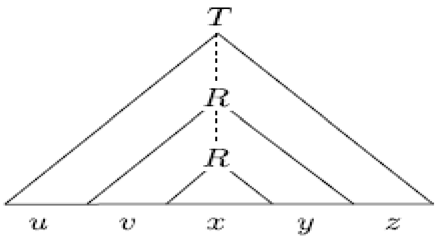
2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

2a) v contém apenas a’s e y contém apenas b’s:

2b) v contém apenas b’s e y contém apenas c’s:

2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

  1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

  1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

  1c) vxy só tem c's: uv^0xy^0z = uxz contém menos c's do que a's ou b's

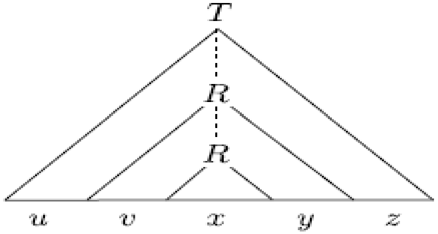
2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

  2a) v contém apenas a's e y contém apenas b's:

  2b) v contém apenas b's e y contém apenas c's:

  2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

  1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

  1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

  1c) vxy só tem c's: uv^0xy^0z = uxz contém menos c's do que a's ou b’s

2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

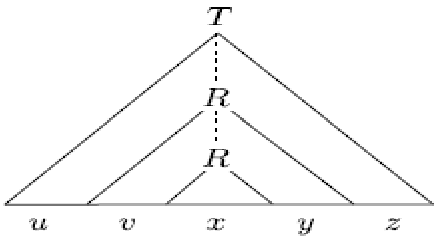
  2a) v contém apenas a’s e y contém apenas b’s: mesmo que |v| <= |y|,

   uv^2xy^2z contém menos c’s do que b’s e a’s

  2b) v contém apenas b’s e y contém apenas c’s:

  2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = $\{a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k$\}$ não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

   1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

   1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

   1c) vxy só tem c's: uv^0xy^0z = uxz contém menos c's do que a's ou b's

2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

   2a) v contém apenas a's e y contém apenas b's: mesmo que |v| <= |y|,

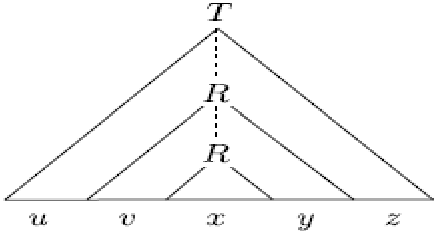
   uv^2xy^2z contém menos c's do que b's e a's

   2b) v contém apenas b's e y contém apenas c's: mesmo que |v| <= |y|,

   uv^0xy^0z contém menos b's e c's do que a's

   2c) v e/ou y misturam dois símbolos:

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

   1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

   1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

   1c) vxy só tem c's: uv^0xy^0z = uxz contém menos c's do que a's ou b's

2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

   2a) v contém apenas a's e y contém apenas b's: mesmo que |v| <= |y|,

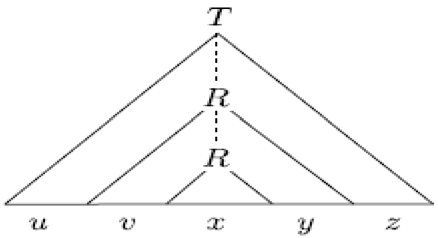
   uv^2xy^2z contém menos c's do que b's e a's

   2b) v contém apenas b's e y contém apenas c's: mesmo que |v| <= |y|,

   uv^0xy^0z contém menos b's e c's do que a's

   2c) v e/ou y misturam dois símbolos: viola a ordem

Exemplo 2 - EXERCÍCIO



1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Prove que C = {$a^ib^jc^k$ | 0 <= i <= j <= k} não é livre de contexto

Assume C é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $a^pb^pc^p$

A cadeia é a mesma do ex 1, mas para essa ling. considerar **6 situações**:

1) v e y contêm o mesmo símbolo

  1a) vxy só tem a's: uv^2xy^2z contém mais a's que b's

  1b) vxy só tem b's: uv^0xy^0z = uxz contém menos b's do que a's

  1c) vxy só tem c's: uv^0xy^0z = uxz contém menos c's do que a's ou b's

2) v e y contêm DOIS símbolos diferentes (a e b, ou b e c)

  2a) v contém apenas a's e y contém apenas b's: mesmo que |v| <= |y|,

    uv^2xy^2z contém menos c's do que b's e a's

  2b) v contém apenas b's e y contém apenas c's: mesmo que |v| <= |y|,

    uv^0xy^0z contém menos b's e c's do que a's

  2c) v e/ou y misturam dois símbolos: viola a ordem

isto é, a cadeia resultante não pertence a B em TODAS as possíveis divisões → CONTRADIÇÃO !!!

Exemplo 3

Prove que $D = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ não é livre de contexto

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w ϵ {0,1}* } não é livre de contexto

TENTE FAZER ANTES

DE OLHAR A RESPOSTA!!!!

Exemplo 3

Prove que D = { w w | w є {0,1}* } não é livre de contexto

Assume D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

$S = 0^p1^p0^p1^p$

–

–

–

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w є {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

$S = 0^p1^p0^p1^p$ Note que $|vxy| <= p$

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$): ao bombear para cima (ou para baixo) vai empurrar 1's para a segunda metade (ou 0's para a primeira metade)
  - O inverso vale para se estiver totalmente na segunda metade ($0^p1^p0^p1^p$)
  - Se passar pela metade de S ($0^p1^p0^p1^p$), quando se bombeia para baixo (uv^0xy^0z), uxz tem a forma $0^p1^i0^j1^p$ sendo i e j diferente de p, e portanto $0^p1^i \neq 0^j1^p$

Contradição!

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w ϵ {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $0^p1^p0^p1^p$ Note que |vxy| <= p

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$):
  -
  -

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w є {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $0^p1^p0^p1^p$ Note que |vxy| <= p

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$):
  -
  -

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w ϵ {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

$S = 0^p1^p0^p1^p$ Note que $|vxy| <= p$

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$:
  - $0^p1^p0^p1^p$:
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$):
  -
  -

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w є {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $0^p1^p0^p1^p$ Note que |vxy| <= p

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$:
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$):
  -
  -

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w ϵ {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $0^p1^p0^p1^p$ Note que |vxy| <= p

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$):
  -
  -

Profa. Ariane Machado Lima

Exemplo 3

Prove que D = { ww | w є {0,1}* } não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

S = $0^p1^p0^p1^p$ Note que |vxy| <= p

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$): ao bombear para cima (ou para baixo) vai empurrar 1's para a segunda metade (ou 0's para a primeira metade)
  - se estiver totalmente na segunda metade ($0^p1^p0^p1^p$)
  -

Exemplo 3

Prove que $D = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

$S = 0^p1^p0^p1^p$ Note que $|vxy| <= p$

- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$): ao bombear para cima (ou para baixo) vai empurrar 1's para a segunda metade (ou 0's para a primeira metade)
  - O inverso vale para se estiver totalmente na segunda metade ($0^p1^p0^p1^p$)
  -

Exemplo 3

Prove que $D = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ não é livre de contexto

Assuma D é LLC, então vale Lema do Bombeamento

$S = 0^p1^p0^p1^p$ Note que $|vxy| <= p$

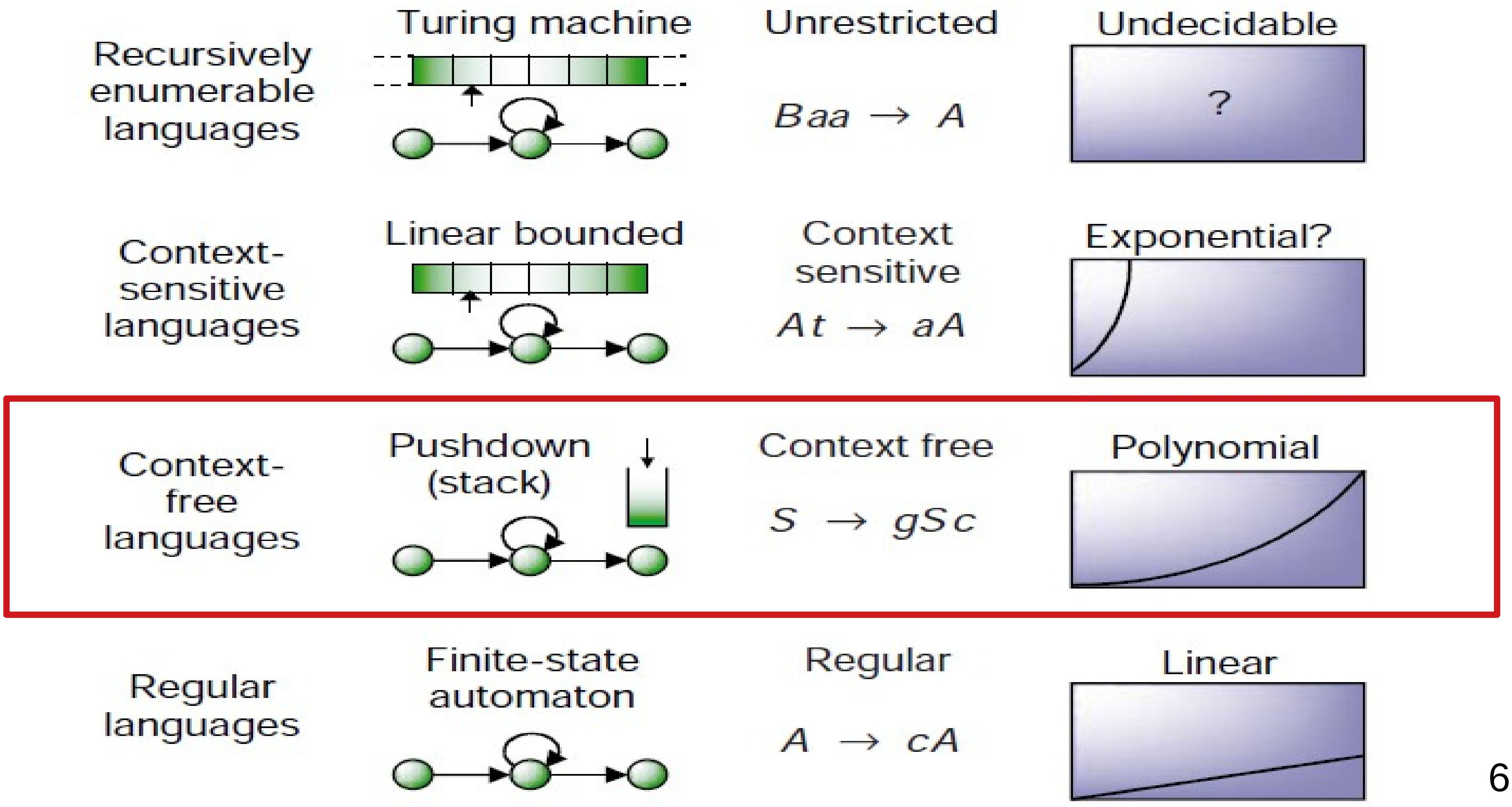
- Se vxy tiver o mesmo símbolo vai quebrar a duplicação (a primeira metade vai ficar diferente da segunda):
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá parte da 2ª série de 0's no final da 1ª metade, e não terá 0's no final da 2ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
  - $0^p1^p0^p1^p$: uv^0xy^0z terá a 1ª série de 1's no início da 2ª metade, e não terá 1's no início da 1ª metade
- Se vxy misturar símbolos: $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$ ou $0^p1^p0^p1^p$
  - se estiver totalmente na primeira metade ($0^p1^p0^p1^p$): ao bombear para cima (ou para baixo) vai empurrar 1's para a segunda metade (ou 0's para a primeira metade)
  - O inverso vale para se estiver totalmente na segunda metade ($0^p1^p0^p1^p$)
  - Se passar pela metade de S ($0^p1^p0^p1^p$), quando se bombeia para baixo (uv^0xy^0z), uxz tem a forma $0^p1^i0^j1^p$ sendo i e j diferente de p, e portanto $0^p1^i \neq 0^j1^p$

Contradição!

Exercícios do Sipser

Problemas 2.30, 2.33

Linguagens, modelos computacionais (dispositivos, gramáticas) e suas complexidades



ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 16

Cap. 2.3 – Linguagens não livres de contexto

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br