ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 13

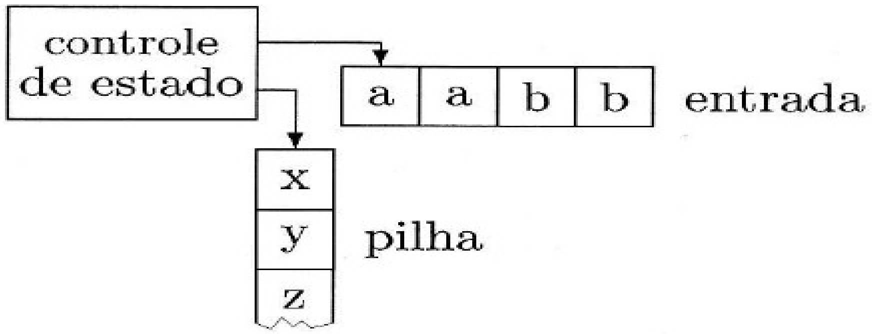
Cap. 2.2 – Autômatos com Pilha

EACH USP

Profa. Ariane Machado Lima

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Autômato finito com uma memória adicional (leitura e escrita DO TOPO da pilha)



- Lembram da linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$?

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Determinísticos e não-determinísticos
- NÃO são equivalentes
  - Autômatos a pilha não determinísticos reconhecem mais linguagens
- Autômatos a pilha não-determinísticos são equivalentes a gramáticas livres de contexto (são os que estudaremos aqui)

Definição formal
Autômato com Pilha (AP) não determinístico

DEFINIÇÃO 2.13

Um ***autômato com pilha*** é uma 6-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde Q, Σ, Γ e F são todos conjuntos finitos, e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. Γ é o alfabeto de pilha,
4. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
6. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

O AP deve iniciar com pilha vazia e terminar com a pilha vazia (formulação do Sipser)

Representação da transição no diagrama de estados

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, c)\}$

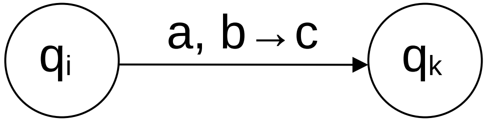
$$q_i \xrightarrow{a,\ b \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b, empilha c e vai para o estado qk

Representação da transição no diagrama de estados

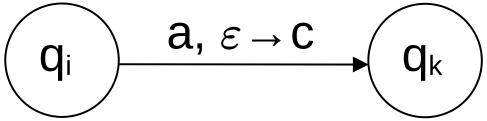
$$\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, c)\}$



Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b, empilha c e vai para o estado qk

$\delta(q_i, a, \varepsilon) = \{(q_k, c)\}$



Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a (ignore o topo da pilha):
- então (não desempilha nada), empilha c e vai para o estado qk

Representação da transição no diagrama de estados

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, c)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\, b \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b, empilha c e vai para o estado qk

$\delta(q_i, a, \varepsilon) = \{(q_k, c)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\, \varepsilon \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a (ignore o topo da pilha):
- então (não desempilha nada), empilha c e vai para o estado qk

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, \varepsilon)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\, b \to \varepsilon} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b (não empilha nada) e vai para o estado qk

Profa. Ariane Machado Lima

Representação da transição no diagrama de estados

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, c)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\ b \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b, empilha c e vai para o estado qk

$\delta(q_i, a, \varepsilon) = \{(q_k, c)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\ \varepsilon \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a (ignore o topo da pilha):
- então (não desempilha nada), empilha c e vai para o estado qk

$\delta(q_i, a, b) = \{(q_k, \varepsilon)\}$

$$q_i \xrightarrow{a,\ b \to \varepsilon} q_k$$

Estando no estado qi,
- se o próximo símbolo da cadeia de entrada for a E o topo da pilha for b:
- então desempilha b (não empilha nada) e vai para o estado qk

$\delta(q_i, \varepsilon, b) = \{(q_k, c)\}$

$$q_i \xrightarrow{\varepsilon,\ b \to c} q_k$$

Estando no estado qi,
- ignore o próximo símbolo da cadeia de entrada; se o topo da pilha for b:
- então desempilha b, empilha c e vai para o estado qk

Exemplo

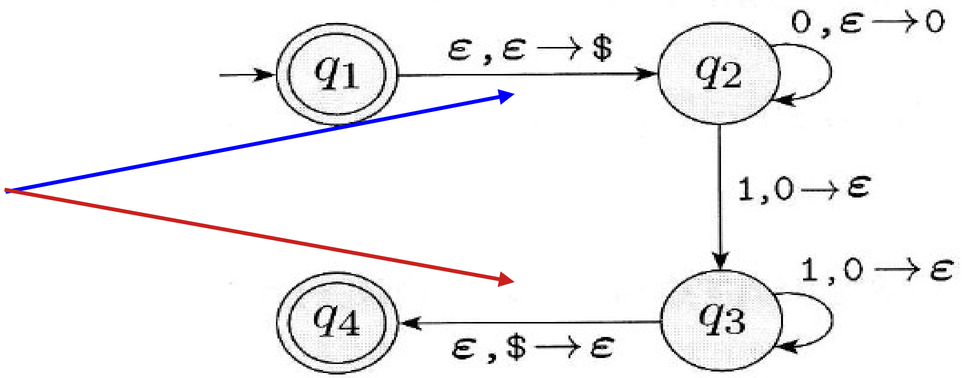
$\{0^n 1^n | \, n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

Exemplo

$\{0^n 1^n | \, n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

Quando o AP inicia, a pilha está vazia. Logo a primeira transição tem a função exclusiva de colocar na pilha um símbolo que representa o “fundo” da pilha (ex: “$”), para mais tarde eu poder saber quando eu desempilhei tudo o que estava na pilha (quando eu desempilhar o “$”).

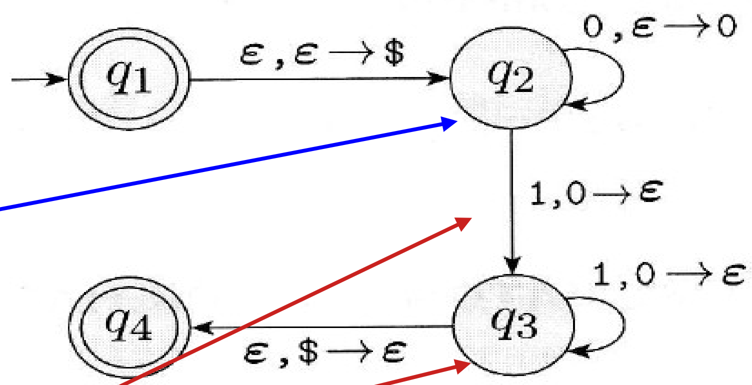
Isso é importante porque o AP só deve aceitar uma cadeia quando a pilha estiver vazia (e a cadeia tiver acabado e o estado atual for um estado de aceitação)



Exemplo

$\{0^n1^n | \, n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

Sigo lendo 0's.
Para cada 0 lido, guardo na minha memória (pilha) quantos 0's eu li: empilho um "0" (poderia ser outro símbolo, ex "z") para cada 0 lido da cadeia de entrada



Quando eu começar a ler 1's, tenho que parear cada 1 lido com um "0" da pilha.
Ou seja, para cada 1 lido, desempilho um "0".
Quando acabarem os 1's da cadeia, os 0's da pilha também deveriam ter acabado, ou seja, na pilha só deve ter sobrado o "$".

Exemplo

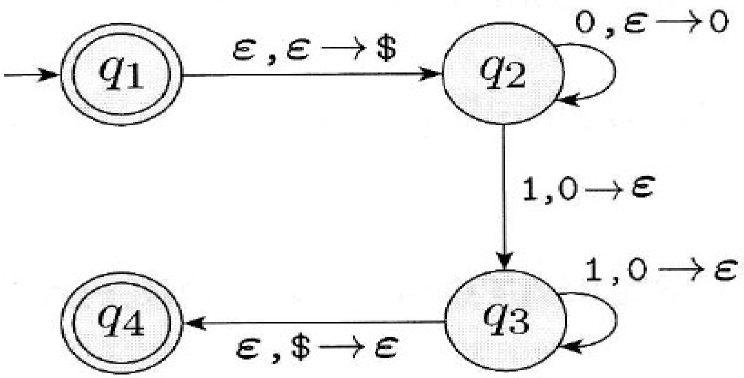
$\{0^n1^n|\, n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$\Sigma = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0, \$\}$,

$F = \{q_1, q_4\}$, e

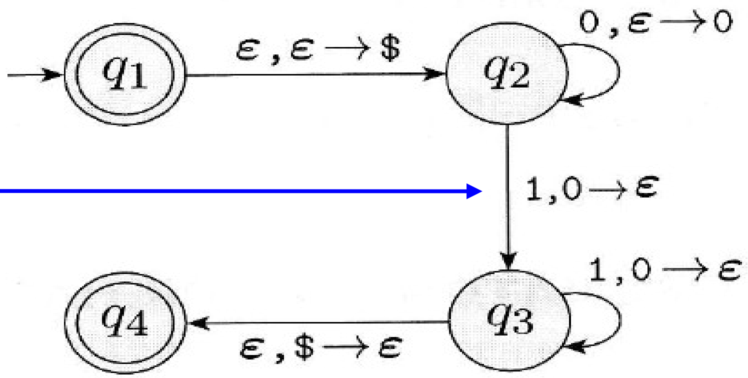


δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam $\emptyset$.

Entrada:	0			1			ε		
Pilha:	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									

Exemplo

$\{0^n1^n |\ n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$



$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$\Sigma = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0, \$\}$,

$F = \{q_1, q_4\}$, e

Se estou em q2
e o próximo símbolo é 1
e o topo da pilha é 0, desempilho o 0,
empilho o épsilon e vou para q3

δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam $\emptyset$.

Entrada:	0			1			ε		
Pilha:	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									

Profa. Ariane Machado Lima

Computação com um AP

Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1.

2.

3.

Profa. Ariane Machado Lima

Computação com um AP

Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2.

3.

Profa. Ariane Machado Lima

Computação com um AP

Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2.

3. $r_m \in F$. Essa condição afirma que um estado de aceitação ocorre ao final da entrada.

$$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$$

Computação com um AP

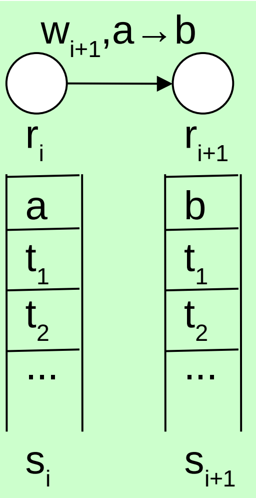
Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2. Para $i = 0, \ldots, m-1$, temos $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, onde

3. $r_m \in F$. Essa condição afirma que um estado de aceitação ocorre ao final da entrada.

$$\boxed{\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)}$$

Computação com um AP



Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguint
neira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots$
onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$
deias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cade
representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2. Para $i = 0, \ldots, m-1$, temos $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, onde $s_i = at$ e $s_{i+1} = bt$ para algum $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ e $t \in \Gamma^*$. Essa condição afirma que M se move apropriadamente, conforme o estado, a pilha e o próximo símbolo de entrada.
3. $r_m \in F$. Essa condição afirma que um estado de aceitação ocorre ao final da entrada.

EXEMPLO 2.18 ....

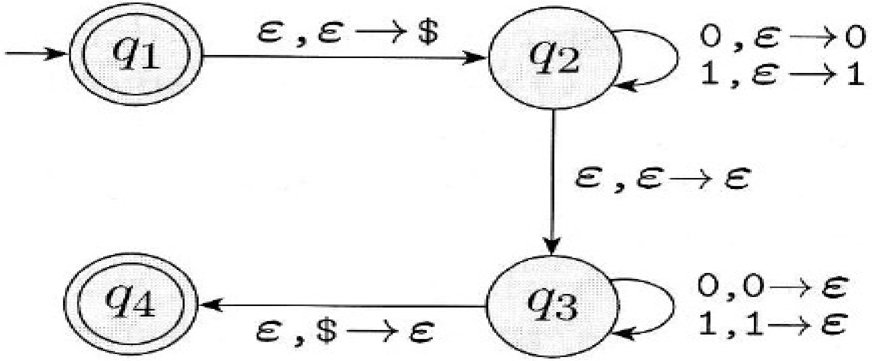
Nesse exemplo, damos um AP M_3 que reconhece a linguagem $\{ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Lembremo-nos de que $w^{\mathcal{R}}$ significa w escrita de trás para a frente.

EXERCÍCIO !

EXEMPLO 2.18

Nesse exemplo, damos um AP M_3 que reconhece a linguagem $\{ww^{\mathcal{R}} | \; w \in \{0,1\}^*\}$. Lembremo-nos de que $w^{\mathcal{R}}$ significa w escrita de trás para a frente. Segue a descrição informal do AP.

> Comece empilhando os símbolos que são lidos. A cada ponto, adivinhe não-deterministicamente se o meio da cadeia foi atingido e, se tiver sido, passe a desempilhar um símbolo para cada símbolo lido, checando para garantir que eles sejam os mesmos. Se eles forem sempre os mesmos e a pilha esvaziar ao mesmo tempo em que a entrada terminar, aceite; caso contrário, rejeite.



Aqui não-determinismo é essencial!
(pois não sei onde é o meio da cadeia)

EXEMPLO **2.16**

$$\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i = j \text{ ou } i = k\}$$

Empilho quando leio a's, e desempilho quando leio b's ou c's?

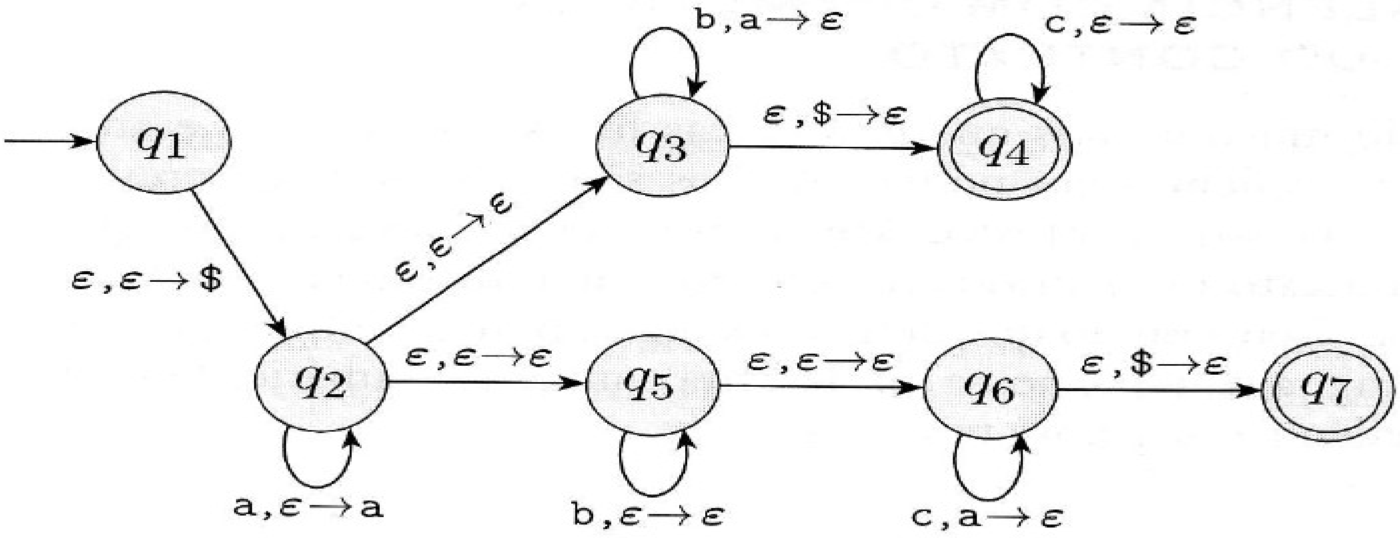
EXERCÍCIO !

EXEMPLO 2.16 ....

$$\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i = j \text{ ou } i = k\}$$

Empilho quando leio a's, e desempilho quando leio b's ou c's?

Aqui não-determinismo também é essencial!



Exercícios

SIPSER: Já podem fazer até 2.10 (sobre autômatos com pilha são o 2.5, 2.7 e 2.10)

Criem também autômatos a pilha para as linguagens do final da aula 10b:

1) $\{a^i b^{2i} \mid i >= 1\}$

3) $\{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$, sendo w^R a cadeia w reversa (escrita de trás para a frente)

4) $\{a^m b^m c^n d^n \mid m >= 0, n >= 1\}$

5) $\{a^m b^n c^n d^m \mid m >= 1, n >= 0\}$

6) $\{aa^* b^i c^j \mid i >= 1, j >= i\}$