Reflexões

Difusão na semireta - método da reflexão

Problema. Seja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada.

a) Encontre uma fórmula para a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0 & x > 0, \;\; t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \quad \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

estendendo o dado inicial de modo ímpar e usando a fórmula para o problema de difusão na reta.

b) Mostre que a fórmula encontrada fornece a única solução limitada do problema.

Solução. a) Primeiramente estendemos g de modo ímpar fazendo

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0 \\ -g(-x) & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Notemos que a função assim definida é contínua em $\mathbb{R}$ somente se $g(0) = 0$. Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = 0 & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = \tilde{g}(x) & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

A solução desse problema de difusão na reta é

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\tilde{g}(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} S(x-y,t)\tilde{g}(y)\,dy + \int_{-\infty}^{0} S(x-y,t)\tilde{g}(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} S(x-y,t)g(-y)\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,dy - \int_{0}^{\infty} S(x+y,t)g(y)\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \left[S(x-y,t) - S(x+y,t)\right] g(y)\,dy
\end{aligned}
$$

Agora seja $u(x, t)$ a restrição da função *tildeu* no primeiro quadrante, isto é,

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) \quad \text{para } x > 0.$$

Do cálculo anterior obtemos

$$u(x, t) = \int_0^\infty [S(x - y, t) - S(x + y, t)]\, g(y)\, dy, \qquad (1)$$

para $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$.

A função u dada pela fórmula (1) é limitada e resolve a equação da difusão no quadrante $x > 0$, $t > 0$. Além disso, sendo S uma função par em relação à variável x, temos

$$u(0, t) = \int_0^\infty [S(-y, t) - S(y, t)]\, g(y)\, dy = 0.$$

Portanto, u também satisfaz a condição de Dirichlet na semireta $x = 0$.

Para cada $x_0 > 0$, $\tilde{g}(x_0) = g(x_0)$. Segue-se imediatamente da continuidade de g em x_0 que

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = \lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \tilde{u}(x,t) = g(x_0).$$

Portanto u é contínua no fecho do quadrante, exceto possivelmente a origem e em particular

$$u(x,0) = g(x), \quad x > 0.$$

A continuidade na origem ocorre se, e somente se, $g(0) = 0$.

Exercício 1. Seja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada.

a) Encontre uma fórmula para resolver o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) - k u_{xx}(x,t) = 0 & x > 0, \ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \quad \text{(Neumann)} \end{cases}$$

estendendo o dado inicial de modo par e usando a fórmula para o problema de difusão na reta.

b) Mostre que a fórmula encontrada fornece a única solução limitada do problema.

Corda semi-infinita - método da reflexão

Problema. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & x > 0, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & x > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \quad \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

Depois de estender adequadamente os dados iniciais para todo $\mathbb{R}$, use a fórmula de D'Alembert para escrever uma fórmula representando a solução.

Solução. Procuramos $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$, definidas em $\mathbb{R}$, tais que coincidam com ϕ e ψ para $x > 0$ e que a função dada pela fórmula de D'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\phi}(x+ct) + \tilde{\phi}(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)ds \qquad (2)$$

satisfaça a condição

$$u(0,t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Isto implica

$$\frac{1}{2}[\tilde{\phi}(ct) + \tilde{\phi}(-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \tilde{\psi}(s)ds = 0.$$

O modo mais fácil de atender a essa condição é exigir que ambas as parcelas se anulam separadamente, e isso acontece estendendo ϕ e ϕ de forma ímpar.

Podemos portanto concluir que a solução é dada por (2) com

$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

e

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Vamos entender a fórmula (2). Para (x, t) tal que $x - ct \geq 0$, somente argumentos positivos ocorrem na fórmula (2), de modo que $u(x, t)$ é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds, \quad \text{se } x-ct \geq 0.$$

Para (x, t) tal que $x - ct < 0$, temos $\tilde{\phi}(x - ct) = -\phi(ct - x)$, e assim por diante, de modo que

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{1}{2}[\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] \\ & + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} -\psi(-s)ds. \end{aligned}$$

A mudança de variáveis $s \to -s$ na segunda integral do lado direito dá $\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)ds$. Portanto,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(ct+x)-\phi(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)ds, \quad \text{se } x-ct<0.$$

Finalmente, podemos escrever a solução $u(x,t)$ desse problema como

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds, & x-ct \geq 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}[\phi(ct+x)-\phi(ct-x)] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)ds, & x-ct < 0. \end{cases}$$

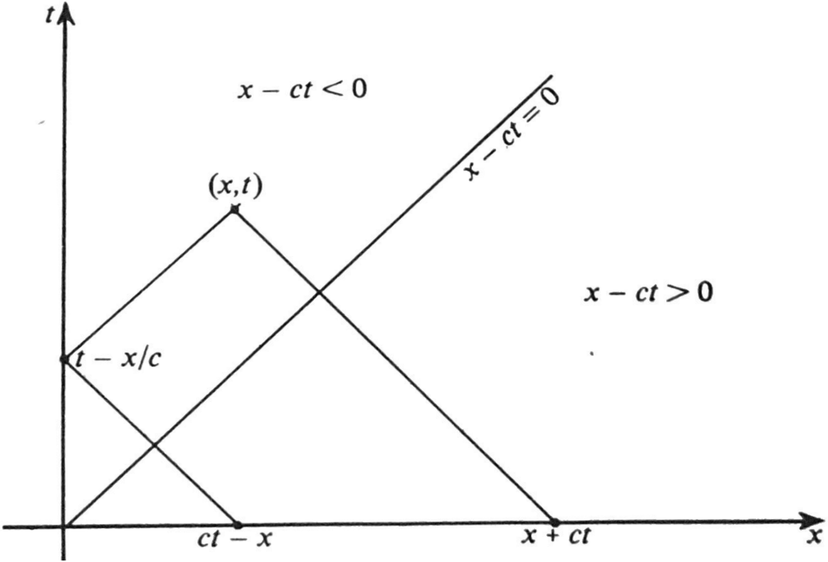


Figure: 1.

Comentários sobre essa solução.

(i) Se o ponto (x, t) estiver abaixo da característica $x - ct = 0$, isto é, $x - ct > 0$, o valor de $u(x, t)$ será como se a corda fosse infinita. Podemos dizer que nesse caso o ponto x não "sentirá" que a corda é limitada à esquerda, a não ser após um tempo $t = x/x$.

(ii) Se o ponto (x, t) estiver acima da característica $x - ct = 0$, isto é, $x - ct < 0$, observe a geometria da Figura 1, onde a característica emanando do ponto (x, t) atinge o eixo t no ponto $t - (x/c)$, aí se reflete e vai encontrar o eixo x no ponto $ct - x$.

Na realidade, se $x - ct < 0$, devemos olhar esse percurso no sentido oposto: um sinal emanando do ponto $ct - x$, no instante inicial, [e por isso vamos entender o valor de ϕ nesse ponto, isto é, $\phi(ct - x)$] e se propagando para a esquerda com velocidade c encontra a extremidade da corda, onde se reflete, e vai estar no ponto x no instante t.

A fórmula diz que nessa reflexão há uma troca de sinal [$\phi(ct - x)$ passa a ser $-\phi(ct - x)$, pois é este valor que entra na fórmula para compor o valor de $u(x, t)$]. Observe que os valores $u_t(x, 0)$ são também refletidos. O valor de $u(x, t)$ agora depende dos valores de ϕ no par de pontos $ct \pm x$ e dos valores de ψ no intervalo entre esses pontos.

Problema. (Corda limitada). Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 & 0 < x < L, \ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & x > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \quad \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

Definindo adequadamente os dados iniciais ϕ e ψ fora do intervalo $[0, L]$, use a fórmula de d'Alembert para representar a solução como uma superposição de ondas.

Solução. Os dados iniciais $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são dados somente para $0 < x < L$. Vamos estendê-las a $\mathbb{R}$ de modo ímpar e $2L$-periódica:

$$\tilde{\phi}(-x) = -\tilde{\phi}(x) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(x+2L) = \tilde{\phi}(x),$$
$$\tilde{\psi}(-x) = -\tilde{\psi}(x) \quad \text{e} \quad \tilde{\psi}(x+2L) = \tilde{\psi}(x).$$

Seja $v(x,t)$ da solução do problema na reta com os dados iniciais estendidos. Seja $u(x,t)$ a restrição de v ao intervalo $(0,L)$. Assim, $u(x,t)$ é dado por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\phi}(x+ct) + \tilde{\phi}(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)ds \qquad (3)$$

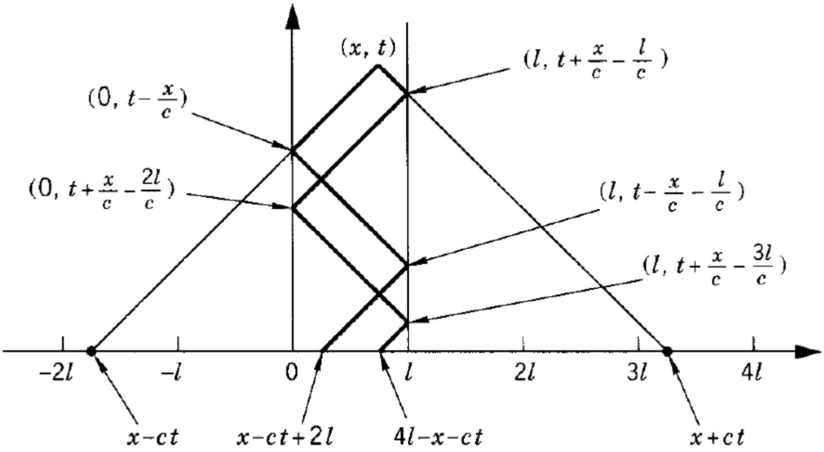
para $0 \leq x \leq L$.

Esta fórmula contém todas as informações de que precisamos. Mas para ver isso explicitamente devemos desenvolver as definições de $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$, que resultará em uma fórmula bastante complicada porque inclui uma descrição precisa de todas as reflexões da onda em ambos os pontos $x = 0$ e $x = L$.

Podemos compreender o resultado explícito que estamos prestes a obter desenhando um diagrama espaço-tempo (Figura 2).

A partir do ponto (x, t), desenhamos as duas características e as refletimos cada vez que atingem as retas $x = 0$ e $x = L$. Acompanhamos a mudança de sinal em cada reflexão.

Ilustramos o resultado na Figura 2 para o caso de um ponto típico (x, t). Ilustramos também na Figura 3 a definição da função estendida $\tilde{\phi}$. (A mesma imagem é válida para $\tilde{\psi}$.)



(x, t)
$(l, t+\frac{x}{c}-\frac{l}{c})$
$(0, t-\frac{x}{c})$
$(0, t+\frac{x}{c}-\frac{2l}{c})$
$(l, t-\frac{x}{c}-\frac{l}{c})$
$(l, t+\frac{x}{c}-\frac{3l}{c})$
$-2l$
$-l$
0
l
$2l$
$3l$
$4l$
$x-ct$
$x-ct+2l$
$4l-x-ct$
$x+ct$

Figure: 2.

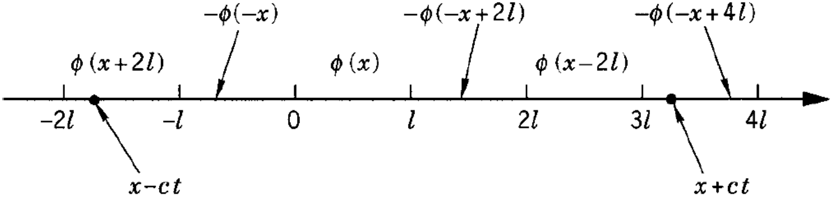


Figure: 3.

Por exemplo, para o ponto (x, t) como ilustrado nas Figura 2 e 3, temos

$$\tilde{\phi}(x + ct) = -\phi(4L - x - ct) \quad \text{e} \quad \tilde{\phi}(x - ct) = +\phi(x - ct + 2L)$$

O sinal negativo em $-\phi(4L - x - ct)$ vem do número ímpar de reflexões (3). O sinal positivo em $+\phi(x - ct + 2L)$ vem do número par de reflexões (2).

Portanto, a fórmula geral (3) neste ponto (x, t) reduz-se a

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct+2L) - \phi(4L-x-ct)\right] \\
+ \frac{1}{2c}\Bigg[\int_{x-ct}^{-L} \psi(s+2L)ds + \int_{-L}^{0} -\psi(-s)ds \\
+ \int_{0}^{L} \psi(s)ds + \int_{L}^{2L} -\psi(-s+2L)ds \\
+ \int_{2L}^{3L} \psi(s-2L)ds + \int_{3L}^{x+ct} -\psi(-s+4L)ds\Bigg]
\end{aligned}
$$

Observe que há um cancelamento das quatro integrais intermediárias, como vemos mudando as variáveis $z = -s$ temos

$$\int_{-L}^{0} -\psi(-s)ds = -\int_{0}^{L} \psi(z)dz$$

e a fazendo a mudança de variáveis $z = 4L - s$ temos

$$\int_{2L}^{3L} \psi(s-2L)ds = \int_{L}^{2L} \psi(-z+2L)dz.$$

Fazendo uma mudança de variáveis nas duas integrais restantes, a fórmula fica

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct+2L) - \phi(4L-x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct+2L}^{L} \psi(z)dz + + \int_{L}^{4L-x-ct} \psi(z)dz\right].$$

Portanto, encontramos a fórmula da solução no ponto (x,t) ilustrado é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct+2L) - \phi(4L-x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct+2L}^{4L-x-ct} \psi(z)dz.$$

A fórmula da solução em qualquer outro ponto (x, t) é caracterizada pelo número de reflexões em cada extremidade $(x = 0, L)$. Isso divide a faixa $(0, L) \times (0, \infty)$ no no plano xt em regiões na forma de losango ou triangulares, conforme ilustrado na Figura 4. Em cada uma dessas regiões, a solução $u(x, t)$ é dada por uma fórmula diferente.

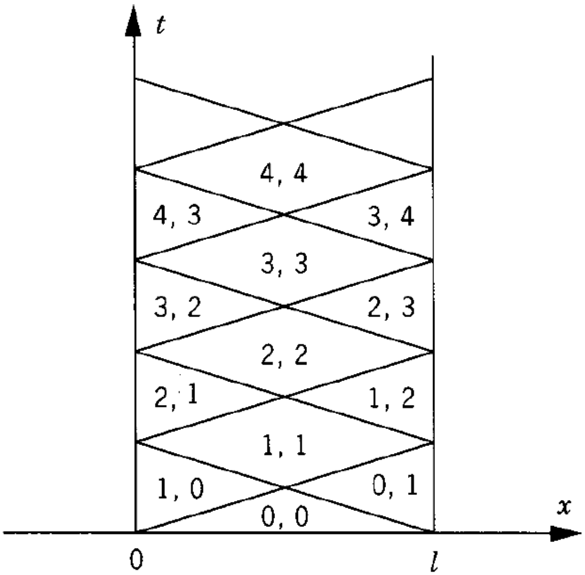


Figure: 4.

As fórmulas explicam em detalhes como a solução se escreve. No entanto, é impossível generalizar o método para problemas bidimensionais ou tridimensionais, nem funciona para a equação de difusão. Além disso, é muito complicado! Portanto, no próximo tópico da disciplina apresentaremos um método completamente diferente (Fourier) para resolver problemas em um intervalo limitado.