

Problemas de Valores Iniciais e de Fronteira

Método da Separação de Variáveis

A Condição de Dirichlet

Primeiramente, vamos considerar a condição homogênea de Dirichlet para a equação das ondas

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

com dados iniciais

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

onde $\ell > 0$.

Vamos usar o método de separação de variáveis para encontrar a solução do problema.

Passo 1. Procurar soluções que sejam da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

Substituindo na equação da onda (1), obtemos

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t).$$

Dividindo por $-c^2X(x)T(t)$,

$$-\frac{T''}{c^2T} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Esta identidade define a quantidade λ , que deve ser uma constante. (Esta é uma identidade entre uma função apenas da variável t e uma função apenas da variável x . Isso só é possível se ambos os lados forem iguais a uma constante comum, digamos λ .)

As equações acima são um par de equações diferenciais ordinárias para $X(x)$ e $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{e} \quad T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0. \quad (5)$$

Impondo agora que $u(x, t)$ dada por (4) satisfaça as condições de fronteira (2), obtemos

$$X(0) = X(\ell) = 0, \quad (6)$$

ou seja, temos um problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(\ell) = 0 \end{cases}$$

Passo 2. Solução do problema de autovalores.

Há três possibilidades:

- Se $\lambda = 0$, $X(x) = A + Bx$ e as condições (6) implicam $A = B = 0$.
- Se $\lambda = \lambda < 0$, $X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$ e novamente as condições (6) implicam $A = B = 0$.
- Finalmente, se $\lambda = \beta^2 > 0$, $X(x) = A \sin \beta x + B \cos \beta x$. Ao impor as condições (6), temos

$$X(0) = B = 0, \quad X(\ell) = A \sin \beta \ell = 0$$

sendo A constante real arbitrária e $\beta \ell = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$

Apenas o terceiro caso fornece soluções diferentes de zero, do tipo

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad X_n = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Passo 3. Com os valores λ_n , a equação diferencial ordinária na variável t em (5) tem como solução geral

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell}$$

Obtemos assim uma família de soluções

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

com constantes arbitrárias A_n e B_n . Cada um dos Um representa um possível movimento da corda, conhecido como n -ésimo modo de vibração ou n -harmônico, e representa uma onda estacionária de frequência $n\pi c/2\ell$ (em alguns textos, a frequência é $nc/2\ell$.) O primeiro harmônico e sua frequência $c\pi/2\ell$, o mais baixo, é chamado de fundamental, enquanto as outras frequências são múltiplos inteiros do fundamental.

Passo 4. Se as condições iniciais forem do tipo

$$u(x, 0) = A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = B_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

então a solução do nosso problema é exatamente u_n e a corda vibra em seu n -ésimo harmônico. Em geral, a ideia é construir a solução sobrepondo os harmônicos infinitos u_n por meio da série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (7)$$

onde os coeficientes A_n e B_n devem ser escolhidos de modo que as condições iniciais

$$\Phi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (8)$$

$$\Psi(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9)$$

estejam satisfeitas para $0 \leq x \leq \ell$.

Então perguntamos que tipo de pares de dados Φ , Ψ podem ser expandidos como em (8), (9) para alguma escolha de coeficientes A_n , B_n ?

Responderemos esta questão quando formos estudar as séries de Fourier. A série em (8) é chamada de série de Fourier de senos de Φ em $(0, \ell)$. A série (9) é o mesmo tipo de série para Ψ que (8) é para Φ .

Vamos seguir em frente para ver quais são suas implicações. O que mostramos por ora é simplesmente que se (8) e (9) são válidas, então a série infinita (7) deve ser a solução do problema (1), (2), (3).

O problema análogo para a equação de difusão é

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (10)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (12)$$

Para resolver este problema, separamos as variáveis como antes e desta vez obtemos

$$-\frac{T'}{kT} = -\frac{X''}{X} = \lambda \text{ (constante).}$$

Portanto, $T(t)$ satisfaz a equação $T'(t) = -\lambda kT(t)$, cuja solução é $T(t) = Ae^{-\lambda kt}$. Além disso,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(\ell) = 0.$$

Este é precisamente o mesmo problema para $X(x)$ de antes e, portanto, tem as mesmas soluções.

Assim,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/\ell)^2 kt} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (13)$$

deve ser a solução de (10), (11), (12) desde que

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (14)$$

Mais uma vez, a solução é expressa para cada t como uma série de Fourier de senos em x , desde que o dado inicial o seja.

Três perguntas surgem naturalmente, as quais serão respondidas depois do estudo das séries de Fourier.

Q1. É possível escolher as constantes A_n de modo que (14) seja válida? Em qual sentido u satisfaz a condição inicial? Por exemplo, é verdade que $u(x, t) \rightarrow \Phi(x)$ se $(x, t) \rightarrow (x, 0)$?

Q2. Cada função u_n é individualmente uma solução da equação de difusão, mas u também será? Para verificar isso, seria necessário diferenciar sob o sinal da série para que:

$$(\partial_t - k\partial_{xx})u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\partial_t - k\partial_{xx})u_n(x, t) = 0.$$

Q3. Mesmo supondo que tudo corra bem, temos certeza de que u é a única solução para o problema?

A Condição de Neumann

O método da separação de variáveis funciona bem para a condição de fronteira de Neumann. No primeiro caso, a condição (2) é substituída por

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Então as autofunções são as soluções $X(x)$ não nulas de

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(\ell) = 0, \quad (15)$$

Como antes, vamos primeiro procurar os autovalores positivos $\lambda\beta^2 > 0$. Nesse caso, $X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x$, de modo que

$$X'(x) = -C\beta \sin \beta x + D\beta \cos \beta x.$$

A primeira condição em (15) implica $0 = X'(0) = D\beta$, de modo que $D = 0$, e a segunda condição que $0 = X'(\ell) = -C\beta \sin \beta\ell$. Como não queremos $C = 0$, pois do contrário $X(x)$ seria identicamente nula, devemos ter $\beta = n\pi/\ell$, $n = 1, 2, \dots$

Em seguida, vamos verificar se zero é um autovalor. Tome $\lambda = 0$ na EDO em (15). Então $X''(x) = 0$, de modo que $X(x) = C + Dx$ e $X'(x) = D$. As condições de contorno de Neumann são satisfeitas se $D = 0$. C pode ser qualquer número diferente de zero. Portanto, $\lambda = 0$ é um autovalor, e qualquer função constante não nula é sua autofunção.

Se $\lambda < 0$, pode-se mostrar diretamente, como no caso de Dirichlet, que não há autofunção. Portanto, a lista de todos os autovalores e autofunções é

$$\text{Autovalores: } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{Autofunções: } X_0(x) = 1, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{\ell} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Então, o problema de valores iniciais e de fronteira com condição de Neumann

$$u_t = ku_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (16)$$

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (18)$$

tem a solução

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi/\ell)^2 kt} \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (19)$$

desde que

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (20)$$

O primeiro termo em (19) e (20), o qual vem do autovalor $\lambda = 0$, é escrito separadamente na forma $A_0/2$ somente por conveniência como veremos depois. A série em (20) é chamada de série de Fourier de cossenos de Φ em $(0, \ell)$.

Qual é o comportamento de $u(x, t)$ quando $t \rightarrow \infty$? Uma vez que todos, exceto o primeiro termo em (20) contém um fator de decaimento exponencial, a solução decai rapidamente para o primeiro termo $A_0/2$, que é apenas uma constante. Como essas condições de contorno correspondem ao isolamento em ambas as extremidades, isso concorda perfeitamente com nossa intuição de que a solução “se espalha”. (Para realmente provar que o limite quando $t \rightarrow \infty$ é dado termo a termo em (20) requer o uso de um dos teoremas de convergência a ser estudado e por omitimos esta verificação aqui.)

Considere o PVIF para a onda com condição de Neumann

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \quad (21)$$

$$u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (22)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, 0) = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (23)$$

O autovalor $\lambda = 0$ então leva a $X(x) = \text{constante}$ e a equação diferencial $T''(t) = \lambda c^2 T(t) = 0$ tem a solução $T(t) = A + Bt$. Portanto, a solução da equação da onda com condições de Neumann tem a solução

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{\ell} \right) \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

Então os dados iniciais devem satisfazer

$$\Phi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (24)$$

e

$$\Psi(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{\ell} B_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (25)$$

A Condição de Robin

Vamos considerar agora problema de autovalor

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad (26)$$

$$X'(0) - a_0 X(0) = 0, \quad (27)$$

$$X'(\ell) + a_\ell X(\ell) = 0, \quad (28)$$

onde a_0 e a_ℓ são constantes.

A razão matemática para escrever as constantes dessa maneira é que o vetor normal unitário exterior do intervalo $0 \leq x \leq \ell$ aponta para a esquerda em $x = 0$ ($\vec{n} = -1$) e para a direita em $x = \ell$ ($\vec{n} = +1$).

A razão física pela qual eles são escritos com sinais opostos é que eles correspondem à radiação de energia se a_0 e a_ℓ forem positivos, absorção de energia se a_0 e a_ℓ forem negativos, e isolamento se $a_0 = a_\ell = 0$. Esta é a interpretação para um problema de calor. Veja Exercício 6.

Para o caso da corda vibrante, a interpretação é que a corda compartilha sua energia com as extremidades se a_0 e a_ℓ forem positivos, enquanto a corda ganha alguma energia das extremidades a_0 e a_ℓ forem negativos. Veja o Exercício 7.

Autovalores Positivos

Primeiro, vamos procurar os autovalores positivos $\lambda = \beta^2 > 0$. Nesse caso, a solução geral da EDO (26) é

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x \quad (29)$$

Por (27) e (28), obtemos

$$\beta D - a_0 C = 0 \quad (30)$$

$$(\beta D + a_\ell C) \cos \beta \ell + (-\beta C + a_\ell D) \sin \beta \ell = 0. \quad (31)$$

Por (30), $D = a_0 C / \beta$. Substituindo D em (31), temos

$$0 = (a_0 C + a_\ell C) \cos \beta \ell + \left(-\beta C + \frac{a_\ell a_0 C}{\beta} \right) \sin \beta \ell. \quad (32)$$

Dividindo por $C \cos \beta \ell$ e multiplicando por β , obtemos

$$(\beta^2 - a_0 a_\ell) \tan \beta \ell = (a_0 + a_\ell) \beta. \quad (33)$$

Qualquer raiz $\beta > 0$ da equação (33) dá um autovalor $\lambda = \beta^2$, com autofunção correspondente dada por

$$X(x) = C \left(\cos \beta x + \frac{a_0}{\beta} \sin \beta x \right) \quad (34)$$

para qualquer $C \neq 0$. A propósito, como dividimos por $\cos \beta l$, existe o caso excepcional em que $\cos \beta l = 0$, e por (32) que $\beta = \sqrt{a_0 a_\ell}$.

Nossa próxima tarefa é resolver (33) para β . Isso não é tão fácil, pois não há fórmula simples. Uma maneira é calcular as raízes numericamente, digamos pelo método de Newton. Outra forma é pela análise gráfica, que, em vez de valores numéricos, fornecerá muitas informações qualitativas. Isso é o que faremos. É aqui que a natureza de a_0 e a_ℓ entra em jogo. Reescrevemos a equação de autovalor (33) como

$$\tan \beta l = \frac{(a_0 + a_\ell)\beta}{\beta^2 - a_0 a_\ell} \quad (35)$$

Case 1. $a_0 > 0$ e $a_\ell > 0$ (radiação em ambas as extremidades)

Cada um dos pontos de interseção (para $\beta > 0$) fornece um autovalor $\lambda_n = \beta_n^2$. Os resultados dependem muito de a_0 e a_ℓ . Não importa quais sejam, desde que ambos sejam positivos, o gráfico (Figura 1) mostra que

$$n^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} < \lambda_n < (n+1)^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (36)$$

Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda_n - n^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \right) = 0. \quad (37)$$

A situação excepcional, quando $\cos \beta \ell = 0$ e $\beta = \sqrt{a_0 a_\ell}$, ocorrerá quando o gráficos da função tangente e da função racional “se cruzam no infinito” (veja a assíntota vertical na Figura 1).

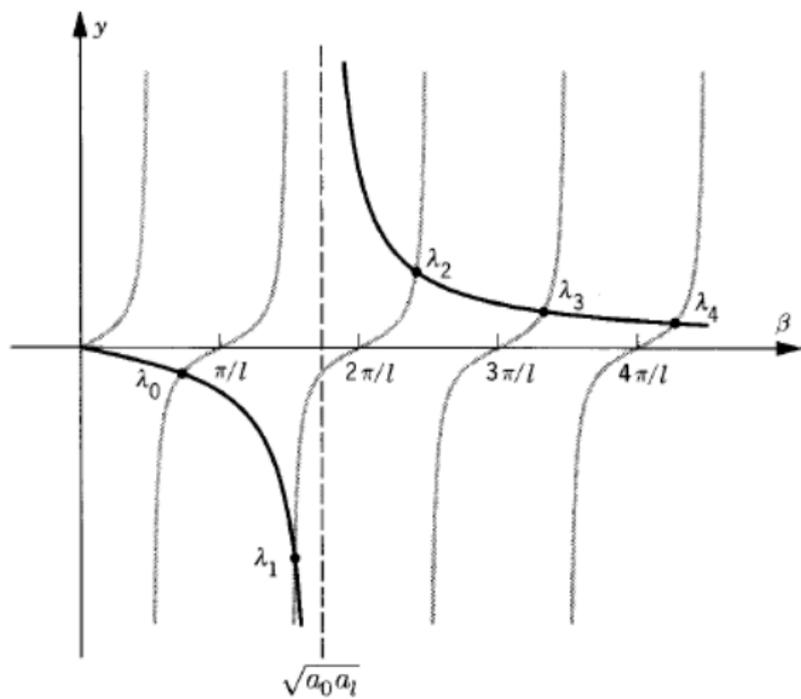


Figure: 1

Case 2. $a_0 < 0$, $a_\ell > 0$, $a_0 + a_\ell > 0$ (absorção em $x = 0$ e radiação em $x = \ell$, mas mais radiação do que absorção)

As Figuras 2 ou 3 mostram os gráficos, dependendo dos tamanhos relativos de a_0 e a_ℓ .

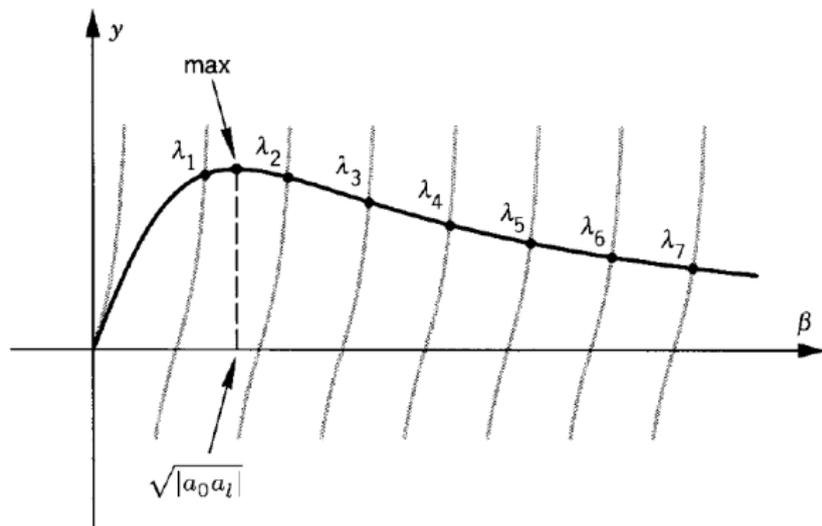


Figure: 2

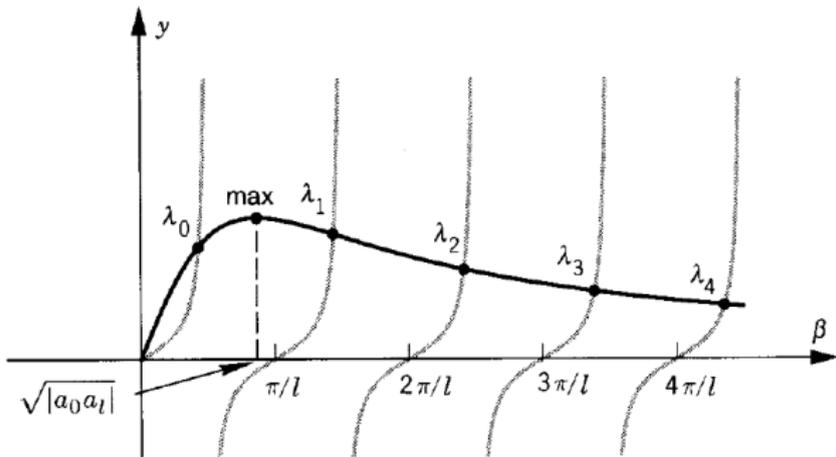


Figure: 3

Mais uma vez vemos que (36) e (37) valem, exceto que na Figura 2 não há autovalor λ_0 no intervalo $(0, \pi^2/\ell^2)$. Existe um autovalor no intervalo $(0, \pi^2/\ell^2)$ apenas se a curva racional cruzar o primeiro ramo da curva tangente. Como a curva racional tem apenas um único máximo, esse cruzamento só pode acontecer se a inclinação da curva racional for maior que a inclinação da curva tangente na origem.

Um cálculo direto mostra que a inclinação $\frac{dy}{d\beta}$ da curva racional na origem é

$$\frac{a_0 + a_\ell}{-a_0 a_\ell} = \frac{a_\ell - |a_0|}{a_\ell |a_0|} > 0$$

pois $a_0 < 0$, $a_\ell > 0$, $a_0 + a_\ell > 0$. Por outro lado, a inclinação da curva tangente $y = \tan \beta$ na origem é $\ell \sec(0) = \ell$. Assim chegamos a seguinte conclusão. Em caso

$$a_0 + a_\ell > -a_0 a_\ell \tag{38}$$

(que significa “muito mais radiação do que absorção”), a curva racional começará na origem com uma inclinação maior que a curva tangente e os dois gráficos devem se cruzar em um ponto no intervalo $(0, \pi/\ell)$. Portanto, concluímos que no Caso 2 existe um autovalor $0 < \lambda_0 < (\pi/\ell)^2$ se, e somente se, (38) for válido.

Outros casos, por exemplo absorção em ambas as extremidades, serão considerados no Exercício 5.

Autovalor Nulo

Neste caso, o Exercício 1 mostra que existe autovalor nulo se, e somente se,

$$a_0 + a_\ell = -a_0 a_\ell \ell. \quad (39)$$

Observe que (39) só pode ocorrer se $a_0 < 0$ ou $a_\ell < 0$ e o intervalo tiver exatamente comprimento $\ell = (a_0 + a_\ell)/(-a_0 a_\ell)$ ou então $a_0 = a_\ell = 0$ (condição de Neumann).

Autovalores Negativos

Escrevemos $\lambda = -\gamma^2 < 0$ e a solução da equação diferencial como

$$X(x) = C \cosh \gamma x + D \sinh \gamma x.$$

(Uma forma alternativa seria $Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$.) Usando as condições de contorno,

$$X'(0) - a_0 X(0) = 0, \quad X'(\ell) + a_\ell X(\ell) = 0$$

obtemos

$$\tanh \gamma \ell = -\frac{(a_0 + a_\ell)\gamma}{\gamma^2 + a_0 a_\ell}. \quad (40)$$

Qualquer ponto de interseção dos gráficos da função $y = \tanh \gamma \ell$ e da função racional $y = -(a_0 + a_\ell)\gamma/(\gamma^2 + a_0 a_\ell)$ para $\gamma > 0$ fornece um autovalor negativo $\lambda = -\gamma^2$ e uma autofunção correspondente

$$X(x) = \cosh \gamma x + \frac{a_0}{\gamma} \sinh \gamma x. \quad (41)$$

Vários casos diferentes são ilustrados na Figura 4.

Assim, no Caso 1, de radiação em ambas as extremidades, quando a_0 e a_ℓ são positivos, não há interseção e, portanto, nenhum autovalor negativo.

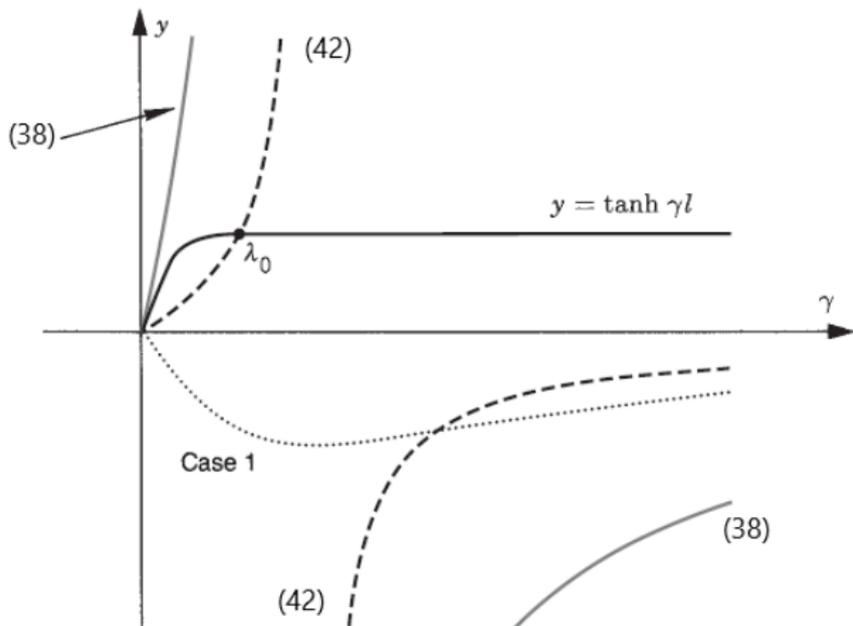


Figure: 4

Caso 2, a situação com mais radiação do que absorção ($a_0 < 0$, $a_\ell > 0$, $a_0 + a_\ell > 0$), é ilustrado pelas duas curvas sólidas (38) e tracejadas (42). Há uma interseção ou nenhuma, dependendo das inclinações na origem. A inclinação da curva $y = \tanh \gamma x$ é ℓ , enquanto a inclinação da curva racional é $-(a_0 + a_\ell)/(a_0 a_\ell) > 0$. Se a última expressão for menor que ℓ , existe um interseção; caso contrário, não há. Portanto, nossa conclusão no Caso 2 é a seguinte: Seja $a_0 < 0$ e $a_\ell > -a_0$. Se

$$a_0 + a_\ell < -a_0 a_\ell \ell, \quad (42)$$

então existe exatamente um autovalor negativo, que chamaremos de $\lambda_0 < 0$. Se

$$a_0 + a_\ell > -a_0 a_\ell \ell \quad (43)$$

vale, então não há autovalor negativo. Observe que o autovalor zero é o caso limítrofe (39); portanto, usamos a notação $\lambda_0 = 0$ no caso de (39).

Resumo para a Condição de Robin

Resumimos os vários casos da seguinte forma:

Caso 1: Somente autovalores positivos.

Caso 2 com (38): Somente autovalores positivos.

Caso 2 com (39): 0 é um autovalor, todos os demais são positivos.

Caso 2 com (42): Um autovalor negativo, todos os demais são positivos.

O Exercício 5 a seguir que fornece um resumo completo de todos os outros casos da condição de Robin.

Como antes, temos uma expansão

$$u(x, t) = \sum_{n=1} T_n(t) X_n(x),$$

onde $X_n(x)$ são as autofunções e

$$T_n(t) = \begin{cases} A_n e^{-\lambda_n kt} & \text{para difusões} \\ A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) & \text{para ondas} \end{cases}$$

Exemplo. Seja $a_0 < 0 < a_0 + a_\ell < -a_0 a_\ell \ell$, que é o Caso 2 com (42). Neste caso existe exatamente um autovalor negativo $\lambda_0 = -\gamma_0^2 < 0$, bem como uma sequência de autovalores positivos $\lambda_n = \beta_n^2 > 0$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. A solução do problema de difusão

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{para } 0 < x < \ell, t > 0 \\ u_x - a_0 u = 0 & \text{para } x = 0, \quad u_x + a_\ell u = 0 \quad x = \ell \\ u = \Phi & \text{para } t = 0 \end{cases}$$

é

$$u(x, t) = A_0 e^{\gamma_0^2 kt} \left(\cosh \gamma_0 x + \frac{a_0}{\gamma_0} \sinh \gamma_0 x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2 kt} \left(\cos \beta_n x + \frac{a_0}{\beta_n} \sin \beta_n x \right). \quad (44)$$

A solução (44) tem a seguinte interpretação física: se $u(x, t)$ é a temperatura em uma barra de comprimento ℓ . O caso considerado é quando a energia é fornecida em $x = 0$ (absorção de energia pela barra, fluxo de calor vai para a haste em sua extremidade esquerda) e quando a energia é irradiada da extremidade direita (o fluxo de calor sai).

Para um determinado comprimento ℓ e a dada a radiação $a_\ell > 0$, existe um autovalor negativo ($\lambda_0 = -\gamma^2 < 0$) se e somente se a absorção for grande o suficiente [$|a_0| > a_\ell/(1 + a_\ell\ell)$].

Um coeficiente de absorção tão grande permite que a temperatura aumente para valores grandes, como vemos na expansão (44). De fato, todos os termos ficam menores à medida que o tempo passa, exceto o primeiro que cresce exponencialmente devido ao fator $e^{\gamma_0^2 kt}$. Assim, a barra fica cada vez mais quente (a menos que $A_0 = 0$, o que só poderia acontecer para dados iniciais muito especiais). Se, por outro lado, a absorção for relativamente pequena [isto é, $|a_0| < a_\ell/(1 + a_\ell\ell)$], então todos os autovalores são positivos e a temperatura permanecerá limitado e eventualmente decairá para zero.

Exercícios - Condição de Robin

Exercício 1. Considere o problema de autovalor com condição de Robin:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X'(0) - a_0 X(0) = 0,$$

$$X'(\ell) + a_\ell X(\ell) = 0.$$

(a) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor se e somente se

$$a_0 + a_\ell = -a_0 a_\ell \ell.$$

(b) Encontre as autofunções correspondentes ao autovalor nulo. (Dica: primeiro resolva a EDO para $X(x)$. As soluções não são senos ou cossenos.)

Exercício 2. Considere o problema de autovalor de Robin. Se $a_0 < 0$, $a_\ell < 0$ e $-a_0 - a_\ell < a_0 a_\ell \ell$, mostre que existem dois autovalores negativos. Este caso pode ser chamado “absorção substancial em ambas as extremidades.” (Dica: mostre que a curva racional $y = -(a_0 + a_\ell)\gamma/(\gamma^2 + a_0 a_\ell)$ tem um único máximo e cruza a reta $y = 1$ em dois pontos. Deduza que ela cruza a curva $y = \tanh \gamma \ell$ em dois pontos.)

Exercício 3. No Exercício 2 (absorção substancial em ambas as extremidades) mostre graficamente que existe um número infinito de autovalores positivos. Mostrar graficamente que satisfazem (36) e (37).

Exercício 4. Se $a_0 = a_\ell = a$ no problema de Robin, mostre que:

(a) Não há autovalores negativos se $a \geq 0$, há um se $-2/\ell < a < 0$, e há dois se $a < -2/\ell$.

(b) Zero é um autovalor se e somente se $a = 0$ ou $a = -2/\ell$.

Exercício 5. Considere novamente as condições de Robin em ambas as extremidades para a_0 e a_ℓ arbitrários.

(a) No plano $a_0 a_\ell$, esboce a hipérbole $a_0 + a_\ell = -a_0 a_\ell \ell$. Indicar as assíntotas. Para (a_0, a_ℓ) nesta hipérbole, zero é um autovalor, de acordo com o Exercício 1(a).

(b) Mostre que a hipérbole separa todo o plano em três regiões, dependendo se há dois, um ou nenhum autovalores negativos.

Exercício 6. Considere a equação de difusão em $(0, \ell)$ com as condições de contorno de Robin

$$u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = 0 \text{ e } u_x(\ell, t) + a_\ell u(\ell, t) = 0.$$

Se $a_0 > 0$ e $a_\ell > 0$, use o método da energia para mostrar que os pontos extremos $x = 0$ e $x = \ell$ contribuem para a diminuição da energia $\int_0^\ell u^2(x, t) dx$. (Isto é interpretado como parte da energia é perdida na fronteira, por isso chamamos as condições de fronteira irradiante ou dissipativo.)

Exercício 7.

- (a) Prove que a energia (total) é conservada para a equação das ondas com condições de contorno de Dirichlet, onde a energia é definida como

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\ell (c^{-2} u_t^2 + u_x^2) dx.$$

- (b) Faça o mesmo para a condição de contorno de Neumann.
(c) Para a condição de contorno de Robin, mostre que

$$E_R = \frac{1}{2} \int_0^\ell (c^{-2} u_t^2 + u_x^2) dx + \frac{1}{2} a_\ell [u(\ell, t)]^2 + \frac{1}{2} a_0 [u(0, t)]^2$$

é conservado. Assim, embora a energia total E_R ainda seja constante, parte da energia interna é “perdida” na fronteira se a_0 e a_ℓ são positivos e é “ganha” na fronteira se a_0 e a_ℓ forem negativos.