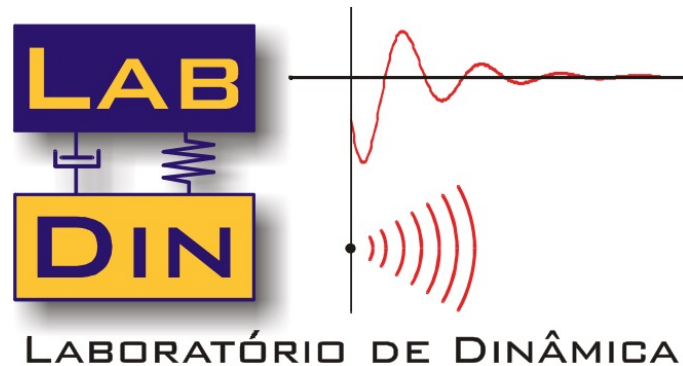


UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Fluídicos
Teoria

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar elementos teóricos para a modelagem de Sistemas Fluídicos no contexto da Dinâmica de Sistemas. Os seguintes elementos serão estudados:

- Resistência Fluídica
- Capacitância Fluídica
- Inércia Fluídica

Bibliografia:

- 1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010
- 2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Introdução

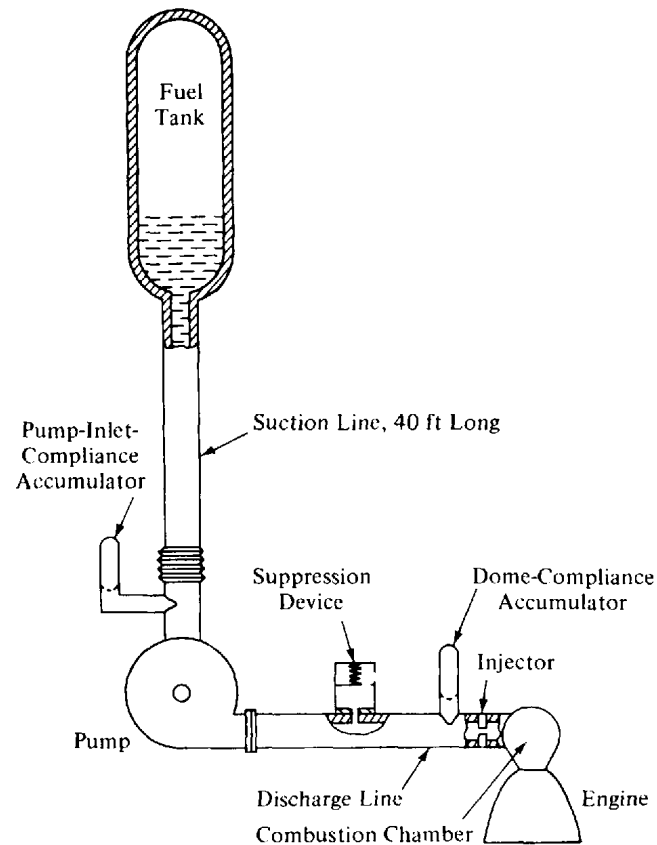
Embora para sistemas mecânicos, elétricos e eletromecânicos a abordagem de modelagem por parâmetros concentrados (*lumped*) conduza a modelos confiáveis, no caso de sistemas fluídicos (e também os térmicos) requer-se um tratamento mais aprofundado. Algumas características dos sistemas fluídicos:

- ✓ Seguem um comportamento padrão similar aos sistemas mecânicos
- ✓ Surgem dificuldades em se aplicar o conceito de parâmetros concentrados, principalmente pelo fato do fluido não possuir forma definida
- ✓ Modelos mais acurados são necessários (modelagem CFD)

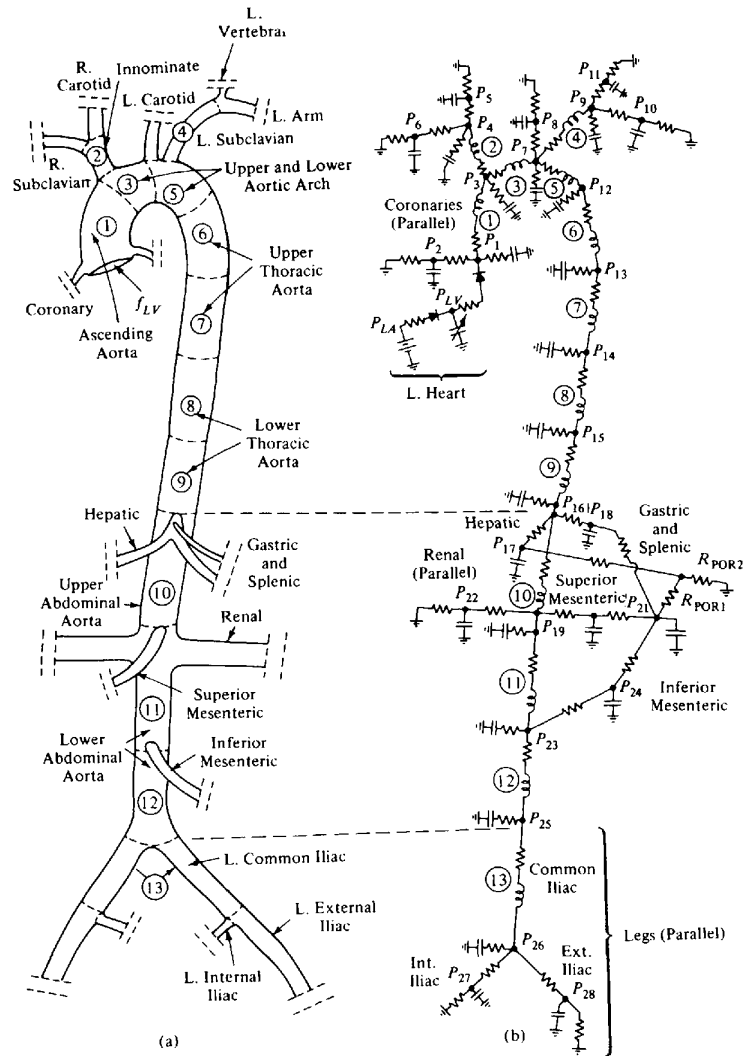
Para o presente estudo as variáveis físicas de interesse são:

- ✓ Pressão média do fluido [$Pa = N/m^2$]
- ✓ Vazão do fluido (taxa de variação volumétrica) [m^3/s]
- ✓ Área de secção transversal do duto [m^2]
- ✓ Velocidade média do fluxo [m/s]

Dois Exemplos



(a) Modelo de sistema de abastecimento de combustível de um foguete¹

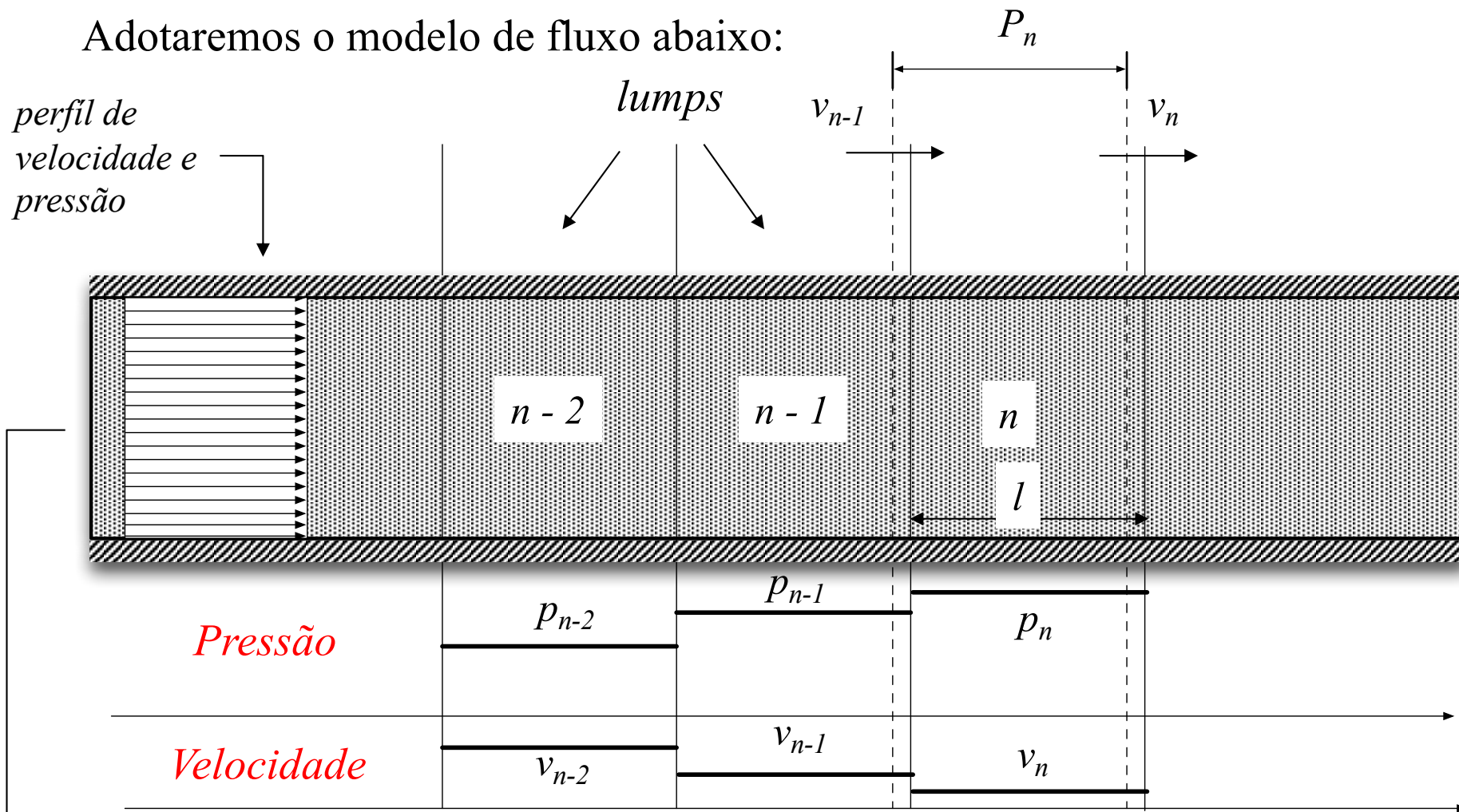


(b) Modelo de sistema de fluxo arterial humano¹

¹ Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

Modelo de Fluxo Uni-Dimensional

Adotaremos o modelo de fluxo abaixo:

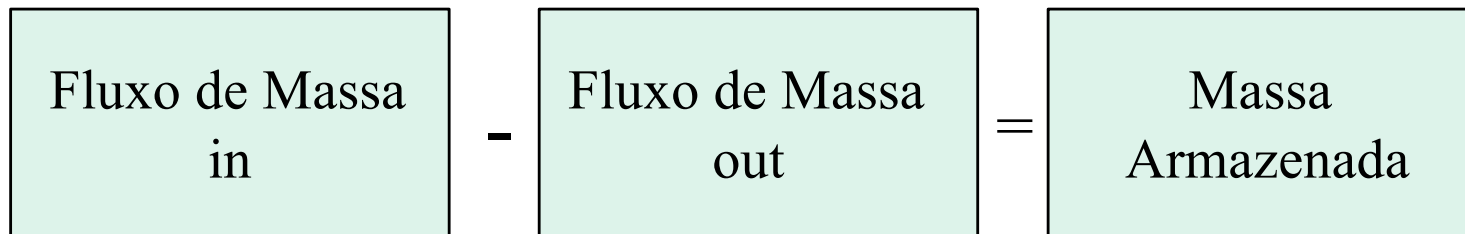


- Velocidade e pressão constantes em qualquer ponto da secção transversal

Cont. ...

Para a descrição de um elemento discreto (*lump*) aplicaremos:

- Lei da Conservação da Massa e 2ª Lei de Newton
- Durante um intervalo de tempo dt para um determinado elemento:



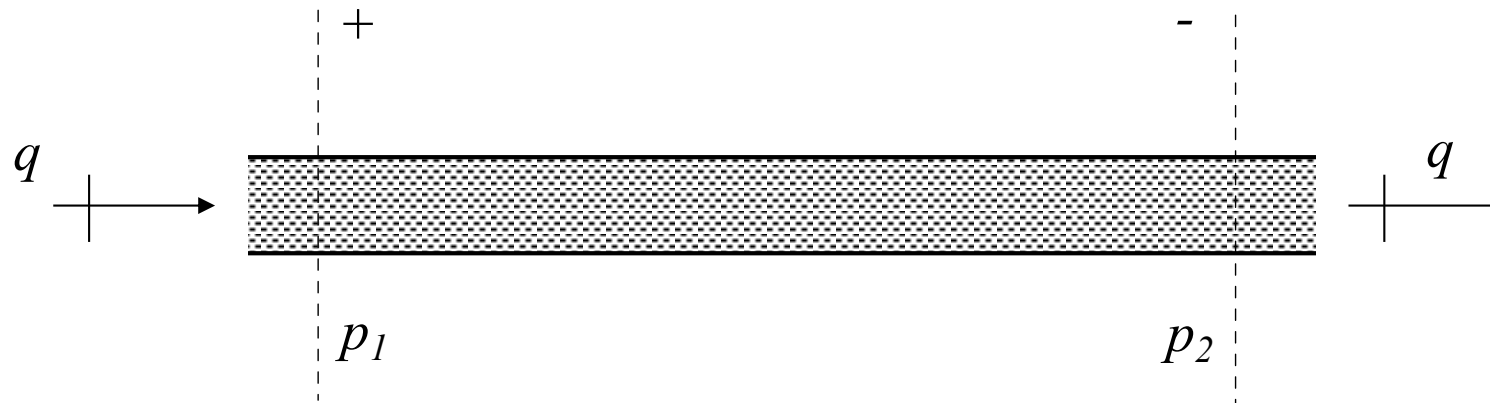
- De forma análoga a resultantes de forças (PA) entre os extremos de um elemento deve-se igualar à componente inercial do elemento (ma).
- Ao aplicarmos a conservação da massa teremos que levar em consideração a compressibilidade do fluido, através da propriedade denominada *Bulk Modulus*, que é entendida como uma medida da compressibilidade e dada por

$$B = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

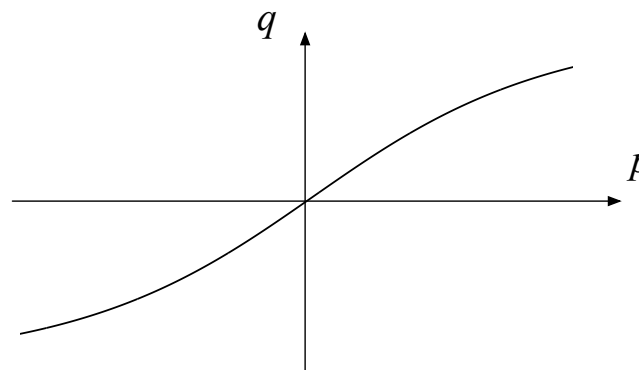
O Elemento Resistência Fluídica

Efeito físico: modelagem da dissipação de energia sob a forma de atrito

Partido-se de um modelo fenomenológico, mostramos abaixo um fluxo em conduto reto



Geralmente, a relação entre p e q é não linear

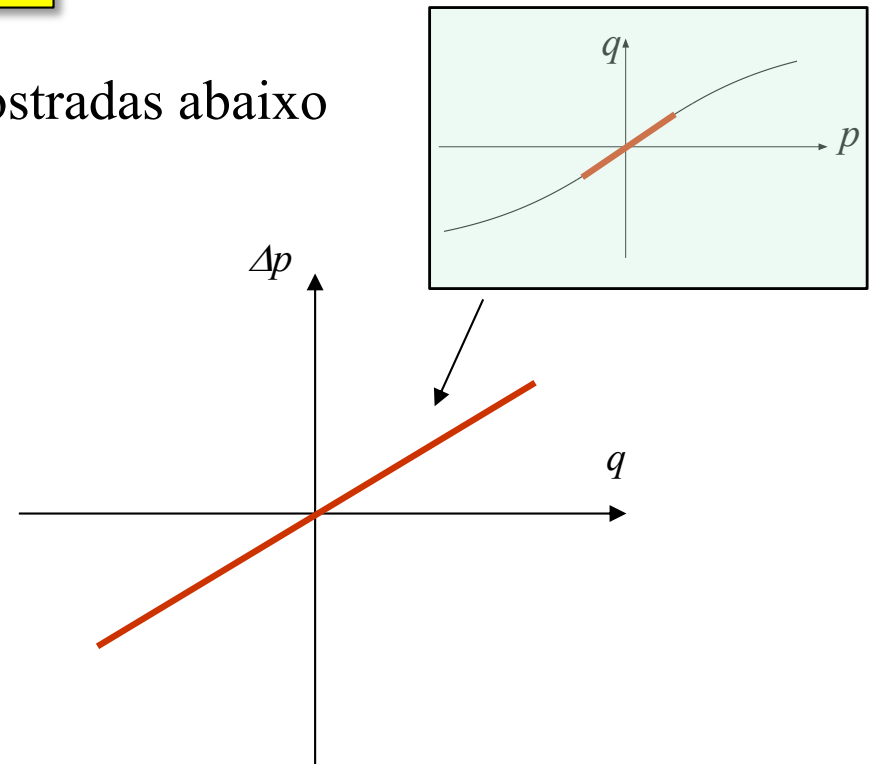
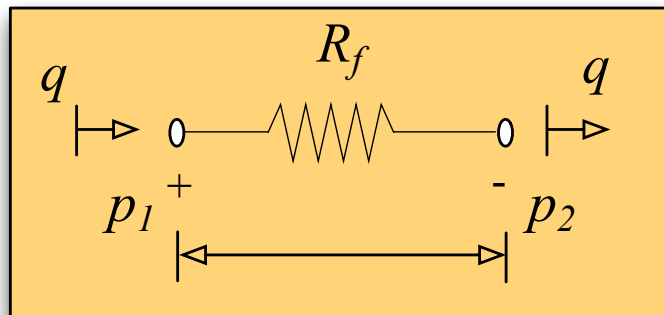


Cont. ...

O elemento resistência fluídica puro e ideal é definido pela seguinte relação entre pressão e vazão

$$R_f = \frac{\Delta p}{q} = \frac{p_1 - p_2}{q}$$

Sua representação e curva característica são mostradas abaixo



Cont. ...

Para a definição da F.T. inicialmente aplicamos a T.L. à relação i/o

$$\mathcal{L}(\Delta p) = \mathcal{L}(R_f q) \quad \Rightarrow \quad \Delta P(s) = R_f Q(s)$$

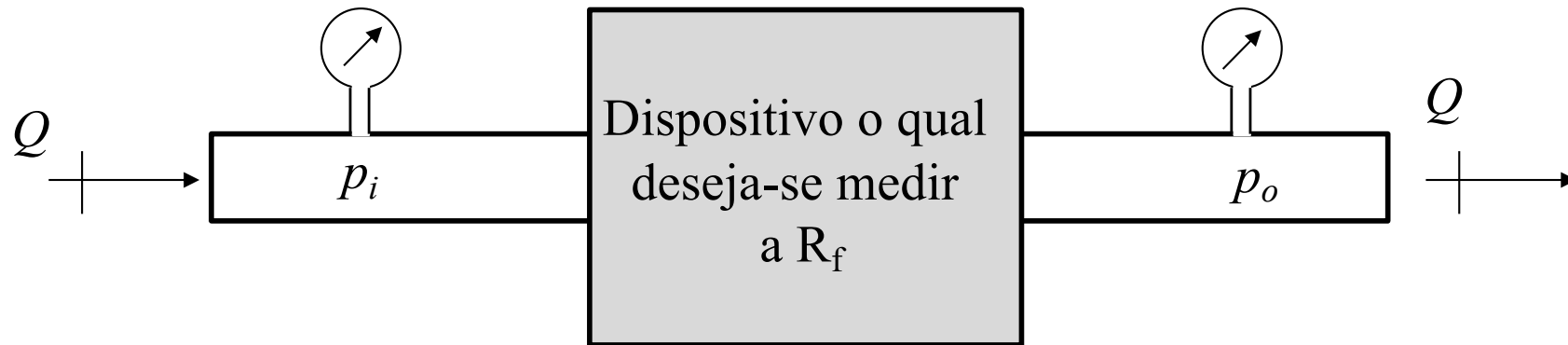
E, então podemos definir duas F.T.



Resistência fluídica: Elemento de *ordem zero* (ganho constante !)

Cont. ...

Experimentalmente podemos obter uma estimativa da R_f através de um experimento simples:



E, a partir das medições de pressão e vazão constrói-se um gráfico e a partir dele obtém-se o valor da R_f do circuito, que pode-se aproximar da R_f do dispositivo

1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

Cont. ...

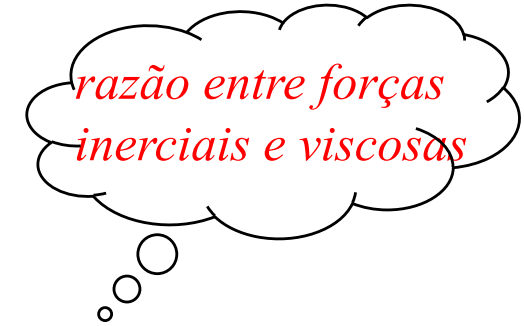
Podemos também estimar a resistência fluídica teóricamente. Par isto, precisamos determinar as condições do fluxo, a saber:

(a) Fluxo Laminar

- Baixas velocidades
- Movimento ordenado do fluxo
- Governado por efeitos viscosos
- Efeitos inerciais desprezados

(b) Fluxo Turbulento

- Velocidades mais altas
- Movimento desordenado
- Governado por efeitos inerciais



Número de Reynolds

$$N_R = \frac{\rho D v}{\mu}$$

$N_R < 2000$ – Laminar

$N_R > 4000$ - Turbulento

Cont. ...

Condições de fluxo laminar produzem resistências fluídicas muito próximas do comportamento linear, podendo ser calculadas teóricamente. Exemplo: Um tubo capilar liso, reto e de secção circular temos

$$q = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta p$$

Logo, para este duto

$$R_f = \frac{\Delta p}{q} = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$$

Para escoamentos turbulentos

$$\Delta p = \frac{0,242L\mu^{0,25}\rho^{0,75}}{D^{4,75}} q^{1,75}$$

ρ – densidade do fluido


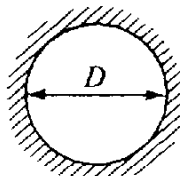
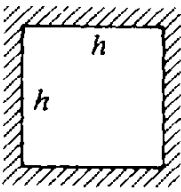
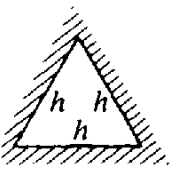
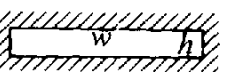
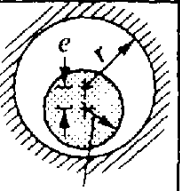
D – Diâmetro do tubo

v – velocidade do fluxo

μ – viscosidade do fluido

q – vazão do fluido

Cont. ... Resistências fluídicas para fluxo em regime laminar

 <p style="text-align: center;">Δp psi</p> <p style="text-align: right;">q $\frac{\text{inch}^3}{\text{sec}}$</p>	
$R_f \triangleq \frac{\Delta p}{q}$	
$R_f = \frac{128\mu L}{\pi D^4}$	
$R_f = \frac{28.4\mu L}{h^4}$	
$R_f = \frac{185\mu L}{h^4}$	
$R_f = \frac{12\mu L}{wh^3 \left[1 - \frac{192h}{\pi^5 w} \tanh \frac{\pi w}{2h} \right]}$	
$R_f = \frac{6\mu L}{\pi r c^3 \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{e}{c} \right)^2 \right]}$ <p>if $e = 0$:</p> $R_f = \frac{6\mu L}{\pi r c^3}$	 <p style="text-align: center;">$r - c$ $c \ll r$</p>
	<p>if $w \gg h$:</p> $R_f = \frac{12\mu L}{wh^3}$

1 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

O Elemento Capacitância Fluídica

Efeito Físico: Armazenamento de energia (massa) fluídica

- Um fluido por si só apresenta o efeito da capacitância: Compressibilidade
- Dispositivos mecânicos podem gerar efeitos capacitivos
- Em geral um elemento fluídico no qual a energia armazenada é função da pressão pode ser pensado como uma capacitância fluídica, análoga à elétrica e mecânica

O elemento capacitância fluídica puro e ideal C_f pode ser definido como

$$C_f = \frac{V}{\Delta p} \quad C_f = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Como buscamos uma relação entre pressão e vazão podemos escrever

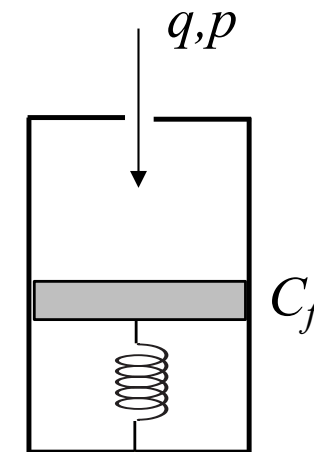
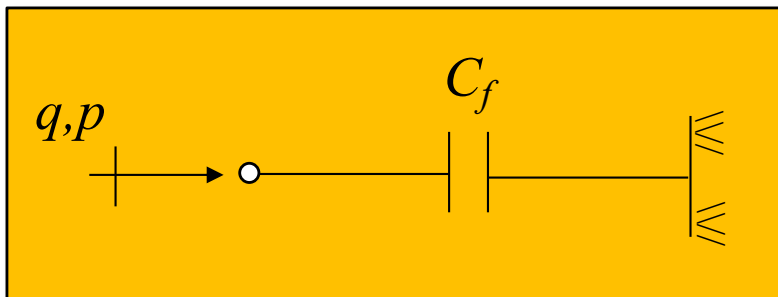
$$V = \int_{t_0}^t q \, dt$$

Cont. ..

E, combinando estas duas expressões temos

$$\Delta p = \frac{1}{C_f} \int_{t_0}^t q \, dt$$

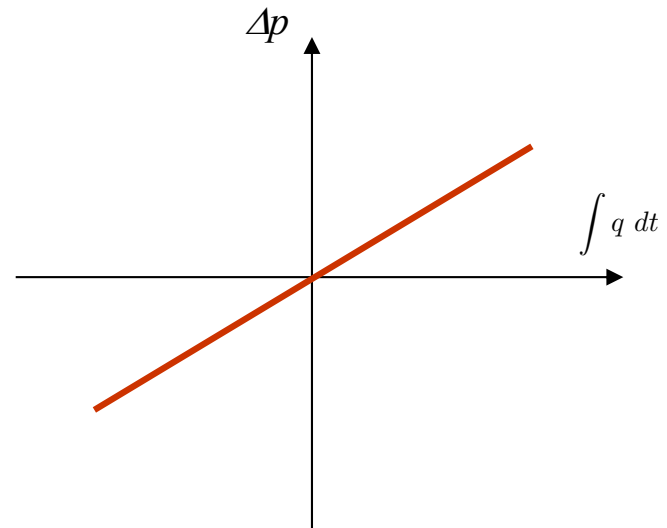
onde C_f é o valor da capacitância fluidica, V o volume armazenado, Δp o diferencial de pressão e q a vazão. Sua representação



Cont. ..

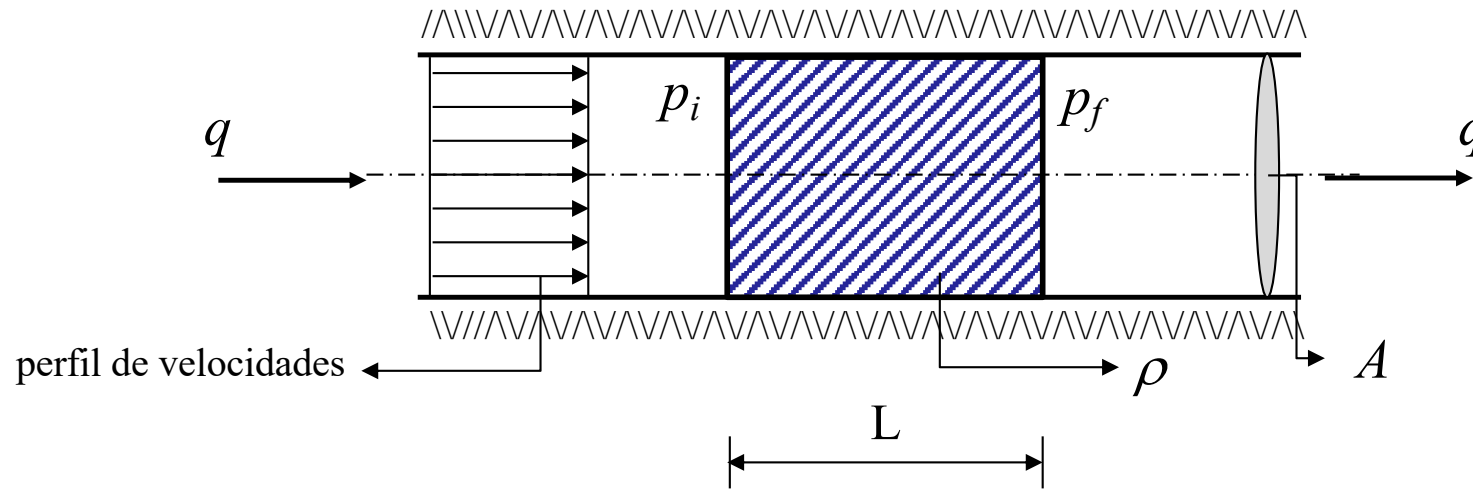
Curva característica e F.T. para o elemento capacitância fluídica

$$\Delta P(s) = \frac{1}{C_f} \mathcal{L} \left(\int_{t_0}^t q \, dt \right) = \frac{1}{C_f} \frac{Q(s)}{s}$$



O Elemento Inércia Fluídica

Efeito Físico: Modelagem da propriedade da inércia do fluxo



Hipóteses Simplificadoras:

- Elementos discretos de tamanho finito
- Fluxo uni-dimensional com perfil de velocidades constante
- Elemento discreto tratado como um “corpo rígido”

$$m = \rho AL$$

Cont. ...

Para o elemento discreto em seu movimento unidirecional:

$$\sum_{i=1}^N f_i = ma$$

A resultante de forças está relacionada à diferença de pressão antes e depois do elemento tal que

$$\sum_{i=1}^N f_i = A\Delta p$$

$$A\Delta p = \rho AL \frac{dv}{dt}$$

e, levando-se em conta que: $q = vA$

$$\Delta p = \frac{\rho L}{A} \frac{dq}{dt}$$



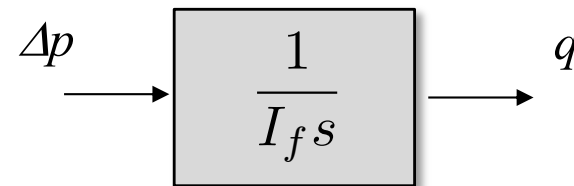
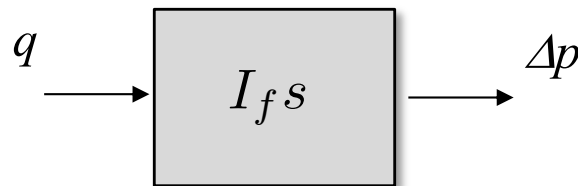
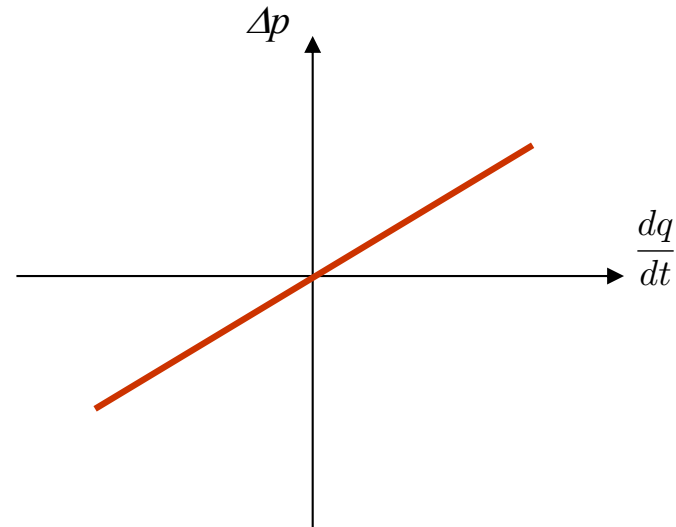
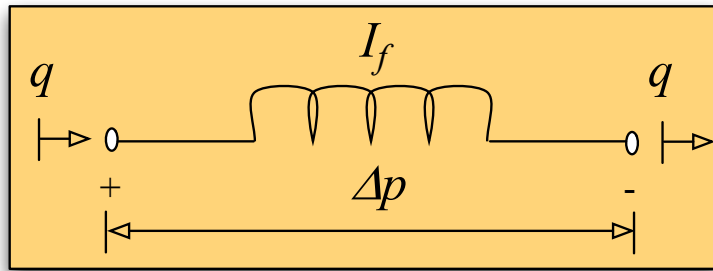
$$\Delta p = I_f \frac{dq}{dt}$$

$$I_f = \frac{\rho L}{A}$$

Cont. ...

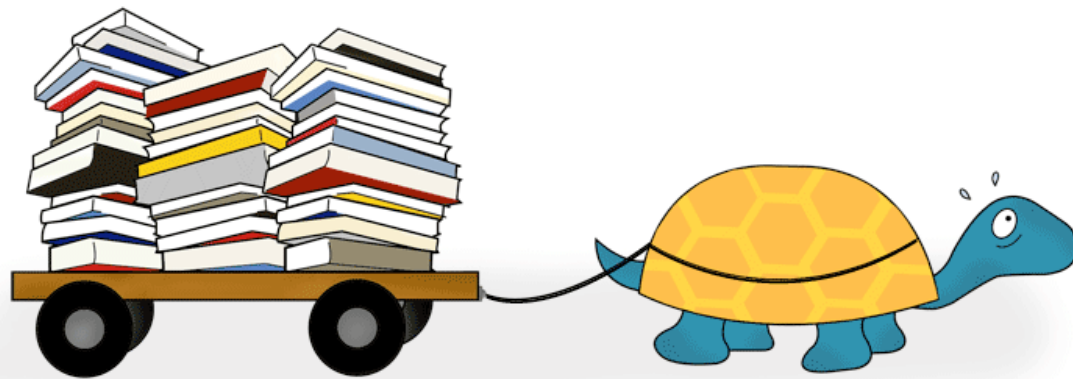
Para a F.T. aplicamos a T. L. à esta última equação obtendo assim

$$\mathcal{L}(\Delta p) = \Delta P(s) = I_f \mathcal{L} \left(\frac{dq}{dt} \right) = I_f s Q(s)$$



FINIM

Bom Estudo !



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA



SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

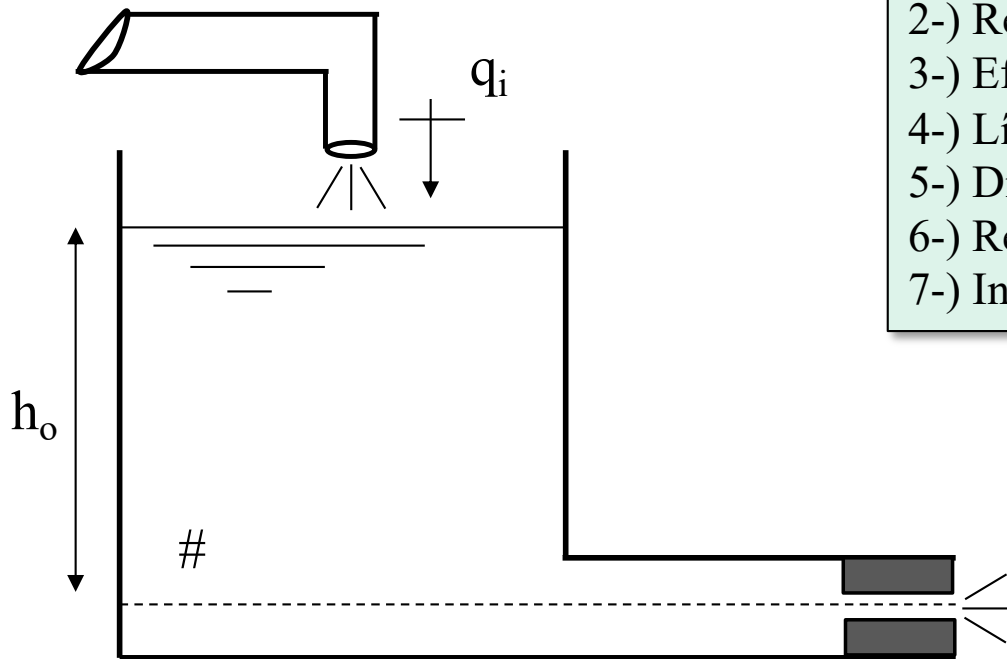
Modelagem de Sistemas Flúídicos
Exemplos

Exemplos de Modelagem

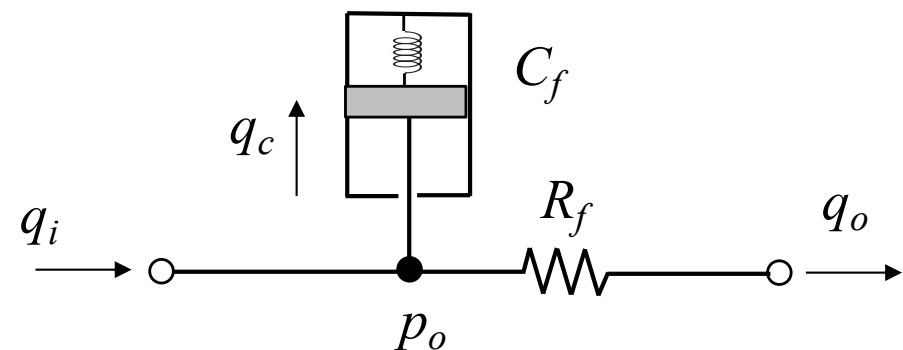
Exemplo 1: A figura mostra um sistema fluídico composto por um tanque aberto que é alimentado por uma fonte de vazão (q_i) e descarga para a atmosfera. Formule hipóteses simplificadoras para o modelo e determine a F.T. relacionando a altura da coluna de fluido h_o com a vazão de entrada q_i .

Hipóteses:

- 1-) Tubo de descarga é curto: inércia desprezada
- 2-) Resistência fluídica ao longo do tubo desprezível
- 3-) Efeitos inerciais e atrito no tanque desprezíveis
- 4-) Líquido homogêneo e incompressível
- 5-) Dimensões geométricas constantes
- 6-) Resistência fluídica concentrada na extremidade
- 7-) Influências externas invariantes (p_{atm} , t_{atm})



Modelo Geométrico



Modelo Físico

Exemplo 1: Cont. ...

Portanto, podemos pensar num modelo composto pela capacitância do tanque e pela resistência no local de descarga, tendo como entrada a vazão e saída o nível vertical do fluido no tanque. Para a obtenção do modelo matemático, aplicamos lei da conservação da massa para o tanque num intervalo dt , ou seja

$$\dot{m}_i dt - \dot{m}_o dt = dm$$

onde m_i e m_o são respectivamente a massa de fluido que entra e sai do tanque. Devido à hipótese 2 (*incompressibilidade do fluido*) podemos trocar a variável massa por volume, tendo assim

$$q_i dt - q_o dt = dV$$

e como a variação do volume é dada pela variação de h_o podemos ainda escrever:

$$q_i dt - q_o dt = A dh_o$$

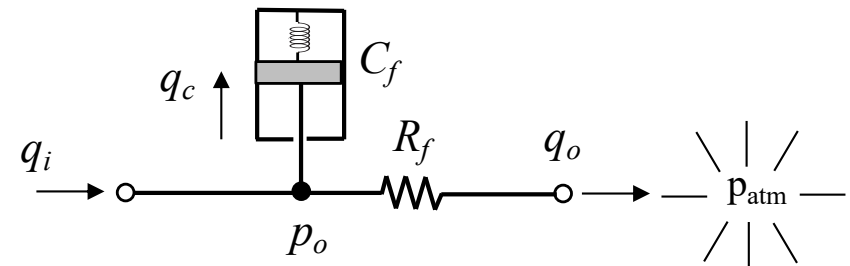
sendo A a área da secção transversal do tanque. Temos que resolver q_o !

Exemplo 1: Cont. ...

Vamos considerar dois casos para podermos resolver q_o :

1º Caso: A descarga para a atmosfera é feita através de uma resistência fluídica linear (seria a hipótese mais comum !). Assim

$$q_o = \frac{\Delta p}{R_f} = \frac{1}{R_f} (p_o - p_{atm})$$

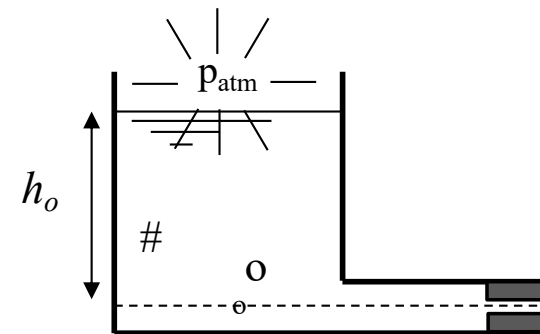


e a pressão no ponto o pode ser escrita usando a propriedade dos pontos isóbaros

$$p_o = \rho g h_o + p_{atm}$$

Portanto:

$$q_o = \frac{1}{R_f} \rho g h_o$$



Exemplo 1: Cont. ...

Retornando à equação para o modelo temos

$$q_i dt - \frac{1}{R_f} \rho g h_o dt = A dh_o$$

$$A \frac{dh_o}{dt} + \frac{1}{R_f} \rho g h_o = q_i$$

e aplicando a T.L. com condições iniciais nulas

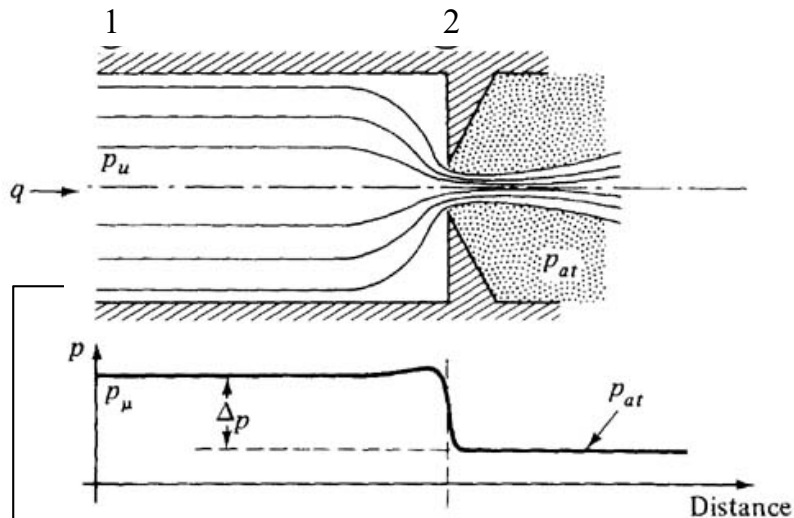
$$\left(As + \frac{1}{R_f} \rho g \right) H_o(s) = Q_i(s)$$

da qual obtemos a F.T. desejada

$$\frac{H_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{R_f}{\rho g}}{\frac{AR_f}{\rho g} s + 1}$$

Exemplo 1: Cont. ...

2º Caso: A descarga para a atmosfera é feita através de um orifício¹



Usando a Equação de Bernoulli

$$p_1 q + \frac{\rho v_1^2 q}{2} = p_2 q + \frac{\rho v_2^2 q}{2}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

Agora como $q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ temos

$$q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \Rightarrow q \cong C_d A_o \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

¹ Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998 -

Exemplo 1: Cont. ...

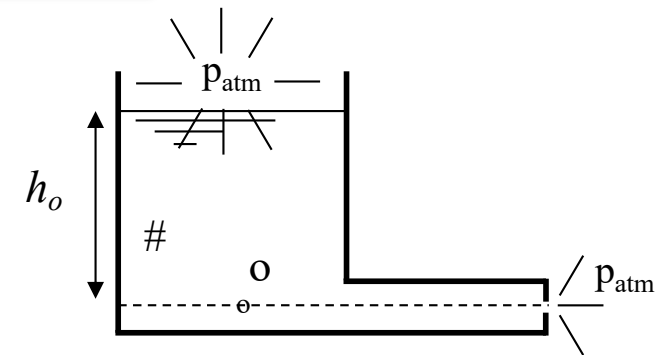
Então, para o presente caso

$$q_o = C_d A_o \sqrt{\frac{2(p_o - p_{atm})}{\rho}} = C_d A_o \sqrt{2gh_o} = k_o \sqrt{h_o}$$

Retornando à EDO temos

$$q_i dt - k_o \sqrt{h_o} dt = A dh_o$$

$$A \frac{dh_o}{dt} + k_o \sqrt{h_o} = q_i$$

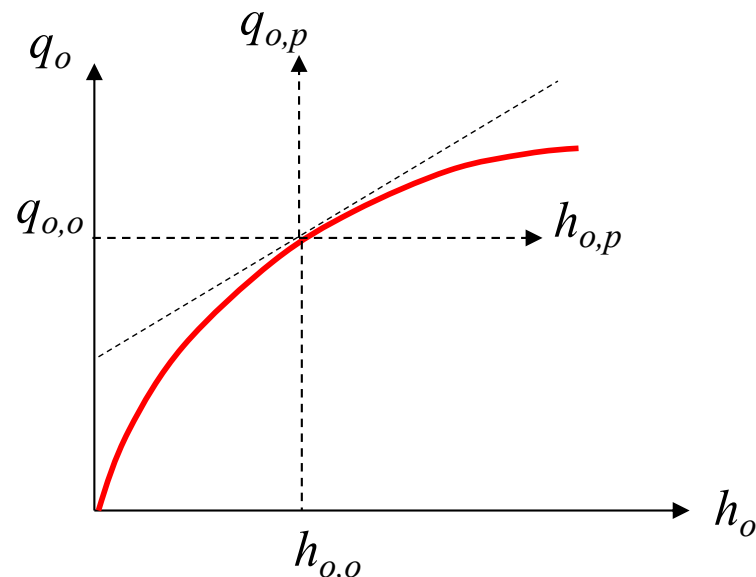


Que claramente é uma EDO não linear ! Para a solução da EDO temos duas saídas:

- Resolver a EDO não linear através de técnicas numéricas
- Obter uma EDO linearizada em torno de um ponto de operação (única saída para obtermos a F.T. !)

Exemplo 1: Cont. ...

Escolhemos um ponto de operação $(h_{o,o}, q_{o,o})$



Expandimos a função não linear em torno deste ponto: Séries de Taylor

$$y = f(x) \cong f(x_o) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_o} \frac{(x - x_o)}{1!}$$

$$y = \sqrt{h_o} \cong \sqrt{h_{o,o}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{o,o}}} (h_o - h_{o,o}) = \sqrt{h_{o,o}} + \frac{h_{o,p}}{2\sqrt{h_{o,o}}}$$

onde: $h_{o,p} = h_o - h_{o,o}$ (perturbação em torno de $h_{o,o}$)

Exemplo 1: Cont. ...

Usamos a expansão na EDO

$$A \frac{dh_o}{dt} + k_o \sqrt{h_o} = q_i \quad h_{o,p} = h_o - h_{o,o}$$

Obtendo a seguinte equação

$$A \frac{d(h_{o,p} + h_{o,o})}{dt} + k_o \left(\sqrt{h_{o,o}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{o,o}}} h_{o,p} \right) = q_{i,o} + q_{i,p}$$

Assumindo que no ponto de operação antes da perturbação o nível do tanque era contante, podemos fazer

$$q_{i,o} = k_o \sqrt{h_{o,o}}$$

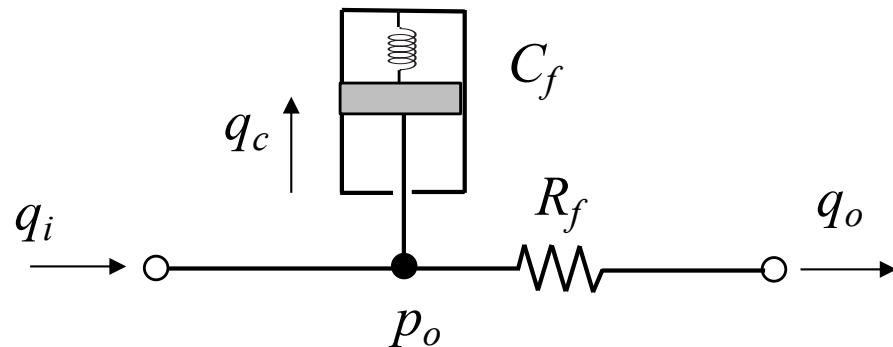
e, então

$$A \frac{dh_{o,p}}{dt} + k_{or} h_{o,p} = q_{i,p} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{H_{o,p}(s)}{Q_{i,p}(s)} = \frac{1}{\frac{A}{k_{or}} s + 1}$$

Exemplo 1: Cont. ...

Ainda supondo que a resistência fluídica seja linear, podemos resolver o problema de outra maneira



Escrevemos inicialmente

$$q_i = q_c + q_o$$

sendo q_c o acúmulo de fluido devido à capacitância do tanque. Usando a T.L.

$$Q_i(s) - Q_o(s) = Q_c(s)$$

$$Q_o(s) = \frac{1}{R_f} \Delta P(s) = \frac{1}{R_f} \rho g H_o(s)$$

E sabemos:

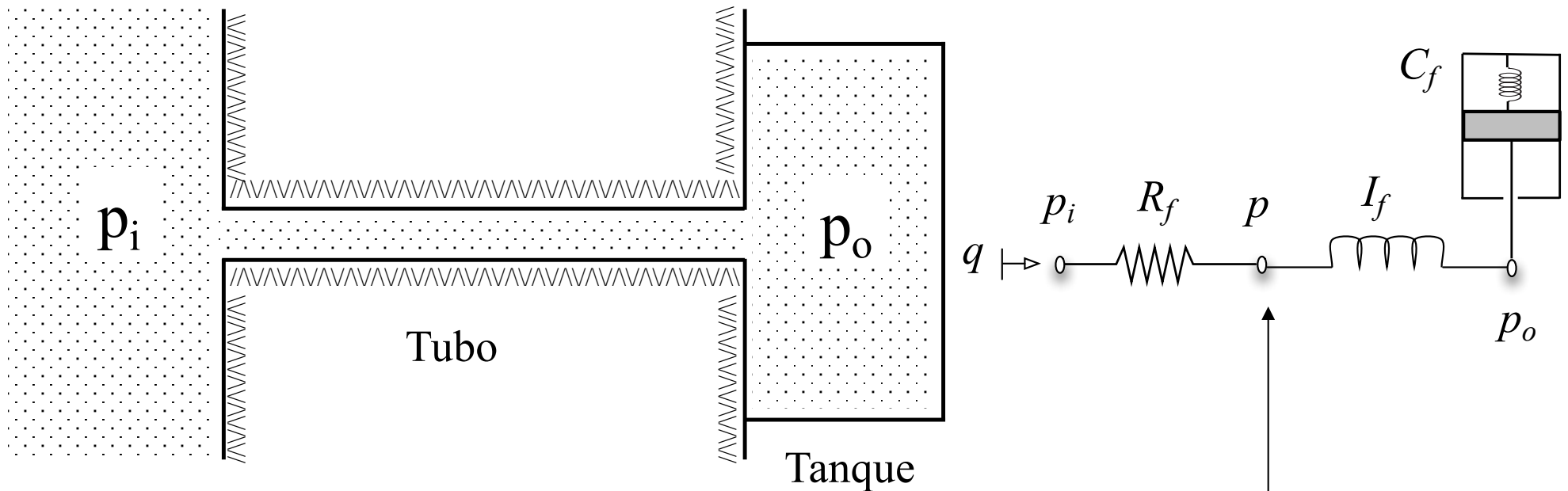
$$Q_c(s) = A s H_o(s)$$

Substituindo-se vem:

$$\frac{H_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{\frac{R_f}{\rho g}}{\frac{A R_f}{\rho g} s + 1}$$

Exemplo 2

Para o sistema de transferência de gás obter a F.T. $P_o(s)/P_i(s)$



Hipóteses Simplificadoras

- Todas as paredes são rígidas
- Para o tubo considero resistência e inércia
- Gás ideal
- Volume do tubo pequeno comparado ao do tanque
- Variações muito lentas de temperatura (isotérmico)

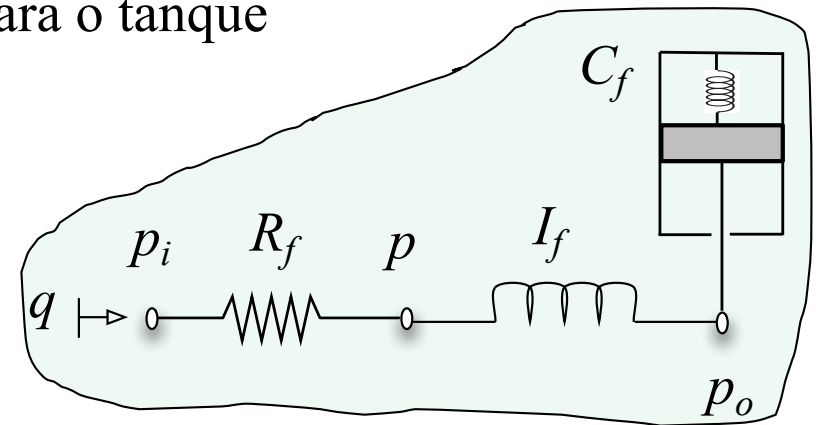
Cont. ...

Então podemos aplicar a conservação de massa para o tanque

$$\dot{m}_{in} dt - \dot{m}_{out} dt = dm$$

Ou também

$$\rho q dt = dm$$



Podemos resolver o lado esquerdo da igualdade através do balanço de pressão no ponto de ligação entre R_f e I_f

$$p_i - p = R_f q$$

$$p - p_o = I_f \frac{dq}{dt}$$

Precisamos agora resolver para dm , ou seja para a massa de gás acumulada no tanque. Neste caso, pela hipótese do gás ideal podemos escrever

$$p_o V = mRT \quad \Rightarrow \quad dm = \frac{V}{RT} dp_o$$

Cont. ...

Logo a EDO para o tanque fica escrita como

$$\rho q = \frac{V}{RT} \frac{dp_o}{dt}$$

Aplicamos Laplace à todas as equações

$$\rho Q(s) = \frac{V}{RT} s P_o(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_i(s) - P(s) = R_f Q(s) \\ P(s) - P_o(s) = I_f s Q(s) \end{array} \right. +$$

$$P_i(s) - P_o(s) = (I_f s + R_f) Q(s)$$

E combinando as duas equações resultantes temos

$$\frac{P_o(s)}{P_i(s)} = \frac{1}{\frac{VI_f}{\rho RT} s^2 + \frac{VR_f}{\rho RT} s + 1}$$

FINIM

Bom Estudo !

