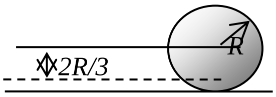
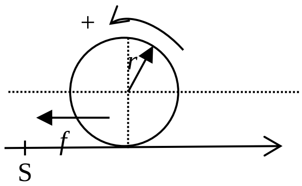


12. (Tipler Cap 9, E 107) Uma bola de bilhar inicialmente em repouso, recebe um golpe seco do taco. A força aplicada é horizontal e está à distância 2R/3 abaixo da linha central, como mostra a figura ao lado. A velocidade inicial da bola é v_0 e o coeficiente de atrito cinético é μ_k. a) Qual é a velocidade angular inicial ω_0? b) Que velocidade tem a bola no instante em que principia a rolar sem escorregar? c) Qual a energia cinética inicial da bola? d) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa?

a) Utilizaremos a solução do problema anterior, sabendo que a velocidade inicial é v_0. Por comparação com o problema anterior, sendo h a distância do solo até a posição onde bate o taco, e sendo a distância fornecida a partir do centro da bola, $h=R-2/3R=R/3$.Este dado de h, lembremos, é a distância do ponto onde é aplicada a tacada até o solo. A expressão $(h-r)$ do exercício anterior representa o braço de alavanca d~~o torque, que~~ neste exercício é fornecida diretamente.



b) As forças que atuam sobre a bola são: o peso, a normal e a força de atrito.

Aplicando a 2ª lei de Newton à translação do CM no referencial solo após a tacada, a única força que atua na direção do deslocamento é a de atrito, cujo módulo é: $f=\mu mg$

$$\sum \vec{F}=m\vec{a}_{CM} \rightarrow (-f)=ma_{CM} \Rightarrow a_{CM}=\frac{(-f)}{m}. \quad (1)$$

Desde o ponto de vista da rotação que é acelerado:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \rightarrow (-f)R = I\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{(-f)R}{I}=\frac{(-f)R}{\frac{2}{5}mR^2}=\frac{5(-f)}{2mR}, \quad (2)$$

As velocidades linear e angular enquanto o tempo $t < t_r$ (tempo de rolamento sem escorregamento) dependerão das acelerações correspondentes, assim:

$$v_{CM(S)}=v_0+a_{CM}t=v_0+\frac{(-f)}{m}t \quad (3),$$

e $\omega_{b(CM)}=\omega_0+\alpha t=\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}+\frac{5}{2}\frac{(-f)}{mR}t$ (4)

As expressões (3) e (4) relacionam v e ω para tempos iguais.

Assim de (3) $v-v_0=\frac{(-f)}{m}t \Rightarrow t=\frac{(v-v_0)m}{(-f)}$ (5), que substituindo em (4),

$$\omega=\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}+\frac{5}{2}\frac{(-f)}{\cancel{m}R}\frac{(v-v_0)\cancel{m}}{(-f)}=\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}+\frac{5}{2}\frac{(v-v_0)}{R}=$$

$$=\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}+\frac{5\ v}{2R}-\frac{5\ v_0}{2R}=\frac{v_0}{R}\frac{10-15}{6}+\frac{5\ v}{2R}=$$

$$=-\frac{5}{6}\frac{v_0}{R}+\frac{5\ v}{2R}=\frac{5}{2R}\left(v-\frac{1}{3}v_0\right) \quad (6)$$

Relação que vale para qualquer t entre 0 e t_r. Onde t_r é o tempo do início do rolamento sem escorregamento.

A condição de rolamento sem escorregamento, respeitando os sinais dos referenciais adotados,

$$s_{CM(S)}=-\theta_{b(CM)}R;$$

$$v_{CM(S)}=-\omega_{b(CM)}R;$$

$$a_{CM(S)} = -\alpha_{b(CM)}R \qquad (7). \quad \text{So para } t \geq t_r.$$

No instante em que principia a rodar sem escorregar $v_r = -\omega_r R$. Substituindo ω obtido da expressão (6),

$$v_r = -\left[-\frac{5}{6}\frac{v_0}{R} + \frac{5}{2}\frac{v_r}{R}\right]R = \frac{5}{6}v_0 - \frac{5}{2}v_r = -\frac{5}{2}v_r + \frac{5v_0}{6}$$

$$v_r\left(1 + \frac{5}{2}\right) = +\frac{5}{6}v_0 \Rightarrow v_r\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{6}v_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{5}{6}\frac{2}{7}v_0 = \frac{5}{21}v_0 \qquad (8)$$

Substituindo o valor da velocidade de translação *v* pelo valor da velocidade de translação no rolamento, v_r, na expressão (6).

$$\omega_r = \frac{5}{2R}\left(v_r - \frac{1}{3}v_0\right) = \frac{5}{2R}\left(\frac{5}{21}v_0 - \frac{1}{3}v_0\right) = -\frac{5v_0}{2R}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{21}\right) = -\frac{5v_0}{2R}\left(\frac{2}{21}\right) = -\frac{5v_0}{21R} \qquad (9)$$

Observem as expressões (8) e (9) valem $v_r = -\omega_r R$.

Que era de esperar por ser $\omega_{b(CM)} = -\frac{v_{CM(S)}}{R}$

Com esses dados podemos encontrar o tempo de rolamento da expressão (5):

$$t_r = \frac{(v_r - v_0)m}{(-f)} = \frac{\left(\frac{5}{21}v_0 - v_0\right)m}{(-f)} = -\frac{16}{21}\frac{v_0\ m}{(-f)} \ (10)$$

c) Qual a energia cinética inicial da bola?

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{5}{3}\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{5}mv_0^2\frac{25}{9}$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mv_0^2\frac{5}{9} = \frac{1}{2}mv_0^2\left(1 + \frac{10}{9}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{9+10}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{19}{9}\right) = \frac{19}{18}mv_0^2 = \frac{19}{2\cdot 9}mv_0^2 = 1{,}05556mv_0^2$$

d) Que trabalho efetuou a força de atrito enquanto a bola escorregava sobre a mesa?

$$W_f = \Delta K = K_f - K_i$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}I\omega_r^2 = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_r^2\left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}mv_r^2\left(\frac{7}{5}\right)$$

$$K_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{5}{21}v_0\right)^2\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{2}m\frac{25}{21\cdot 21}\frac{7}{5}v_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{5}{21\cdot 3}v_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{5}{63}v_0^2 = \frac{5}{126}mv_0^2$$

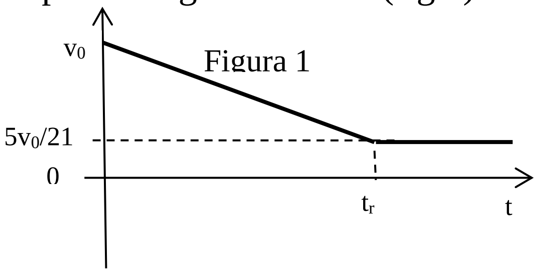
$$= 0{,}0396mv_0^2$$

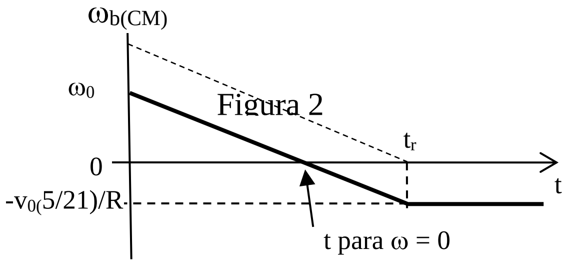
$$\therefore W = \frac{1}{2}m\frac{5}{63}v_0^2 - \frac{19}{2\cdot 9}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\frac{1}{9}\left(\frac{5}{7} - 19\right) = \frac{1}{2}mv_0^2\frac{1}{9}\left(\frac{5 - 7*19}{7}\right) =$$

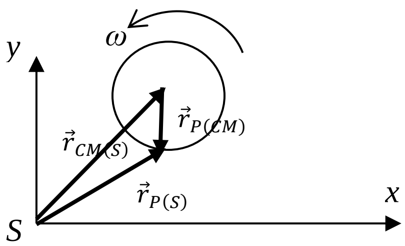
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{9}mv_0^2\left(\frac{5-133}{7}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{9}mv_0^2\left(\frac{128}{7}\right) = -\frac{128}{63}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = -1{,}0159mv_0^2$$

Este resultado, apesar de estar correto, é obscuro, não nos mostra a física que há no decorrer do escorregamento, nem como realmente agen esse trabalho do atrito. Por isso segue a **outra forma de obter o trabalho do atrito** que resulta em encontrar o trabalho da força do atrito que surge do produto escalar de *(-f)* e d. Assim: $w_f = \vec{f}\cdot\vec{d} = -fd$ porque a velocidade de translação é positiva o tempo todo.

Como podemos verificar a distância percorrida num movimento uniformemente acelerado?
"Área entre a curva da velocidade em função do tempo, e o eixo do tempo"!!!
Desta maneira, para a distância percorrida pelo CM (fig 1)
ou para o ângulo descrito (fig 2)







Localizando dois referenciais, o do CM e o referencial solo, podemos observar que:

$$\vec{v}_{p(S)} = \vec{v}_{p(CM)} + \vec{v}_{CM(S)}\ ,\ (11)$$

onde $\vec{v}_{p(S)}$ é a velocidade do ponto de contato.
Quando roda sem escorregar, se deve satisfazer a relação:
$v_{p(CM)} = \omega_{CM} R$, como tínhamos expressado em (7), sendo ω_{CM} a velocidade de rotação da bola em relação ao CM. Substituindo (7) em (11),
$v_{p(S)} = \omega_{(CM)} R + v_{CM(S)}$, onde o primerio somando é positivo porque o ω primeiro é positivo, depois zero e finalmente negativo antes de rolar sem escorregar. Mas, como estamos analisando o ponto *p*, a bola escorrega no sentido positivo do *x*, assim:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx_{p(S)}}{dt} = \omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)} \Rightarrow dx_{p(S)} = \left(\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}\right) dt$$

Integrando a ambos lados da expressão anterior,

$$\Delta x_{p(S)} = \int \left(\omega_{b(CM)} R + v_{CM(S)}\right) dt$$

Agora, sabemos que podemos obter o quanto se deslocou um corpo quando está uniformemente acelerado e se conhecem a velocidade inicial, a velocidade final e o tempo percorrido. Pode ser obtido como a área sob a curva de *v(t)*, assim, da primeira figura e da equação $t = \frac{(v - v_0)m}{(-f)}$, para $t = t_r$, $t_r = -\frac{16}{21} \frac{v_0\ m}{(-f)}$ por (10),

$$\Delta x_{CM(S)} = \left(\frac{\frac{5}{21} v_o + v_o}{2}\right) t_r = \left(\frac{\frac{5+21}{21} v_o}{2}\right) \left(-\frac{16}{21}\right) \frac{v_o m}{(-f)} =$$

$$= \left(\frac{26 v_o}{2 \cdot 21}\right) \left(-\frac{16}{21}\right) v_o \frac{m}{(-f)} = -\frac{16 * 13}{21^2} v_o^2 \frac{m}{(-f)}$$

Por outro lado, enquanto o corpo desliza na horizontal, a roda gira inicialmente com ω positivo, passa por zero e finaliza com ω negativo. Observando a figura 2, vemos que também se trata de um movimento uniformemente acelerado. Podemos calcular o ângulo descrito por:

$\varDelta\theta_{b(CM)} = \left(\frac{\omega_f+\omega_0}{2}\right)\varDelta t = \frac{-\frac{5}{21}\frac{v_0}{R}+\frac{5v_0}{3R}}{2} \cdot t_r$ substituindo o tempo de rolamento por (10),

$$\varDelta\theta_{b(CM)} = \frac{\frac{-5+35v_0}{21 \quad R}}{2}\left(-\frac{16}{21}\frac{v_0\ m}{(-f)}\right) = \frac{30v_0}{21\cdot 2R}\cdot\left(-\frac{16}{21}\frac{v_0\ m}{(-f)}\right) =$$
$$= \frac{15v_0}{21R}\left(-\frac{16}{21}\frac{v_0\ m}{(-f)}\right) = -\frac{15\cdot 16}{21\cdot 21(-f)R}mv_0^2 = -\frac{5\cdot 16}{21\cdot 7(-f)R}mv_0^2$$

$\varDelta\theta_{b(CM)} = -\frac{80}{147}\frac{mv_0^2}{(-f)R}$ dado que $\varDelta S_{p(S)} = \varDelta\theta_{b(CM)}.R$,

$$\varDelta S_{p(S)} = \varDelta\theta_{b(CM)}R \Rightarrow \varDelta S_{p(S)} = \left(-\frac{80}{147}\frac{v_o^2 m}{(-f)R}\right)R \Rightarrow \varDelta S_{p(S)} = -\frac{80}{147}\frac{v_o^2 m}{(-f)}$$

Desta maneira, a distância percorrida pelos dois movimentos será:

$$d = \varDelta x + \varDelta S = -\frac{16\cdot 13}{21^2}v_o^2\frac{m}{(-f)} - \frac{80}{147}\frac{v_o^2 m}{(-f)} =$$
$$= \frac{-16\cdot 13 - 80\cdot 3}{21^2}\frac{v_o^2 m}{(-f)} = \frac{-208-240}{21^2}\frac{v_o^2 m}{f} =$$
$$= -\frac{448}{21^2}\frac{v_o^2 m}{(-f)} = -1{,}0159\frac{v_o^2 m}{(-f)}$$

e o trabalho da forca,

$$(-f).d = (-f)*\left(-\frac{448}{21^2}\frac{m}{(-f)}v_0^2\right) = -\frac{448}{21^2}mv_0^2 = -1.0159mv_0^2$$

Que resulta na mesma intensidade que a obtida pela diferença das energias cinéticas do início e fim do escorregamento.