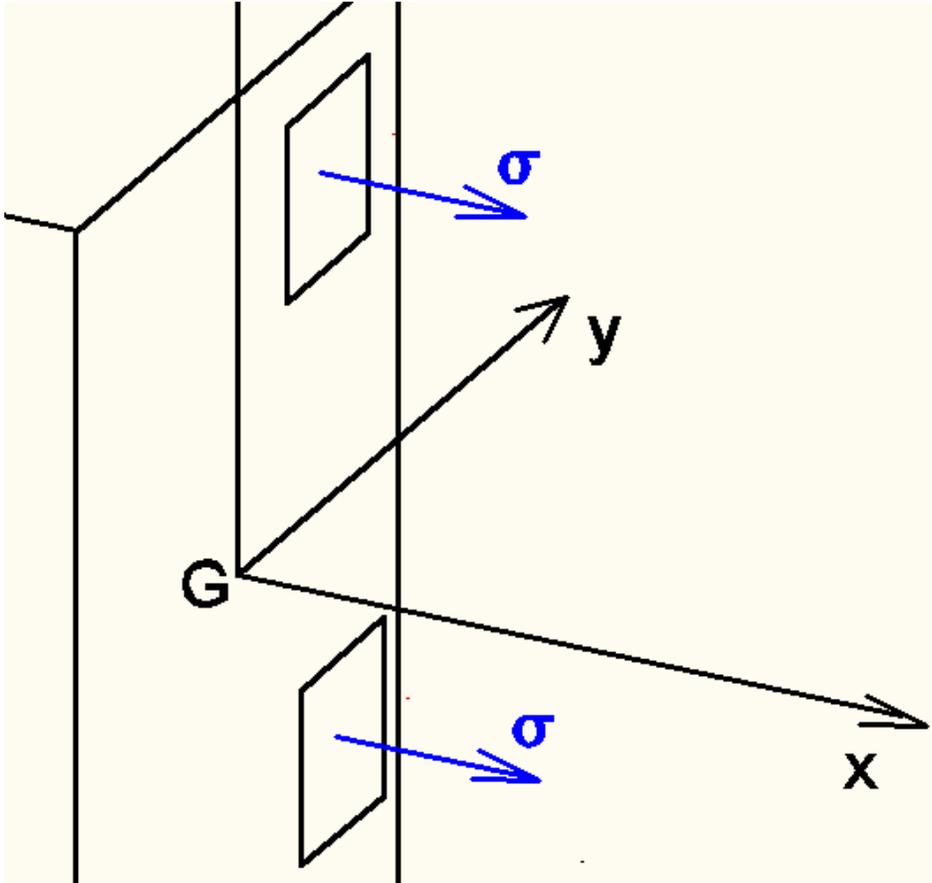




Tensão – Deformação
Diagrama tensão - deformação
Modelo constitutivo
Cargas axiais e Cisalhamento puro

Valério S. Almeida
Maio/2021

Relação Tensão-Força Normal

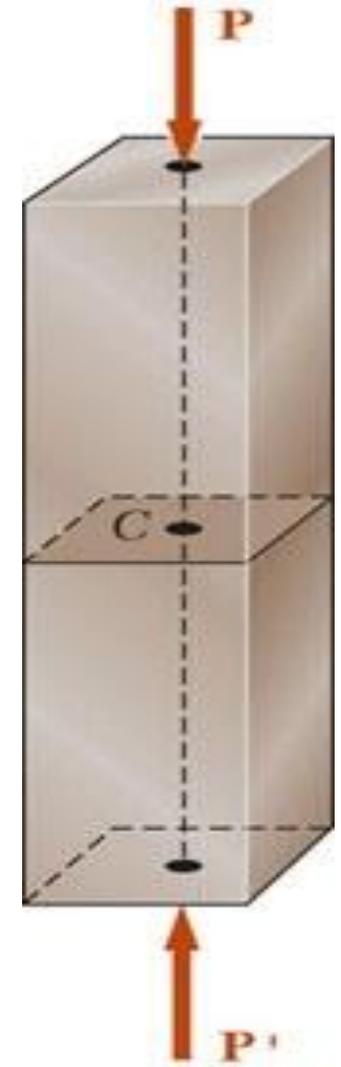


$$N = \int_A \sigma dA$$

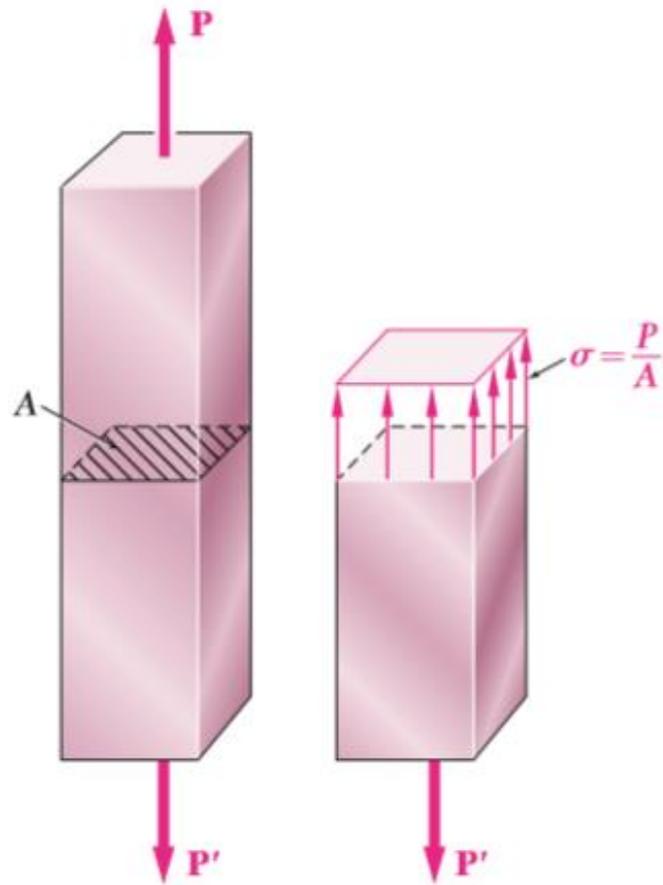
N: ESFORÇO NORMAL
σ: TENSÃO NORMAL

$$M = 0$$

CARGA AXIAL CENTRADA

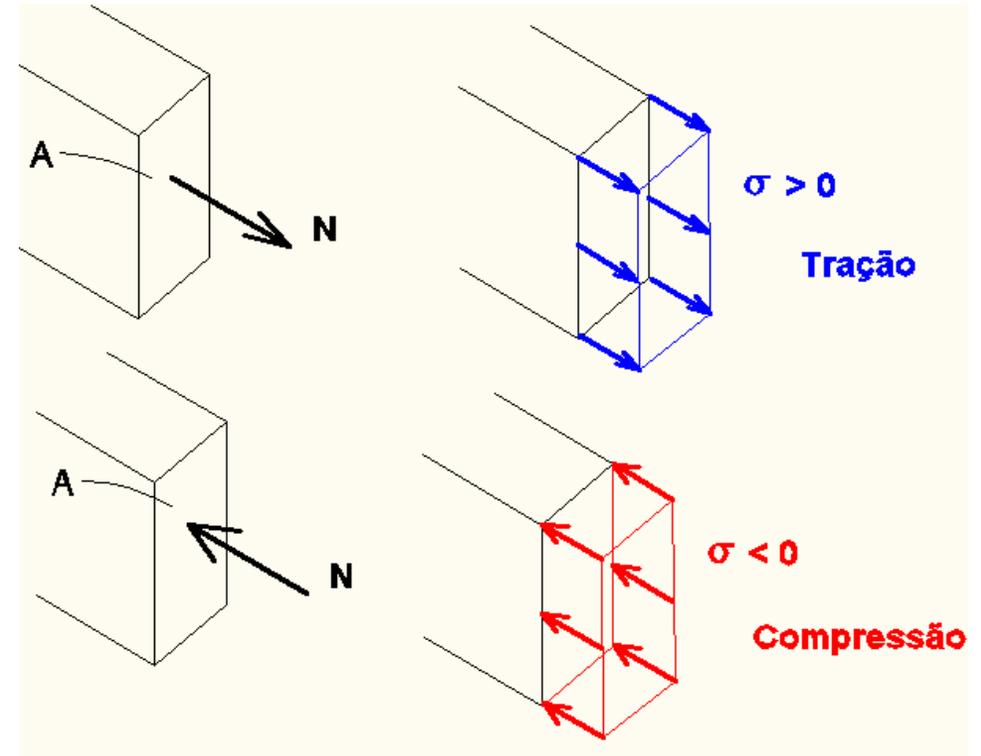


Relação Tensão-Força Normal



$$\sigma_{med} = \sigma = \frac{N}{A}$$

N: força normal; A: área da seção transversal



Unidade:

N/m^2 (Pa)

$kN/m^2 = 1.10^3 N/m^2 = 1 \text{ kPa}$

$MN/m^2 = 1.10^6 N/m^2 = 1 \text{ MPa}$

$kgf/cm^2 = 1.10^{-3} tf/cm^2 = 0,1 \text{ MPa}$

Definição de Deformação (ϵ)

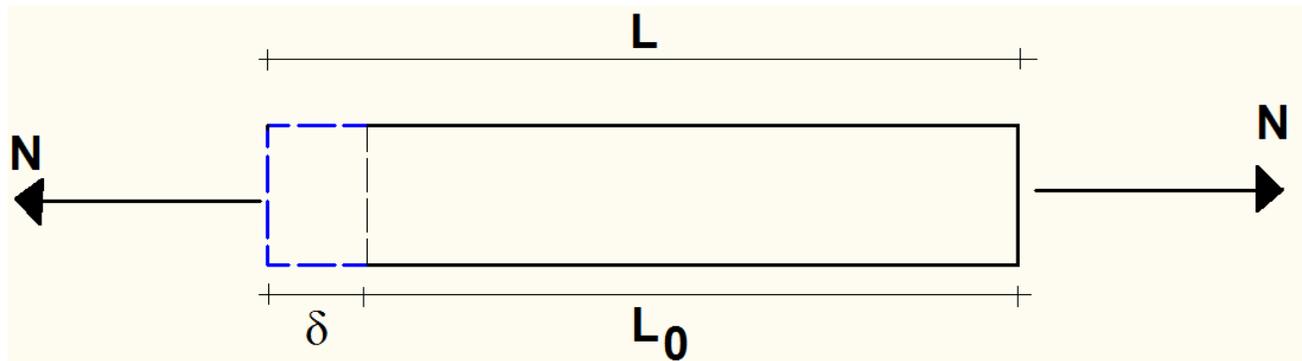
N : esforço normal de tração

L_0 : comprimento inicial da barra reta

L : comprimento final

ϵ : alongamento relativa, deformação específica

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

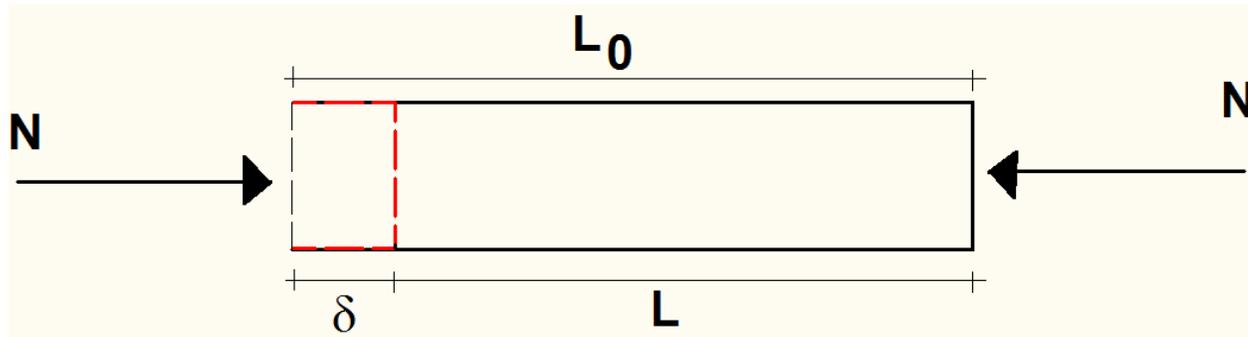


$\epsilon > 0 \rightarrow$ alongamento

Definição de Deformação (ϵ)

N : esforço normal de compressão

ϵ : alongamento relativa, deformação específica

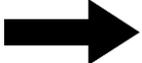


$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

$\epsilon < 0 \rightarrow$ *encurtamento*

Unidade (ϵ): adimensional

Modelos constitutivos

Comportamento do material  Tensão: em função da história da deformação



Equação constitutiva

Relações distintas para cada material: fibras, rochas, concreto, aço

6

Uma dimensão: Lei da tensão x deformação

Ensaio de tração

Características essenciais do comportamento do material



**Curva tensão – deformação com teste unidimensional
(uniaxial/cisalhamento)**

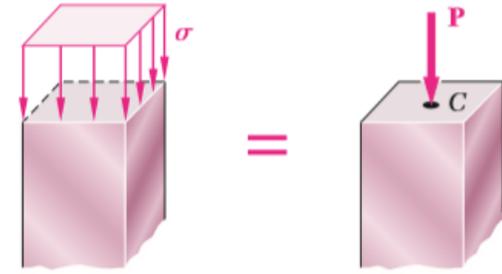
- **Carga quase-estática**
- **Temperatura moderada (evitar efeito dependente do tempo)**

Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

Ensaio de corpo de prova



Máquina de teste



Aplica-se uma força gradativa

Mede-se a deformação com extensômetros

Plota a curva tensão - deformação

$$\sigma(t) = \frac{N(t)}{A}$$

$$\epsilon(t) = \frac{L(t) - L(t_0)}{L(t_0)} = \frac{\delta}{L_0}$$

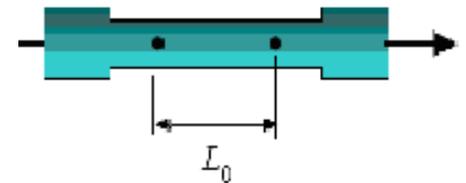
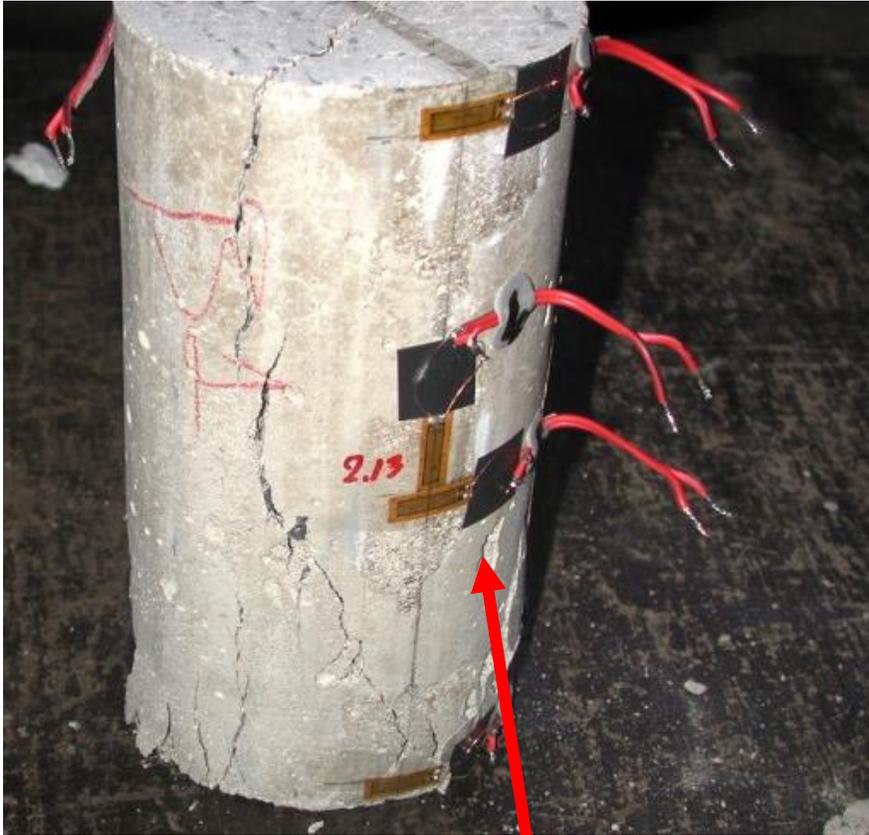
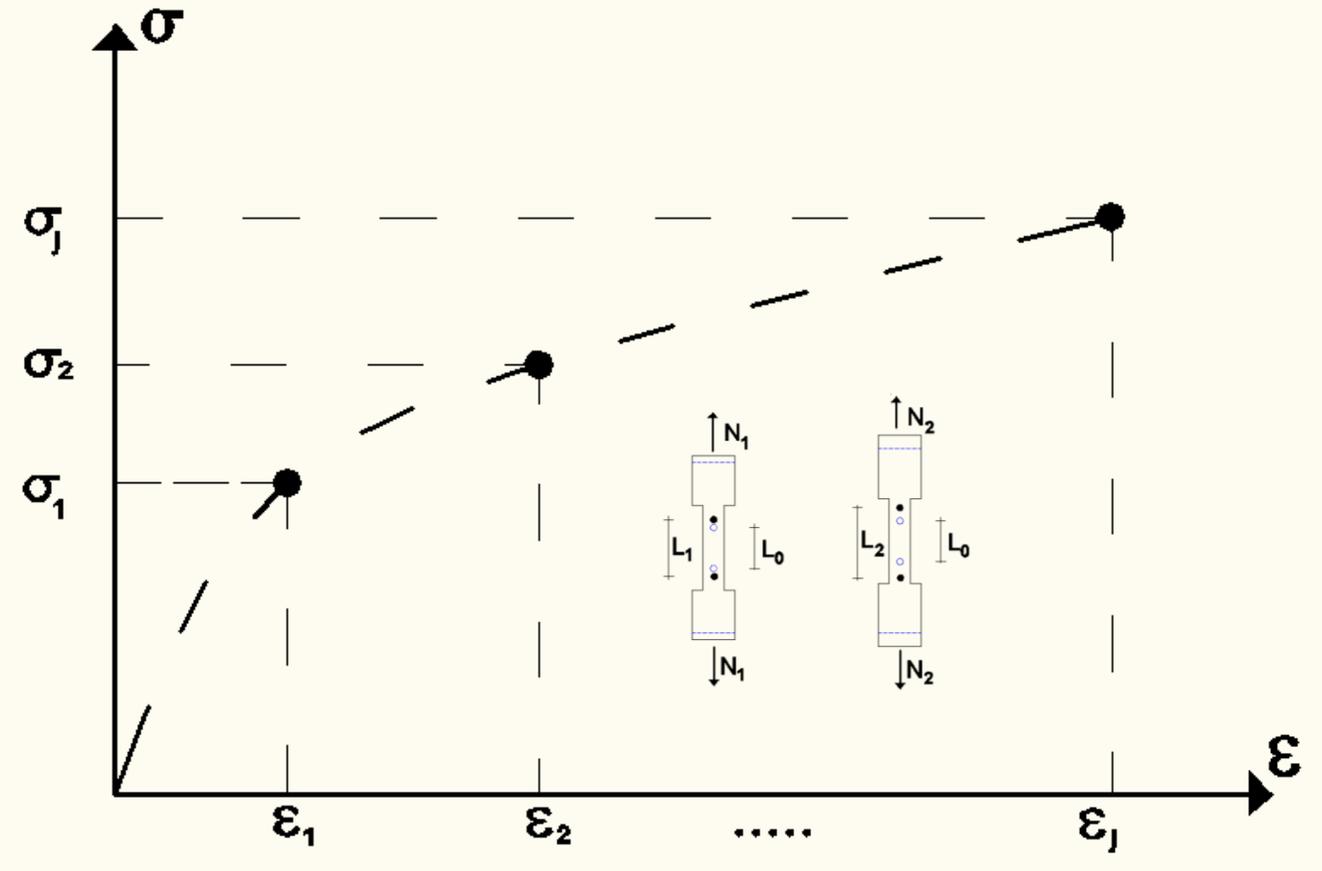


Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

Plota-se a curva tensão - deformação



extensômetros

Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

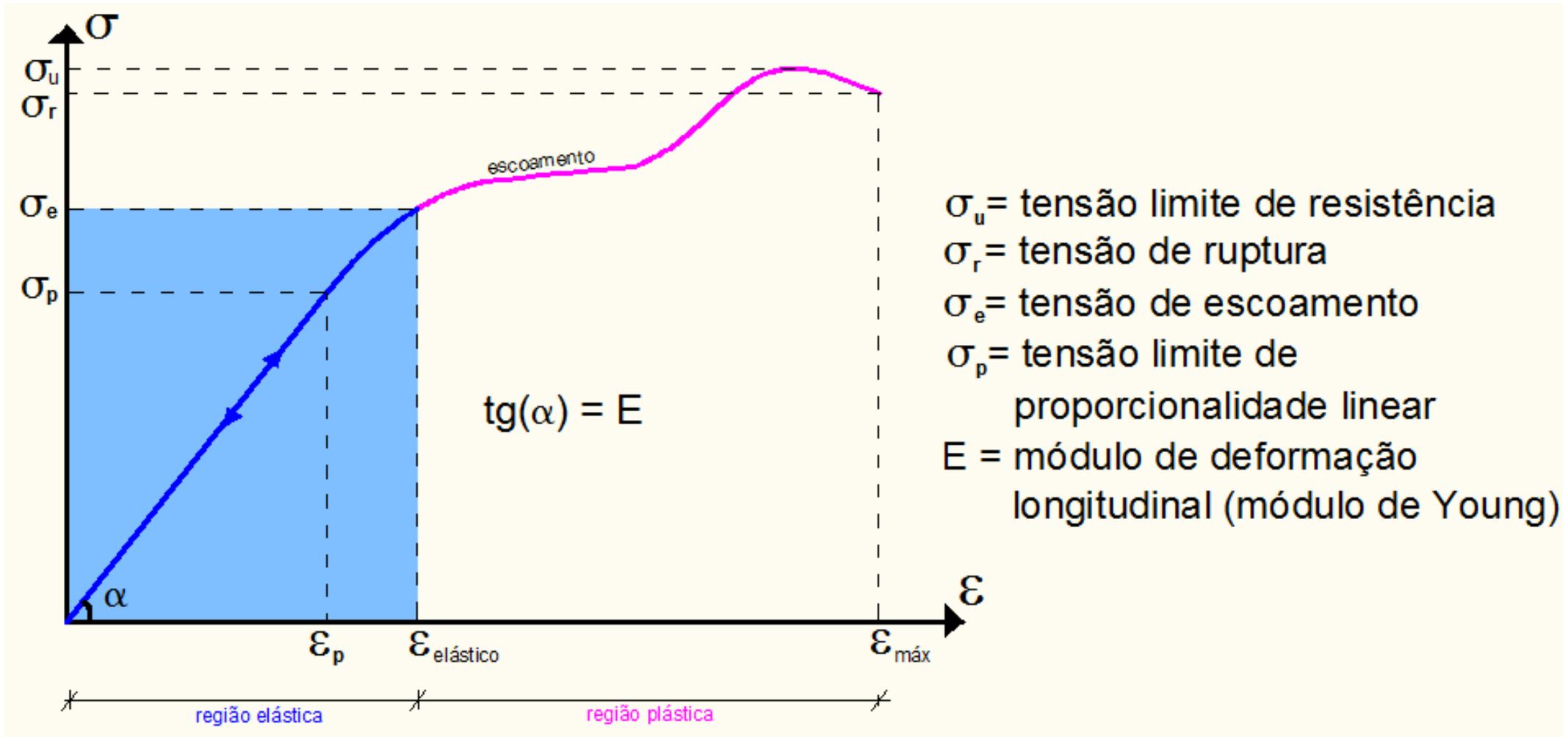


Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

Região elástica

- reversível

Trecho Linear

- Lei de Hooke

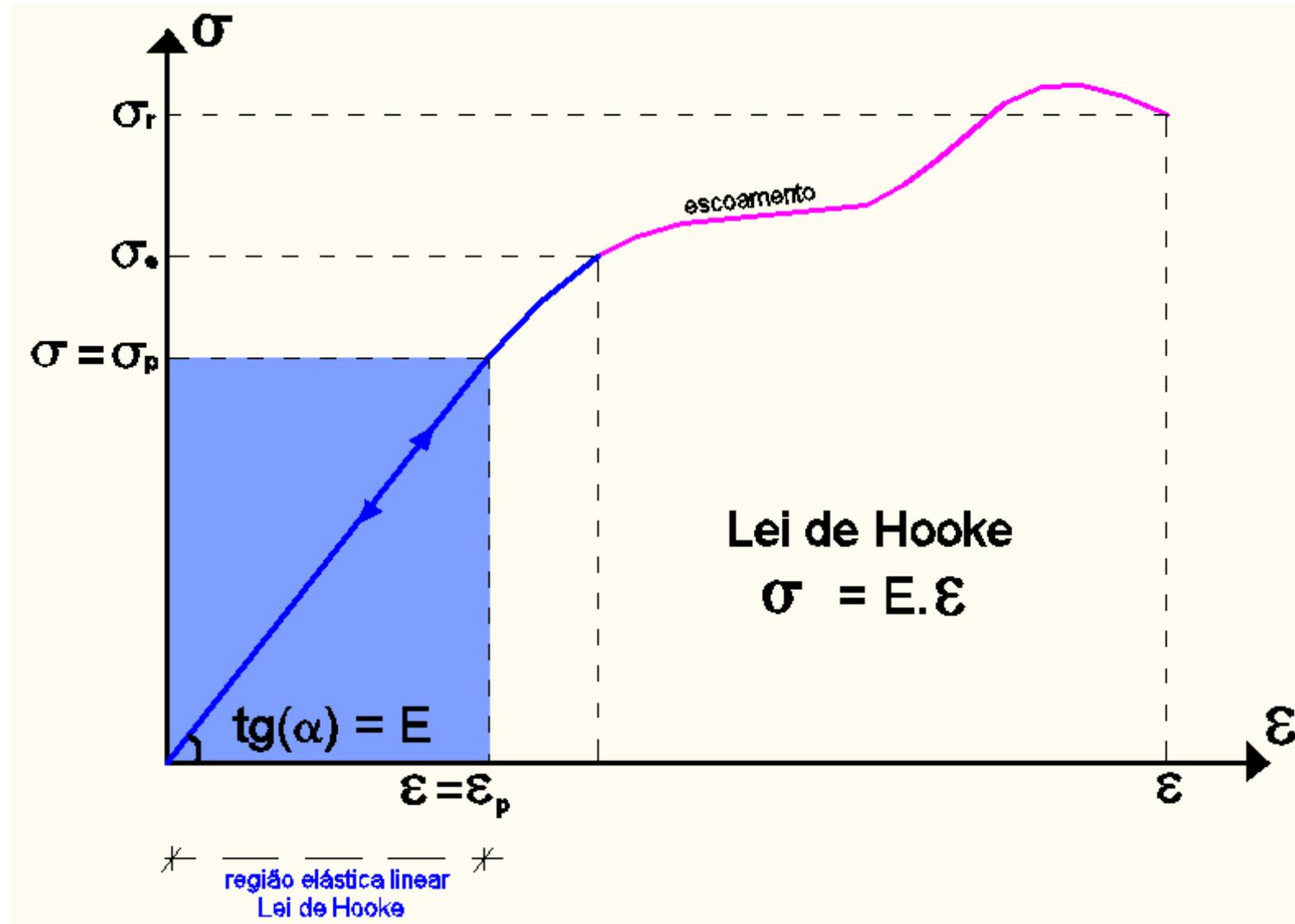


Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

Região plástica: irreversível

Perda por aquecimento
Movimentação permanente dos cristais

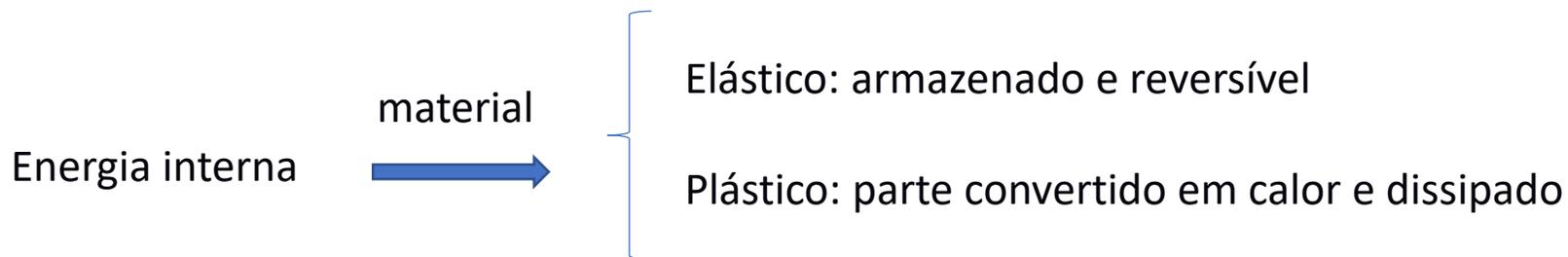
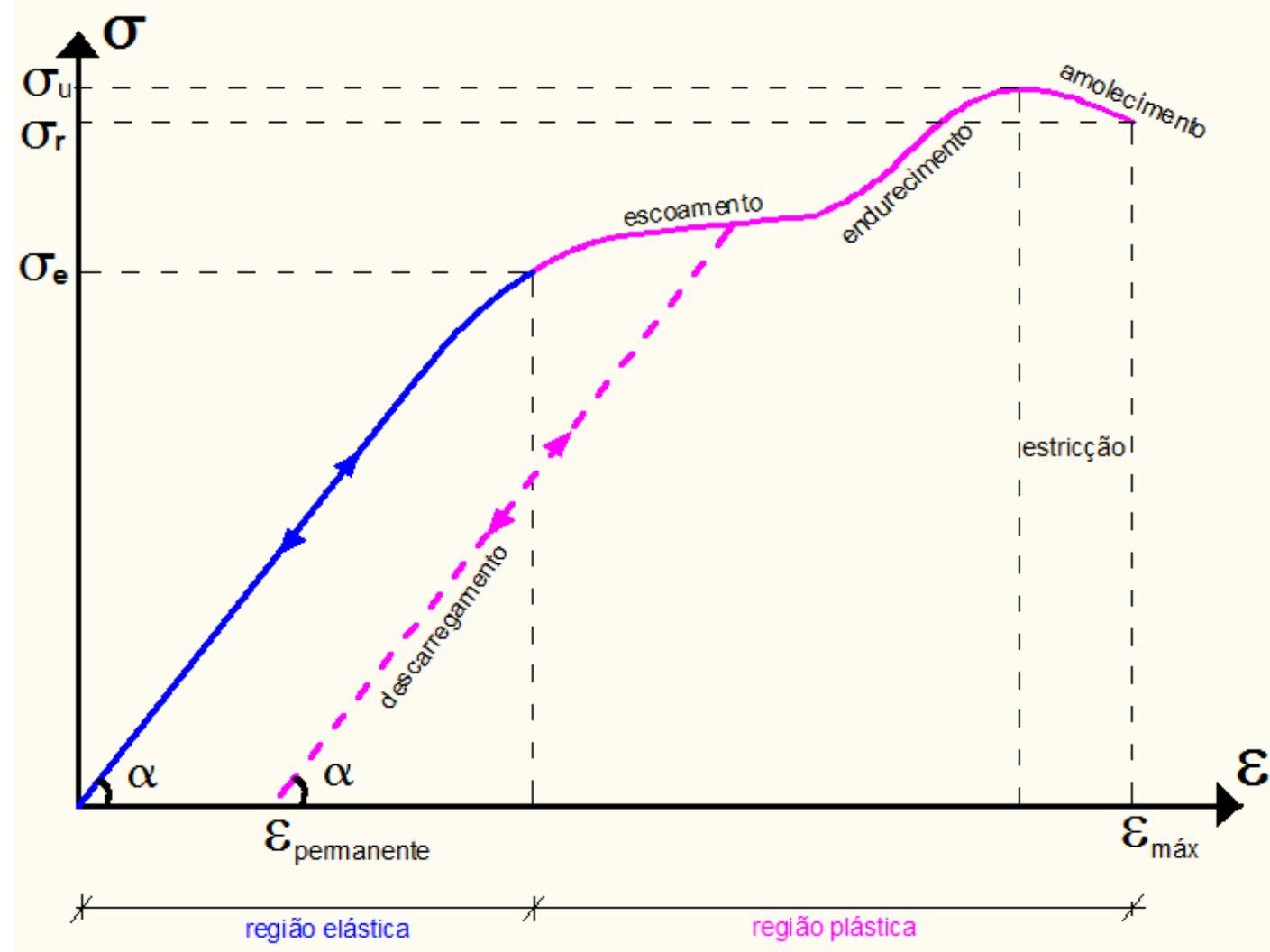


Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

Material dúctil

- Resistem bem ao impacto
- Ideais para engenharia
- Deformam muito antes de romper (25%)
Ex. Aço doce

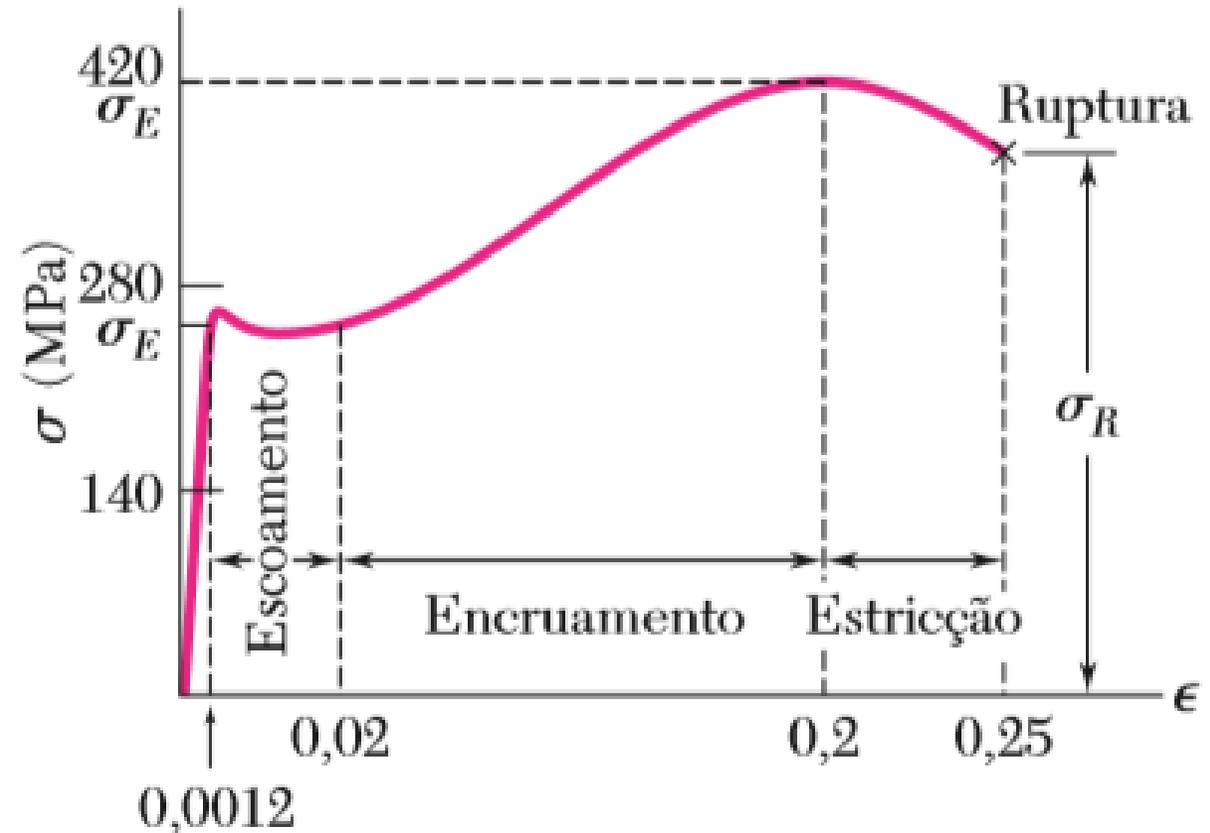
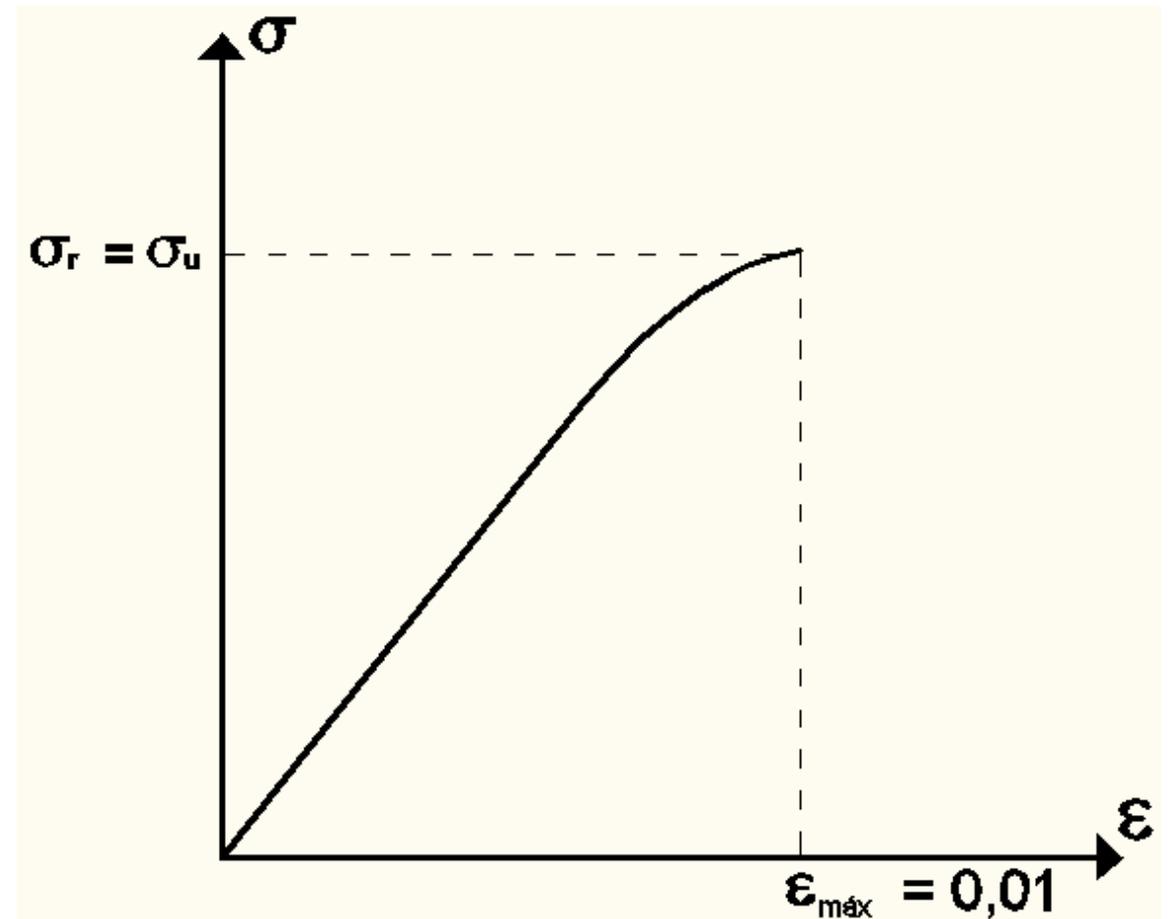


Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

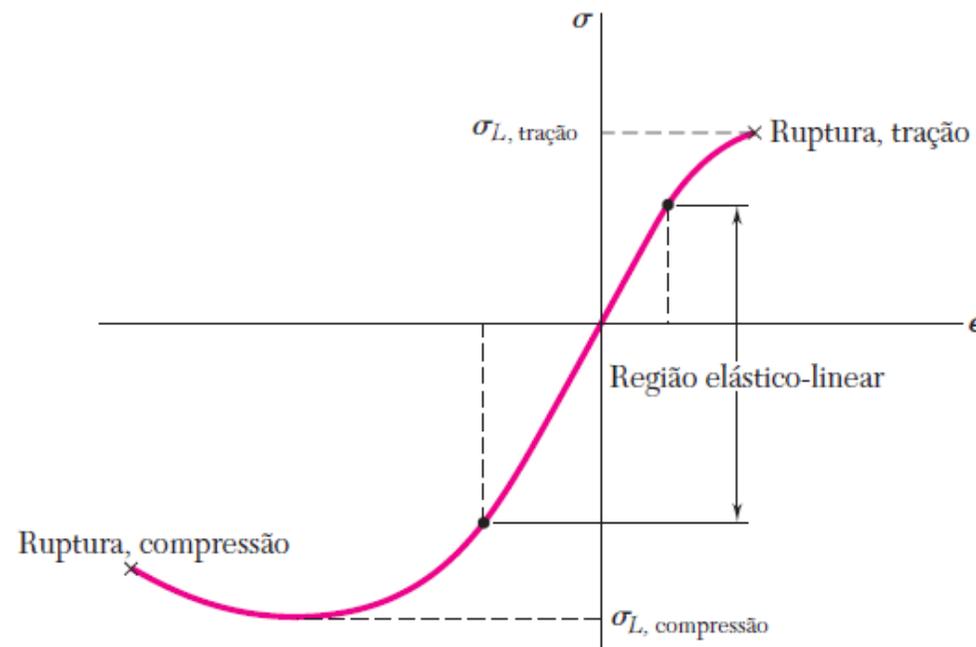
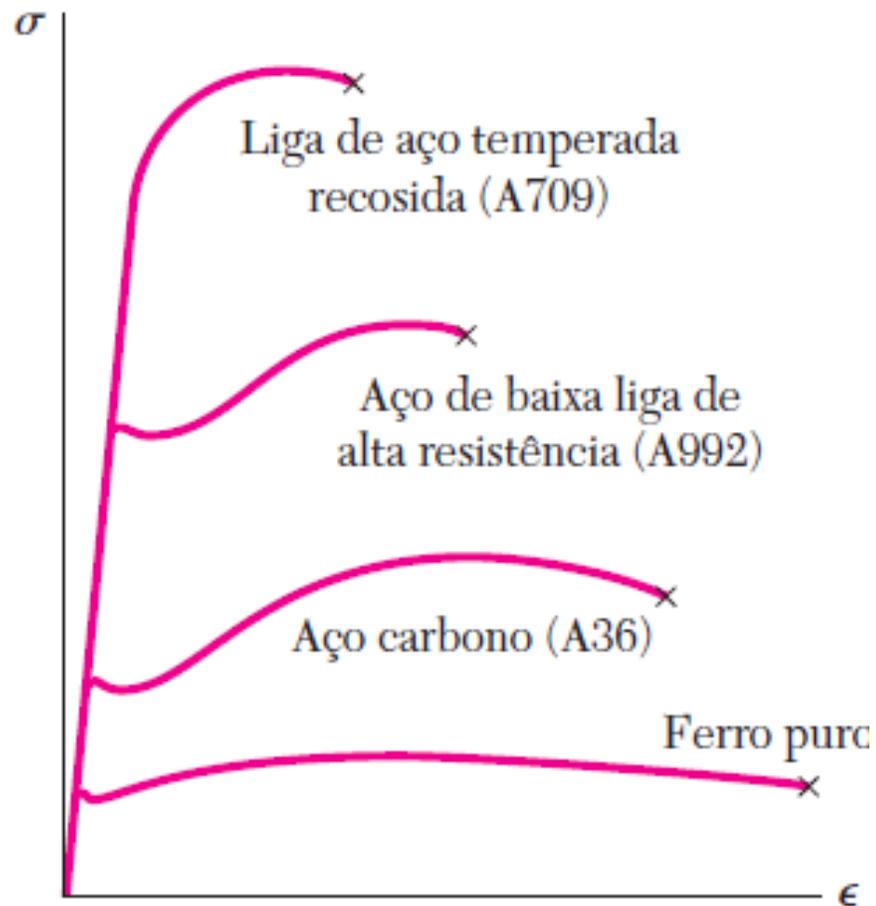
Material frágil:

- Não tem quase escoamento ($\sim 1\%$)
- Ruptura repentina

Ex. Ferro fundido, concreto.



Diversos tipos de Diagrama Tensão-Deformação (σ - ϵ)

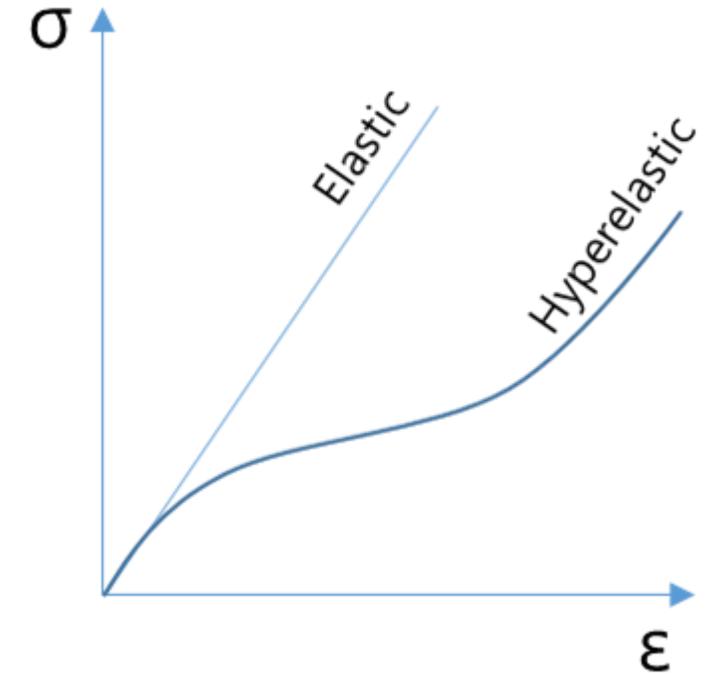


Material Hiperelásticos (MH)



Lei constitutiva usada em materiais que respondem elasticamente a grandes deslocamentos

- **Grandes deslocamentos**
- Comportamento elástico não-linear
- Isotrópicos
- Requerem análise não linearidade geométrica
- Modelos constitutivos descritos por energia de deformação



Alguns tipos de modelos de MH:

Neo-Hooke, Mooney-Rivlin, Arruda-Boyce, Ogden

Ex. Materiais elastoméricos, borrachas, espumas, tecidos

Deformações de 500% sem plastificar ou fraturar



Material elástico-linear

Estudo da Resistência dos Materiais

Escala macroscópica pode-se muitas vezes admitir um volume representativo **homogêneo** para o material

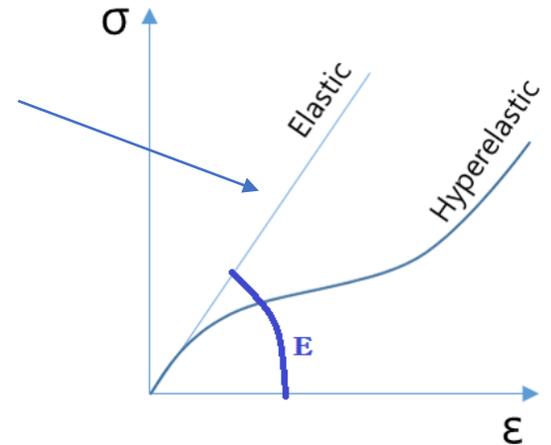
Hipóteses Material

Homogêneo: comportamento das propriedades mecânicas idênticos em todo o material

Isótropo: mesmas propriedades em todas direções

Linearmente elástico $\sigma = E\varepsilon$ (Lei de Hooke)

Relações que ligam as componentes de tensão e deformações



E : Módulo de Elasticidade Longitudinal ou Módulo de Young (F/L^2) \longrightarrow *Depende de cada material*

Exemplos de materiais

Aço: $E = 200 \text{ GPa}$
 $\sigma_u = 400 \text{ MPa}$

Titânio: $E = 120 \text{ GPa}$
 $\sigma_u = 900 \text{ MPa}$

Concreto:
 $E = 22 \text{ GPa}$
 $\sigma_u = 30 \text{ MPa}$ (compressão)
 $\sigma_u = 3 \text{ MPa}$ (tração)

Alumínio: $E = 70 \text{ GPa}$
 $\sigma_u = 110 \text{ MPa}$

Apêndice B. Propriedades típicas de materiais mais usados na engenharia^{1,5} (Unidades SI) Continuação

Material	Densidade kg/m ³	Limite de resistência			Tensão de escoamento ³		Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10 ⁻⁶ /°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
		Tração, MPa	Compressão ² , MPa	Cisalhamento, MPa	Tração, MPa	Cisalhamento, MPa				
Ligas de magnésio										
Liga AZ80 (forjado)	1800	345		160	250		45	16	25,2	6
Liga AZ31(extrudado)	1770	255		130	200		45	16	25,2	12
Titânio										
Liga (6% Al, 4% V)	4730	900			830		115		9,5	10
Liga Monel 400 (Ni-Cu)										
Trabalhado a frio	8830	675			585	345	180		13,9	22
Recozido	8830	550			220	125	180		13,9	46
Cobre-níquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recozido	8940	365			110		140	52	17,1	35
Trabalhado a frio	8940	585			545		140	52	17,1	3
Madeira, seca ao ar⁴										
Douglas fir	470	100	50	7,6			13	0,7	Varia 3,0 a 4,5	
Spruce, sitka	415	60	39	7,6			10	0,5		
Shortleaf pine	500		50	9,7			12			
Western white pine	390		34	7,0			10			
Ponderosa pine	415	55	36	7,6			9			
White oak	690		51	13,8			12			
Red oak	660		47	12,4			12			

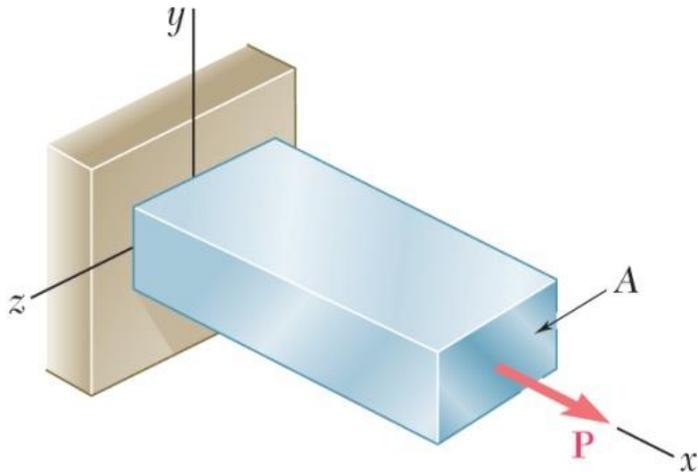
$\sigma_u = 900 \text{ MPa} = 9.000 \text{ kgf/cm}^2$

(Unidades SI)

Continuação

Material	Densidade kg/m ³	Limite de resistência			Tensão de escoamento ³		Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10 ⁻⁶ /°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
		Tração, MPa	Compressão ² , MPa	Cisalhamento, MPa	Tração, MPa	Cisalhamento, MPa				
Concreto										
Média resistência	2320		28				25		9,9	
Alta resistência	2320		40				30		9,9	
Plásticos										
Náilon, tipo 6/6 (composto moldado)	1140	75	95		45		2,8		144	50
Polycarbonato	1200	65	85		35		2,4		122	110
Poliéster PBT (termoplástico)	1340	55	75		55		2,4		135	150
Elastômero termoplástico de poliéster										
Poliestireno	1030	55	90		55		3,1		125	2
Vinil, PVC rígido	1440	40	70		45		3,1		135	40
Borracha	910	15							162	600
Granito (valores médios)	2770	20	240	35			70	4	7,2	
Mármore (valores médios)	2770	15	125	28			55	3	10,8	
Arenito (valores médios)	2300	7	85	14			40	2	9,0	
Vidro, 98% sílica	2190		50				65	4,1	80	

Coeficiente de Poisson



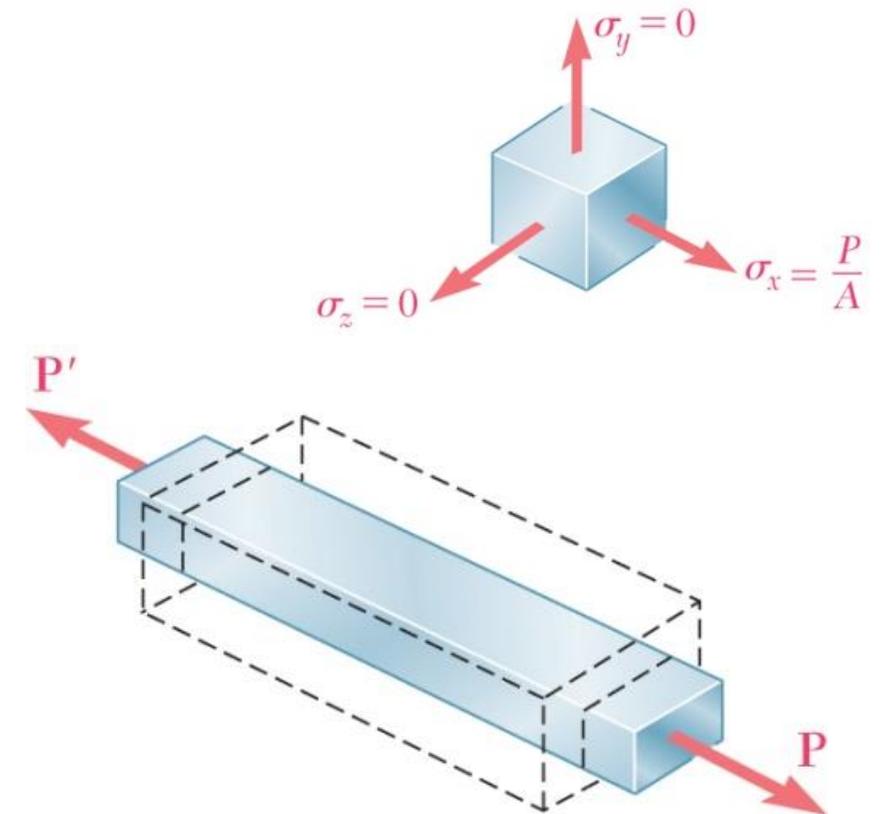
Para o corpo sujeito a força axial em x:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

Mede-se que: $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

Coeficiente de Poisson:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformação específica lateral}}{\text{deformação específica axial}} \right| = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$



Sobrepondo as tensões e deformações:

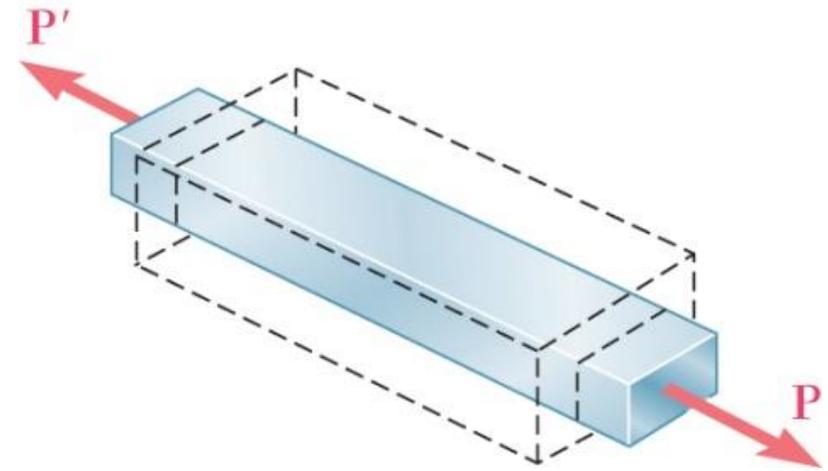
Relação generalizada fica:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$



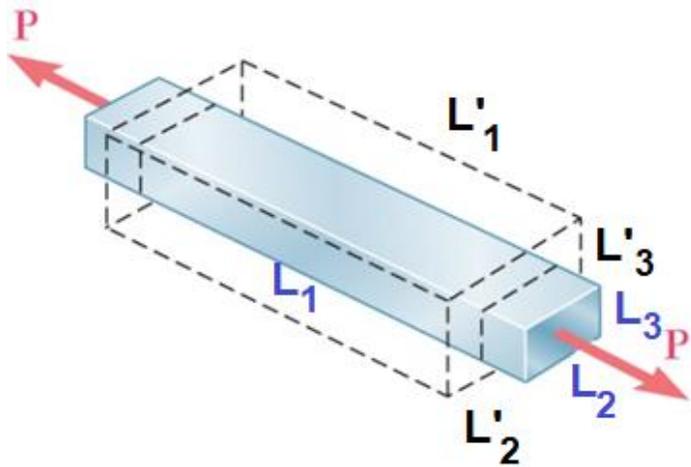
Exemplo: $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = \sigma_z = 0$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\nu(\sigma_x)}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu(\sigma_x)}{E}$$

Material incompressível $\Delta v=0$ (variação de volume nula)



$$V_F = L_1 L_2 L_3$$

$$V_I = L'_1 L'_2 L'_3$$

$$\longrightarrow \Delta V = 0 \rightarrow V_F = V_I \rightarrow \frac{L_1 L_2 L_3}{L'_1 L'_2 L'_3} = 1 \rightarrow \ln \left[\frac{L_1 L_2 L_3}{L'_1 L'_2 L'_3} \right] = \ln 1$$

$$\ln \left(\frac{L_1}{L'_1} \right) + \ln \left(\frac{L_2}{L'_2} \right) + \ln \left(\frac{L_3}{L'_3} \right) = \ln 1 \longrightarrow \ln(\varepsilon_x + 1) + \ln(\varepsilon_y + 1) + \ln(\varepsilon_z + 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{L_1 - L'_1}{L'_1} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{L_1}{L'_1} - 1 \rightarrow \frac{L_1}{L'_1} = \varepsilon_x + 1 \\ \frac{L_2}{L'_2} = \varepsilon_y + 1 \\ \frac{L_3}{L'_3} = \varepsilon_z + 1 \end{array} \right.$$

$$(\varepsilon_x + 1)(\varepsilon_y + 1)(\varepsilon_z + 1) = 1$$

$$\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + 1 = 1 \xrightarrow{\text{desprezando termos de ordem superior}} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

$$\Delta V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \text{ (dilatação cúbica)}$$

Sabendo que:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

$$\varepsilon_x - \nu \varepsilon_x - \nu \varepsilon_z = 0 \rightarrow \varepsilon_x (1 - 2\nu) = 0 \rightarrow \nu = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2}}$$

Outros tipos de materiais

- **Heterogêneos**: volume representativo não possui as mesmas propriedades mecânicas. Formulação complexa, meio contínuo heterogêneo.

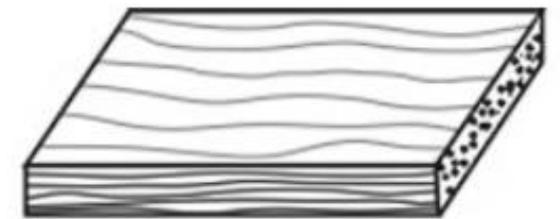
Ex. Solo

- **Anisotrópicos**: propriedades mecânicas variam em direções específicas no material

Ex: Compósitos: material formado por 2 ou mais materiais

Reforço com fibras de vidro, madeira

Caso extremo, difícil de identificar esses parâmetros

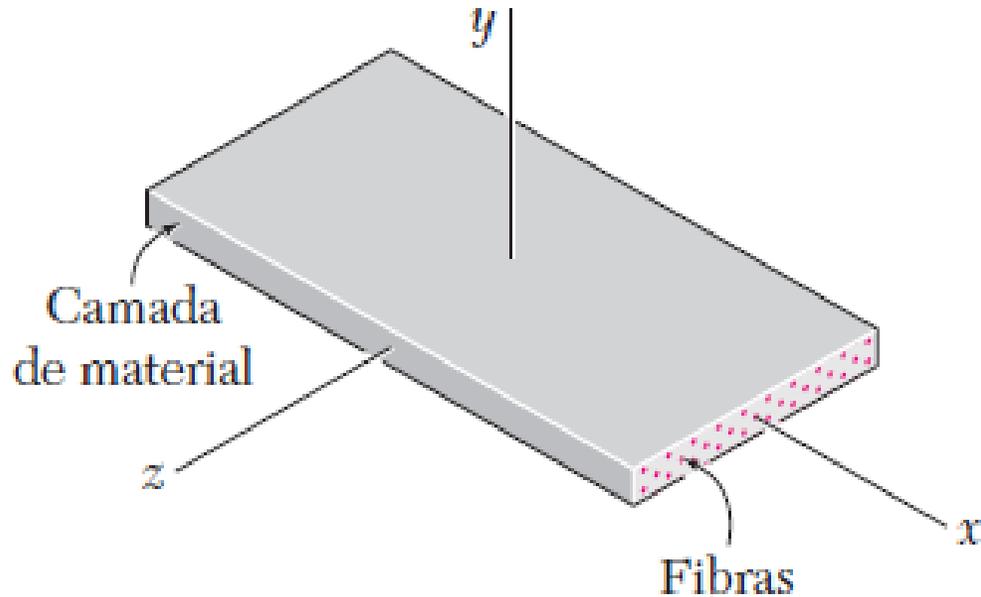


wood



bone

- **Anisotropia ortotrópica:** propriedades mecânicas variam em direções ortogonais
Ex: lamina reforçada, Madeira com fibras unidirecional



$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z \\ -\nu_{xz}/E_x & -\nu_{yz}/E_y & 1/E_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

E_x, E_y, E_z : módulo de elasticidade \neq em cada eixo

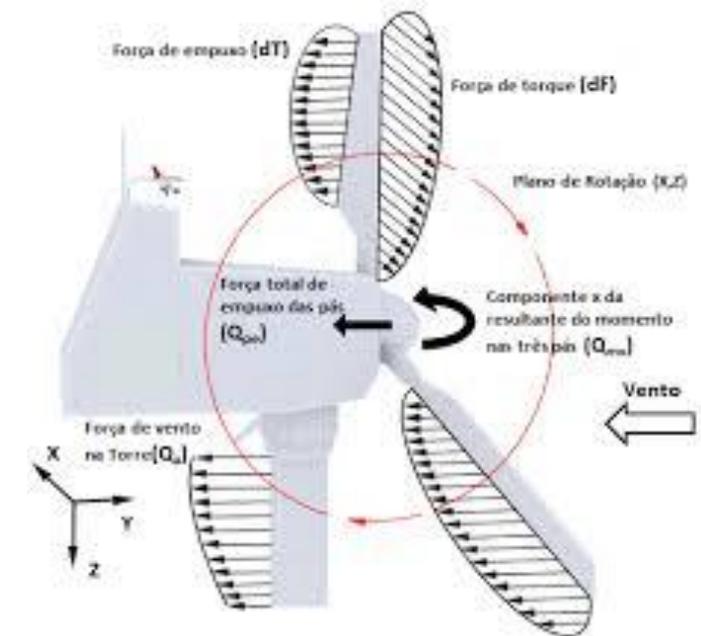
$\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{yz}$: coeficiente de Poisson \neq em cada eixo

Fadiga: carregamento repetidos

Carregamento com natureza flutuante

Inversão da carga completa é mais danoso

Ex. virabrequins de motores, pás de turbinas



Estrutura pode romper pela formação de microfissuras que eleva a tensão local (danificação) e depois trincas (fraturas)

Ensaio de fadiga { \neq níveis de tensão
Nr. de ciclos de cargas



Gráfico tensão S (σ) e abscissa N (nr. de ciclos): diagrama $S-N$

Fadiga: carregamento repetidos

Ensaio de fadiga $\left\{ \begin{array}{l} \neq \text{n\u00edveis de tens\u00e3o} \\ \text{Nr. de ciclos de cargas} \end{array} \right. \longrightarrow$

Gr\u00e1fico tens\u00e3o S (σ) e abscissa N (nr de ciclos): diagrama S-N

Limite de resist\u00eancia \u00e0 fadiga (σ_{res})

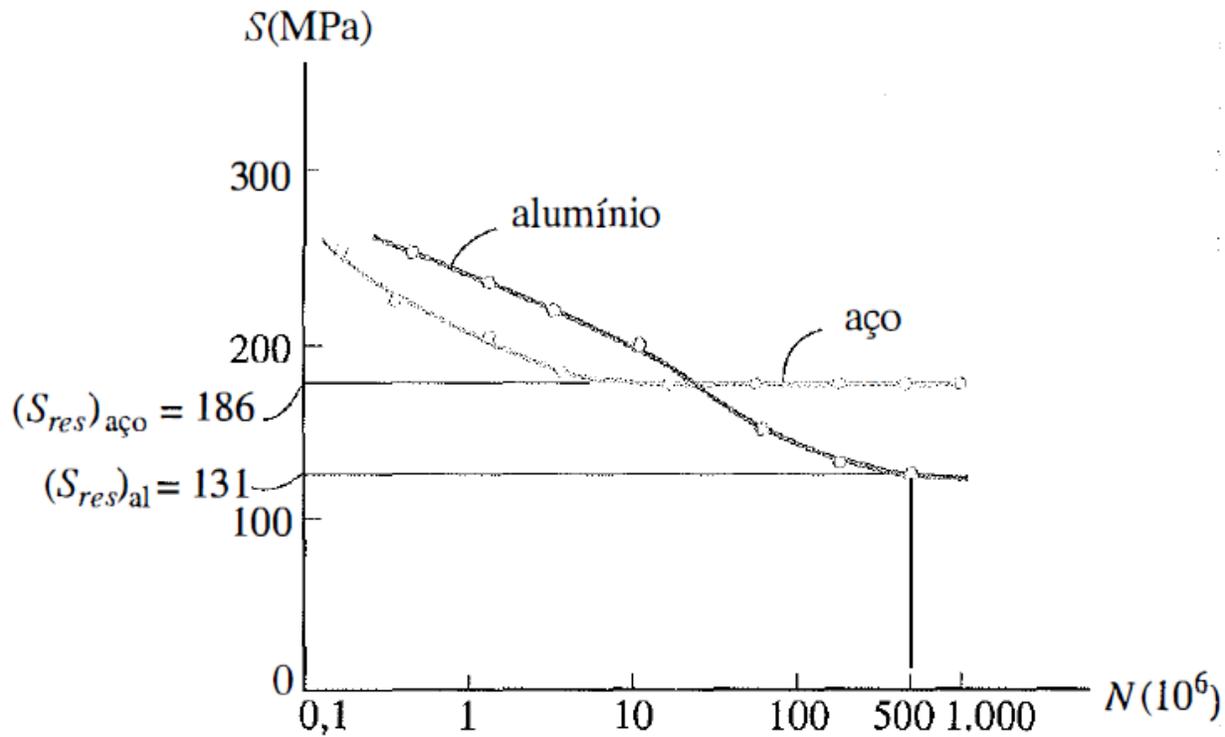
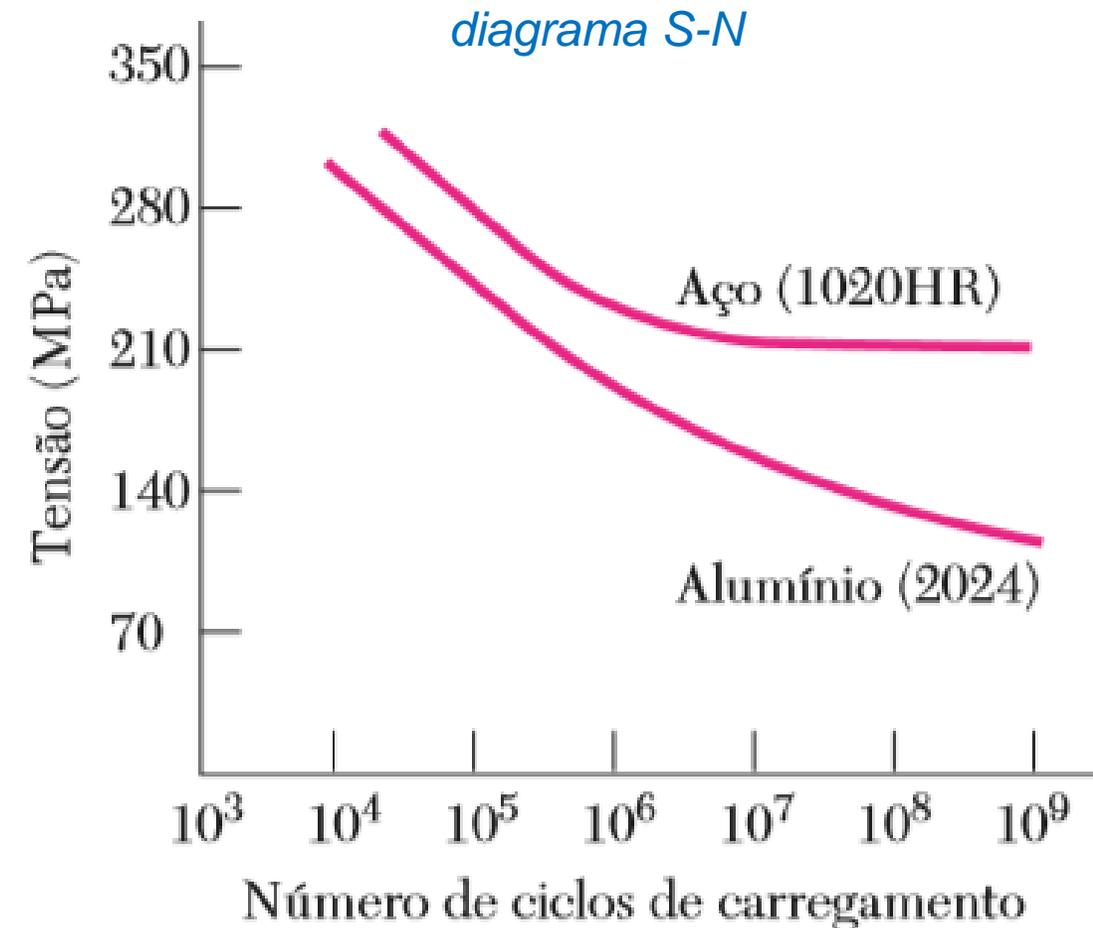


diagrama S-N



Fluência

Cargas atuando por muito tempo \longrightarrow Pode continuar a deformar até romper-se

Fator importante: variação de temperatura, ex. metal, cerâmicos

Temperatura não influencia: madeira, solo, concreto

Alguns projetos precisam levar em conta a fluência:

**Limite de Resistência
à Fluência (σ_{flue})**

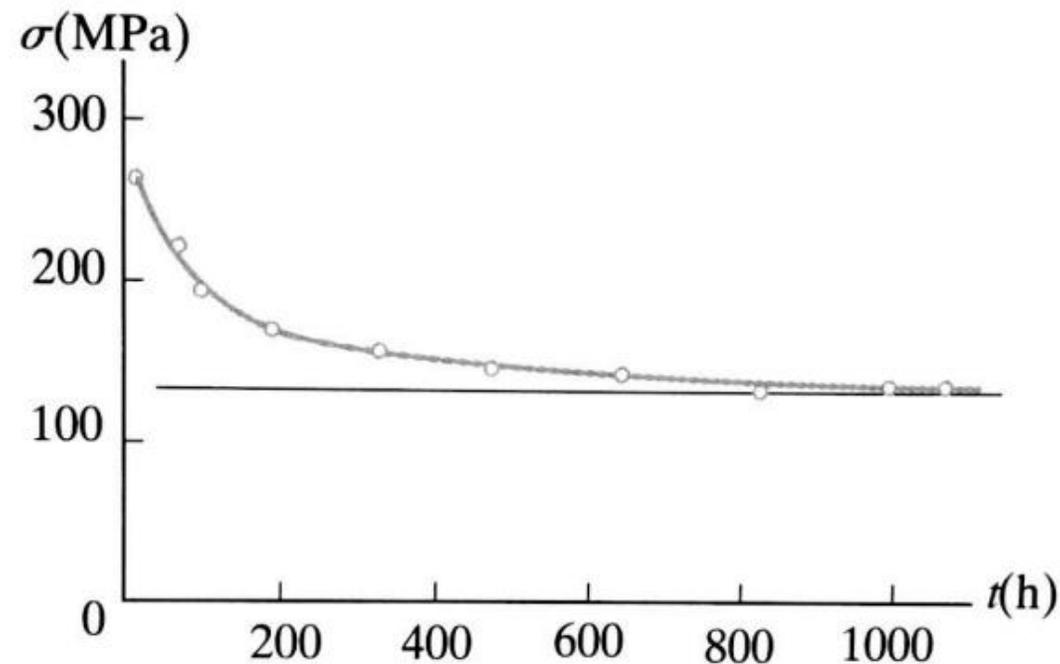


Diagrama $\sigma-t$ para aço inoxidável a 650°C e deformação por fluência de 1%

TENSÕES ADMISSÍVEIS - σ_{adm}

Tensão de segurança ou admissível.
É comum projetar no regime elastolinear

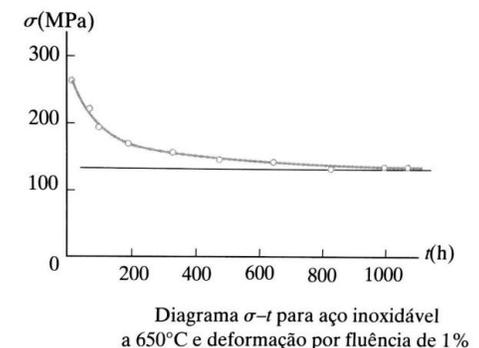
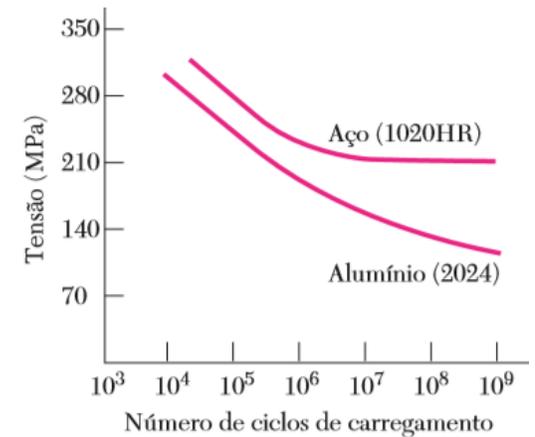
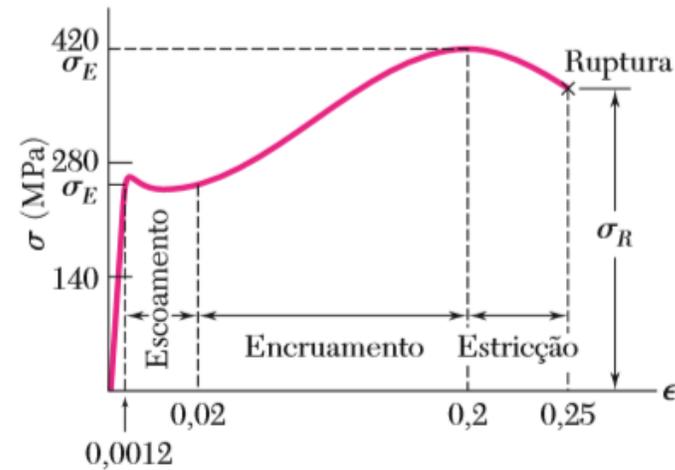
$$\sigma_{adm} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma_u}{S}$$

$$\bar{\sigma}_{tração} = \frac{(\sigma_u)_{tração}}{S_t}$$

$$\bar{\sigma}_{compressão} = \frac{(\sigma_u)_{compressão}}{S_c}$$

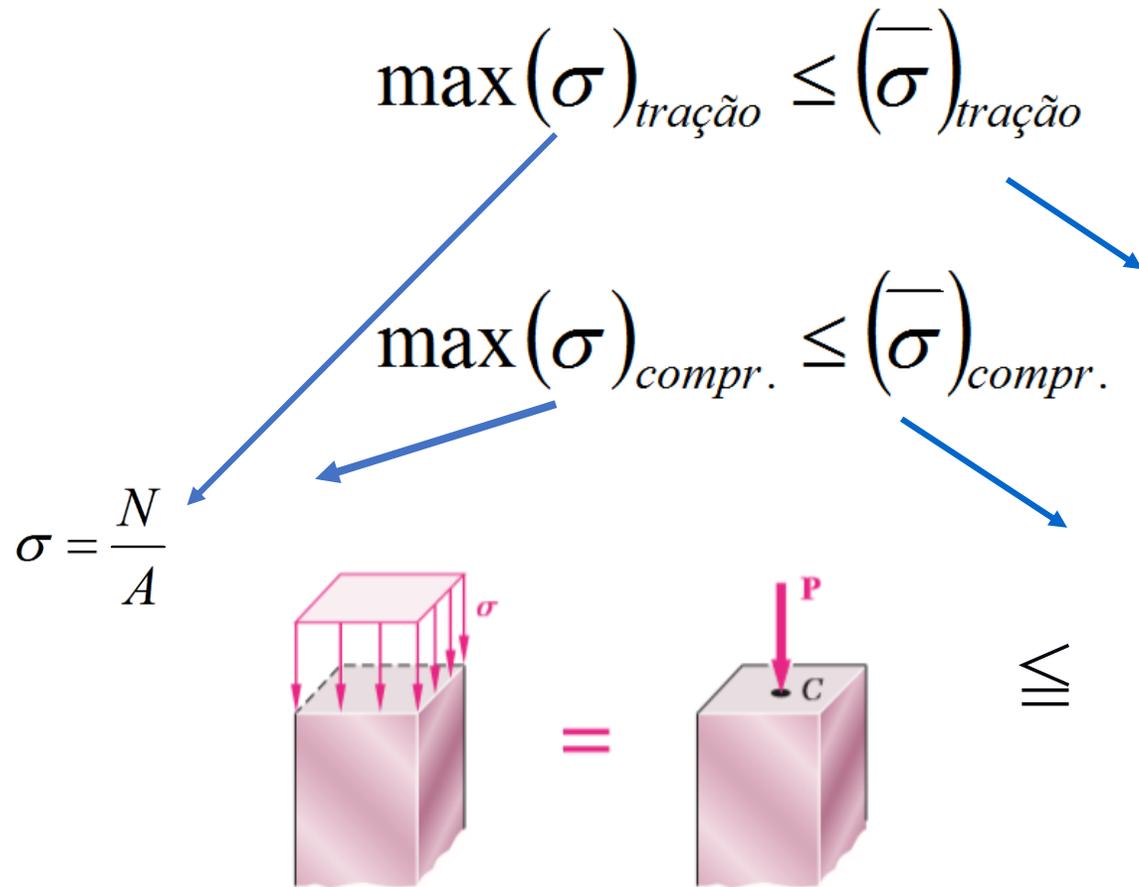
$s > 1,0$ (coeficiente de segurança, normalizado)

s: associado as incertezas de projeto (ações, dimensões)

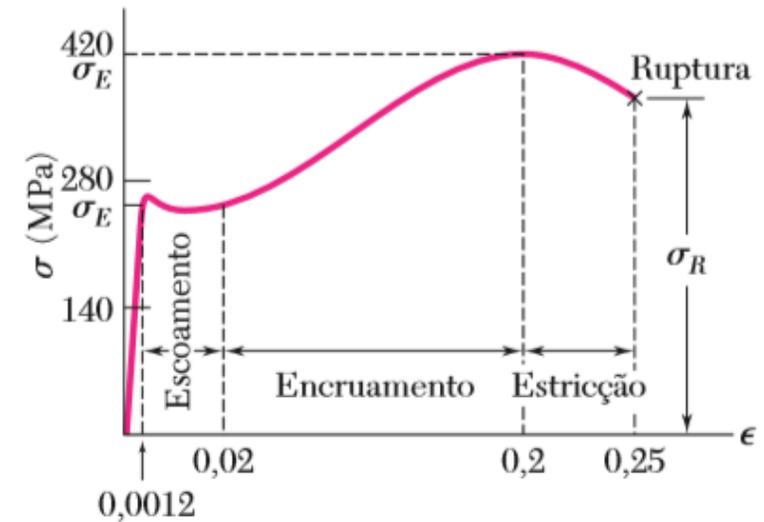


PROJETO CARGAS AXIAIS

Critério para dimensionar ou verificar a estrutura:

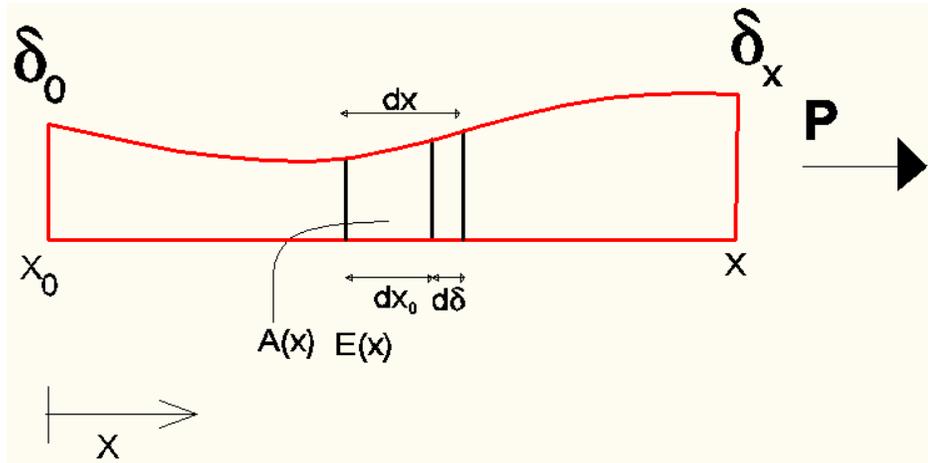


Tensão solicitante



Tensão resistente
(material)

DESLOCAMENTO AXIAL



$$d\delta(x) = dx - dx_0$$

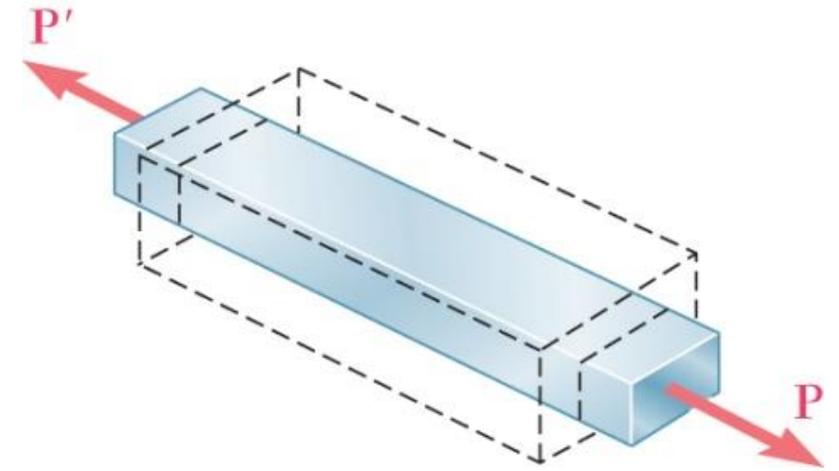
$$\varepsilon(x) = \frac{dx - dx_0}{dx_0} = \frac{d\delta}{dx_0}$$

Ou

$$d\delta(x) = \varepsilon(x) \cdot dx_0 \rightarrow \delta(x) = \int_{x_0}^x \varepsilon(x) \cdot dx + \delta_0$$

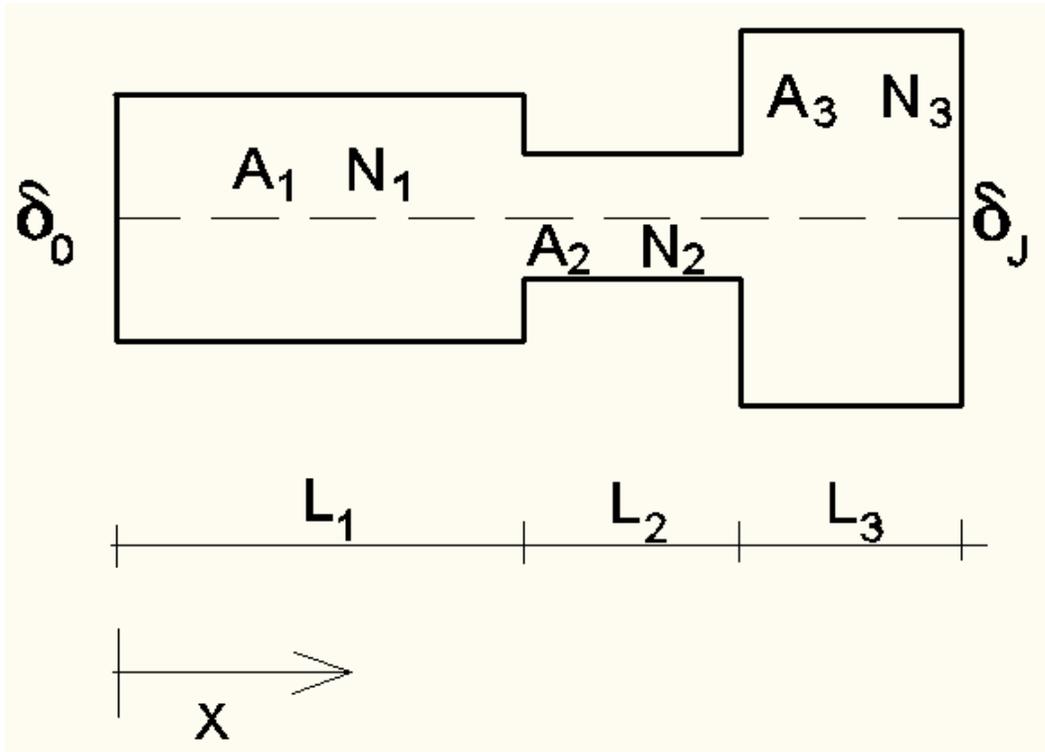
$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x)$$

$$\delta(x) = \int_{x_0}^x \frac{\sigma(x)}{E} \cdot dx = \int_{x_0}^x \frac{N(x)}{E \cdot A(x)} \cdot dx + \delta_0$$



DESLOCAMENTO AXIAL

Se trechos constantes, material único ($E = \text{único}$):

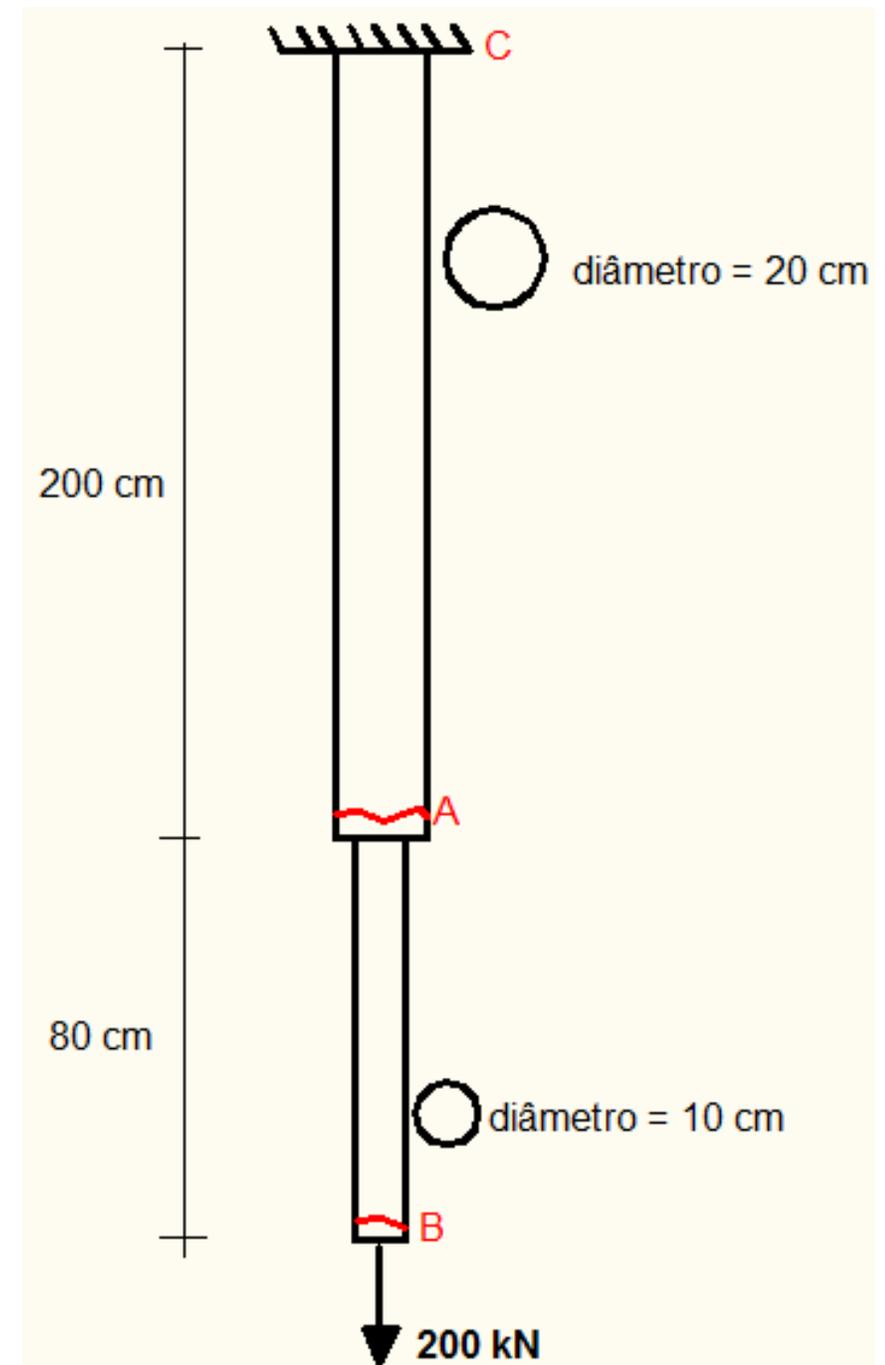
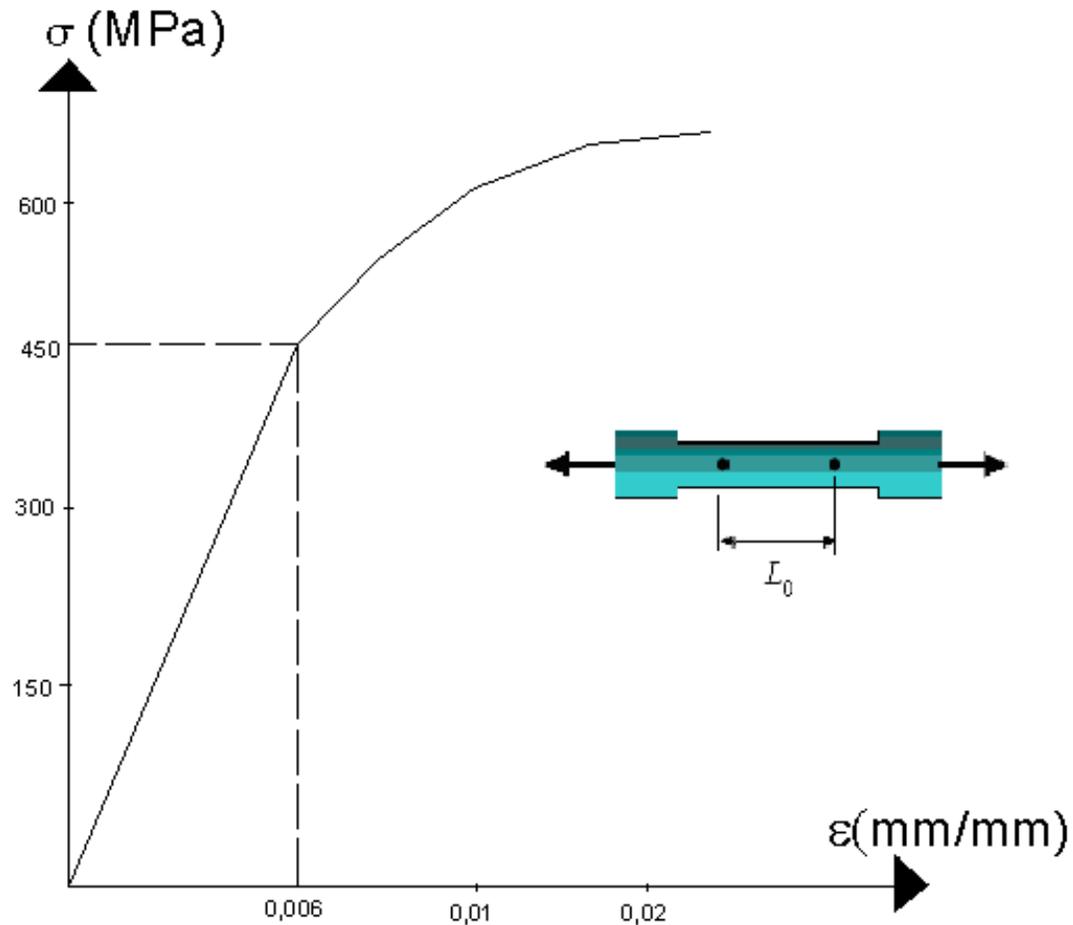


$$\delta_j = \delta_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E}$$

Exemplo 1)

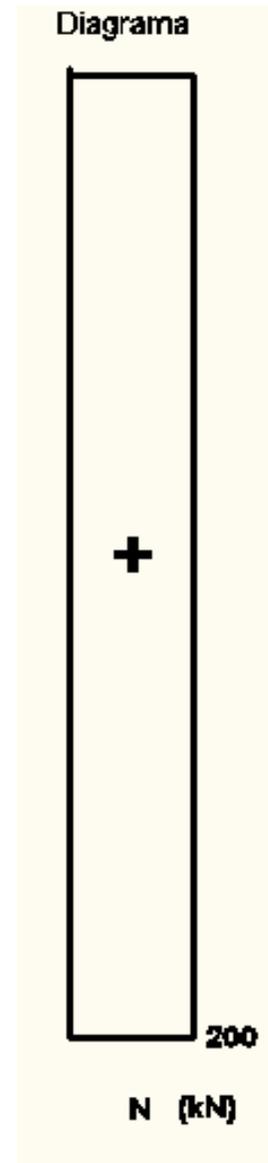
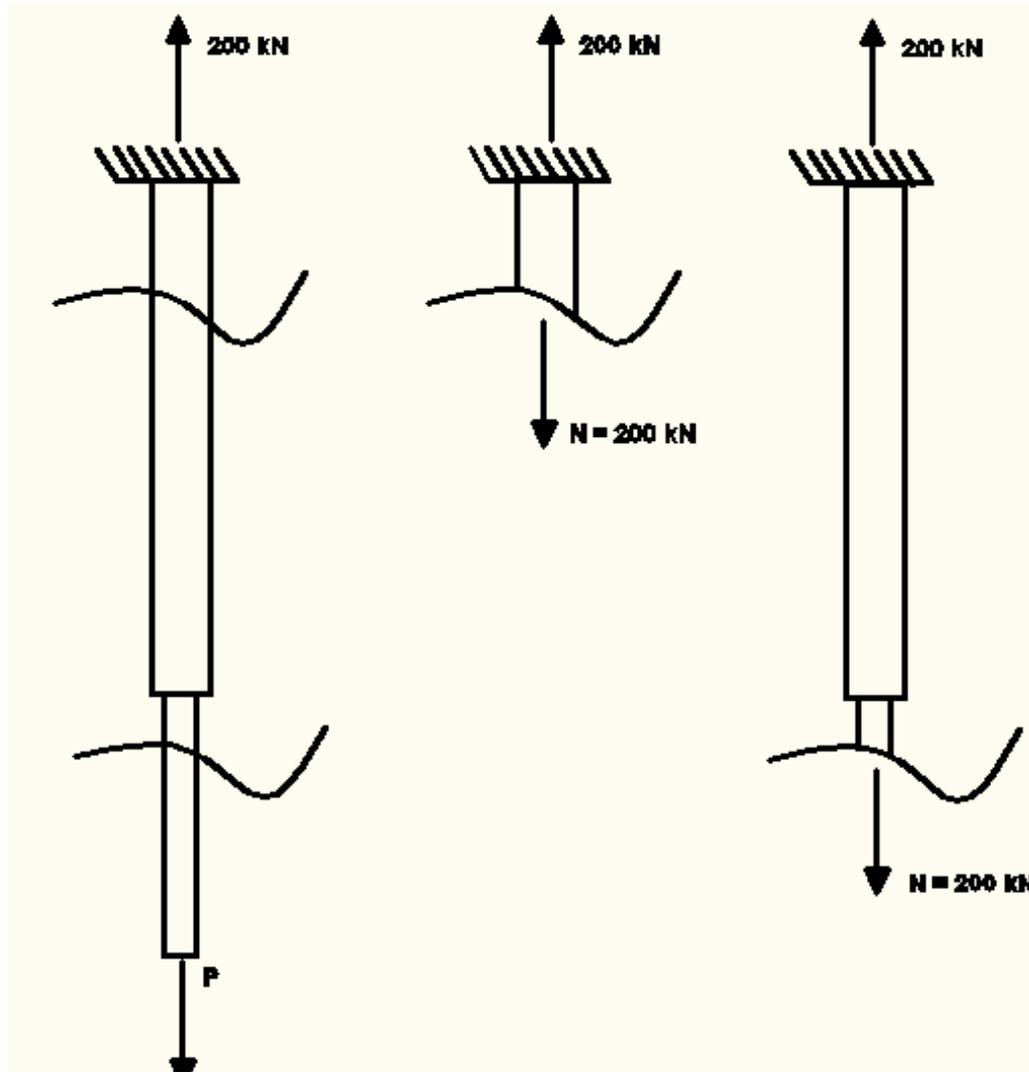
Calcule:

- diagrama de esforços
- tensão nas seções entre AB e entre AC
- alongamento sofrido na seção A



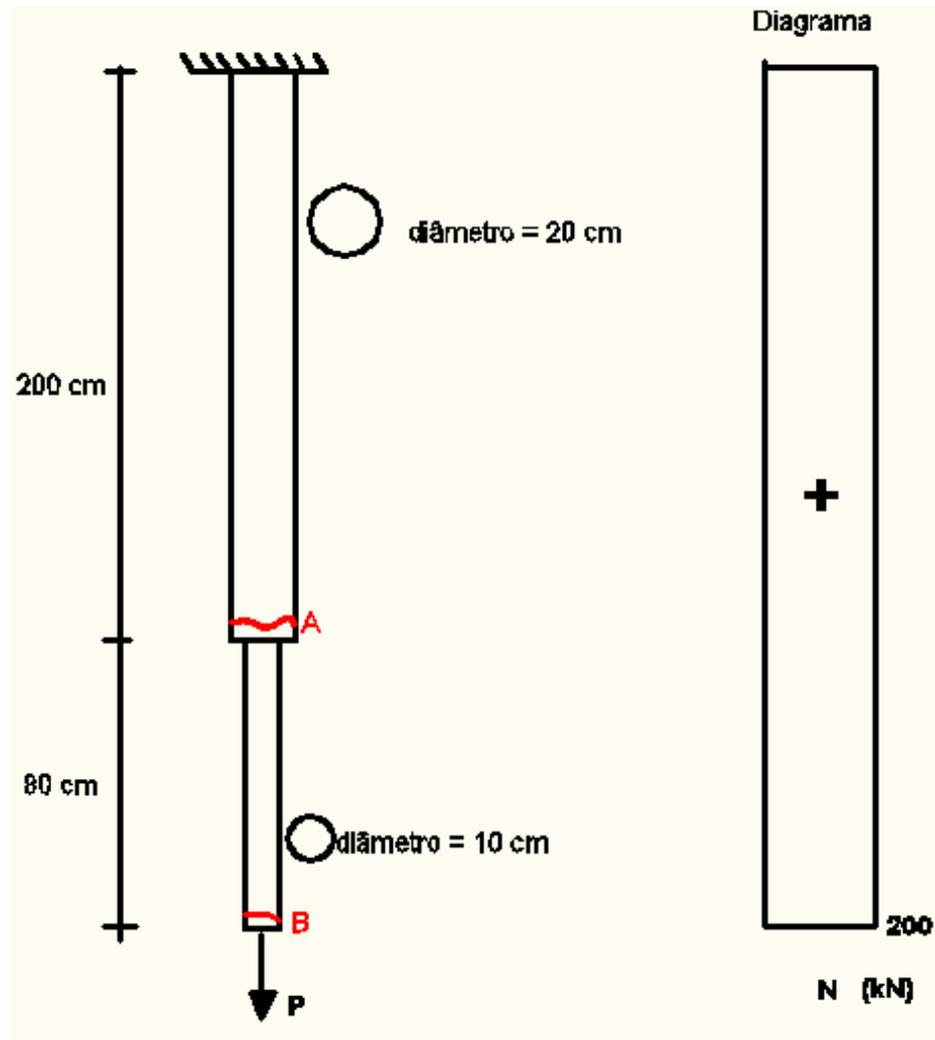
Exemplo 1)

a) diagrama de esforços



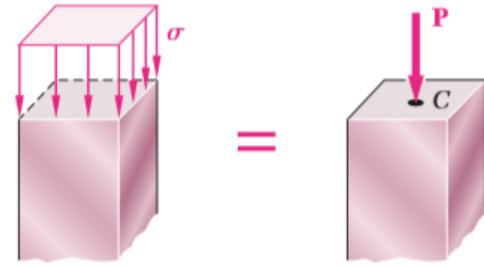
Exemplo 1)

a) diagrama de esforços



b) Tensões em A e B

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



trecho do engaste até seção A:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 0,0314 \text{ m}^2$$

$$\sigma_A = \frac{F}{A} = \frac{200}{0,0314} = 6,3662 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 6,36 \text{ MPa}$$

trecho após seção A até seção B

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,007854 \text{ m}^2$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A} = \frac{200}{0,0079} = 25,4650 \cdot 10^3 \text{ kPa} = 25,46 \text{ MPa}$$

c) Alongamento em A:

Tensões abaixo do limite linear, pode-se usar a Lei de Hooke

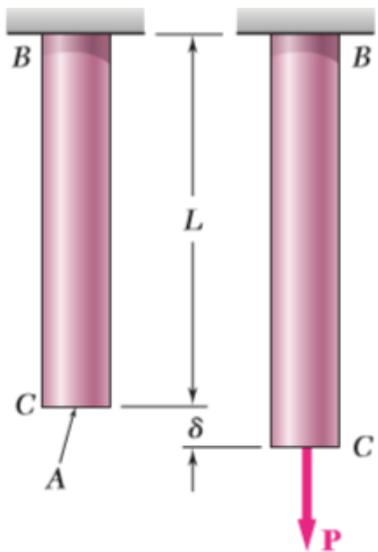
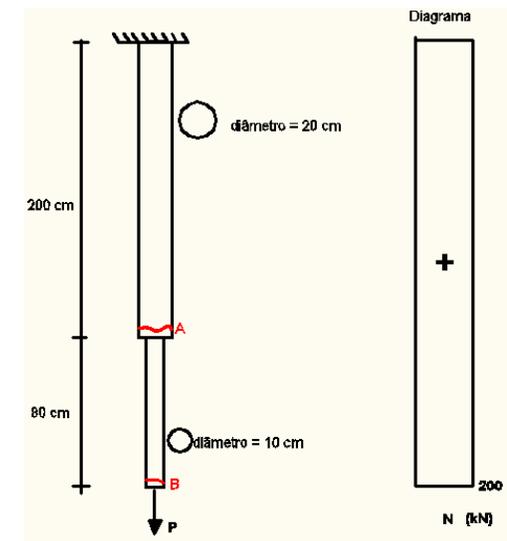
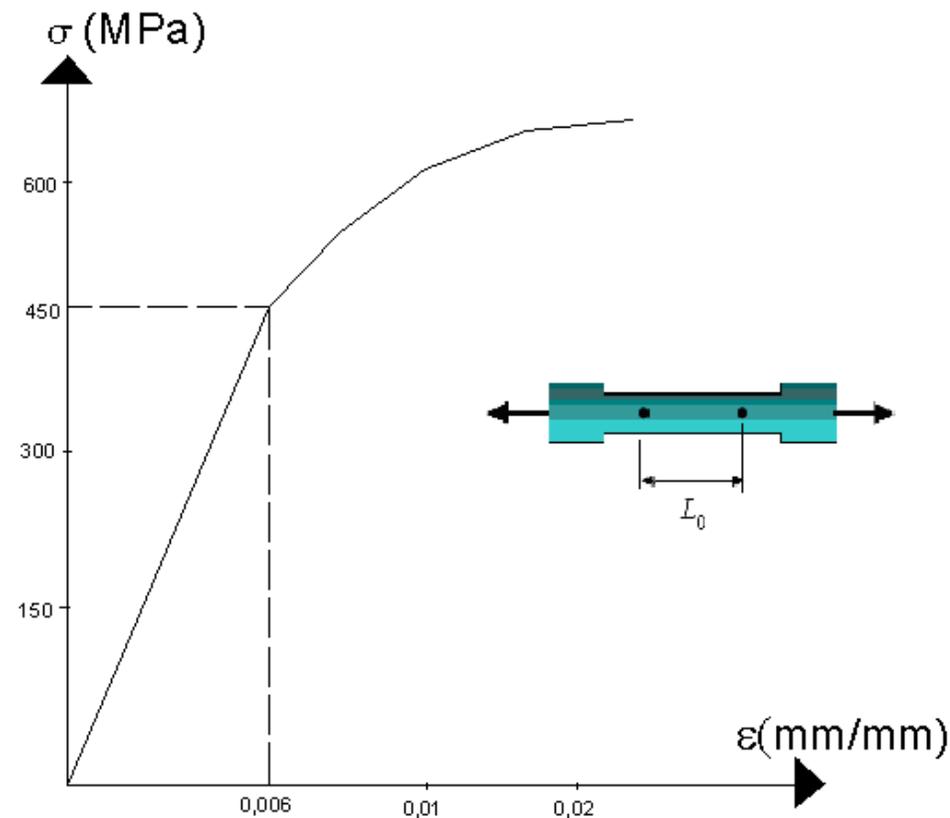
$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{450}{0,006} = 75000 \text{ MPa} = 75 \cdot 10^6 \text{ kPa}$$

$$\delta_j = \delta_0 + \sum_{i=1} \frac{N_i \cdot L_i}{A_i \cdot E}$$

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

δ : Variação de comprimento do trecho da barra



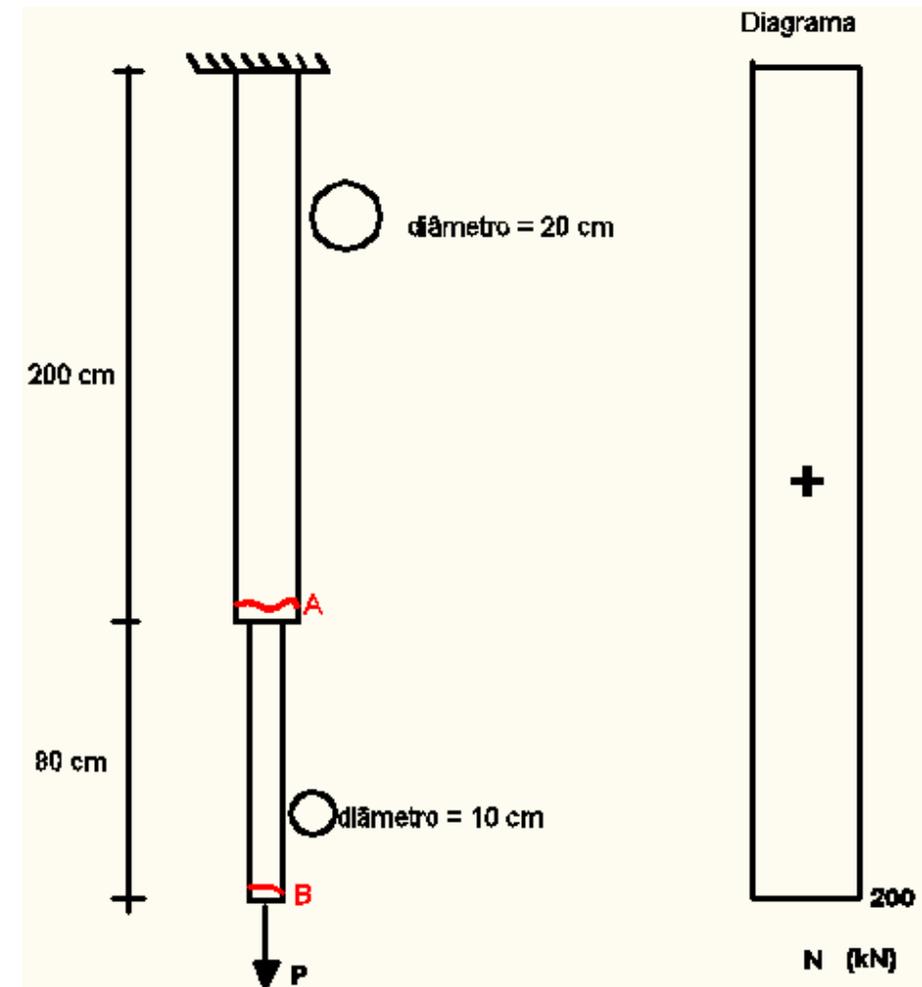
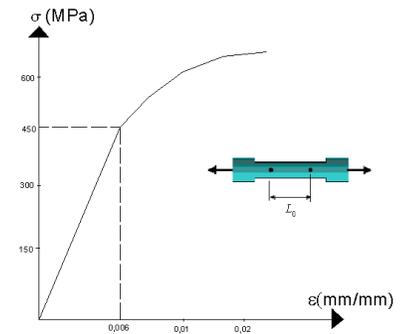
c) Alongamento em A:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{450}{0,006} = 75000 \text{ MPa} = 75 \cdot 10^6 \text{ kPa}$$

$$\delta_A = \delta_C + \frac{N_{CA} \cdot L_{CA}}{A_{CA} \cdot E}$$

Portanto:

$$\delta_A = 0 + \frac{200 \cdot 2}{0,0314 \cdot 75 \cdot 10^6} = 0,17 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,17 \text{ mm}$$

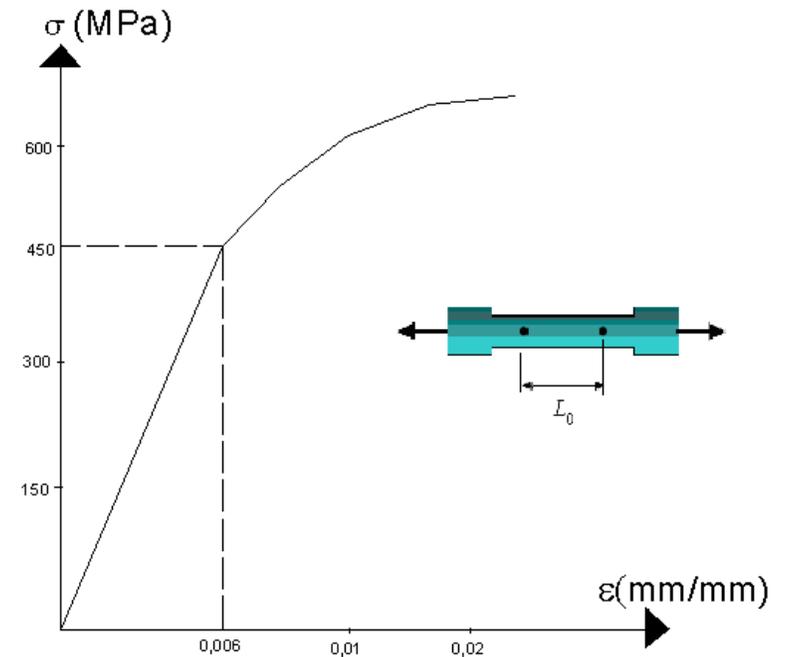


Exemplo 2)

Qual a maior força P que pode ser aplicada para que nenhum trecho fique fora do trecho linear (elástico linear)?

Cálculo de tensão entre C e A:

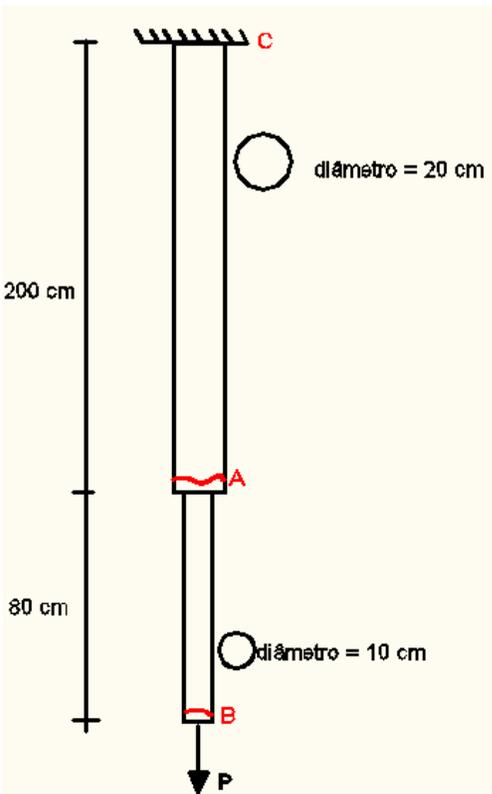
$$\sigma_{CA} = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,0314} \leq 450 \text{ MPa} \rightarrow P \leq 450 \cdot 0,0314 \rightarrow P \leq 14.130 \text{ kN}$$



Cálculo de tensão entre A e B:

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{P}{0,007854} \leq 450 \text{ MPa} \rightarrow P \leq 450 \cdot 0,007854 \rightarrow P \leq 3.534,3 \text{ kN}$$

$$P_{\max} = 3.534,3 \text{ kN}$$



Exemplo 3)

1.7.24. Um muro de contenção rígido de terra (AC) está apoiado em C e fixo ao tirante flexível BD em B e D. Esse tirante possui comprimento de 4 metros e módulo de elasticidade longitudinal igual a 200 GPa. O solo exerce uma carga no muro triangular e seu valor máximo é dado pela relação $q_e = \gamma_{\text{solo}} L_2 \cdot b \cdot k_0$, sendo γ_{solo} é o peso específico do solo, L_2 a altura do muro, b sua largura e k_0 o coeficiente de empuxo ativo. Determinar o mínimo valor do diâmetro do tirante, em mm, de modo que a inclinação máxima do muro seja de 1° (um grau). Para o problema, considere: $\gamma_{\text{solo}} = 22 \text{ kN/m}^3$, $L_2 = 10 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $k_0 = 0,5$ e $L_1 = 1 \text{ m}$.

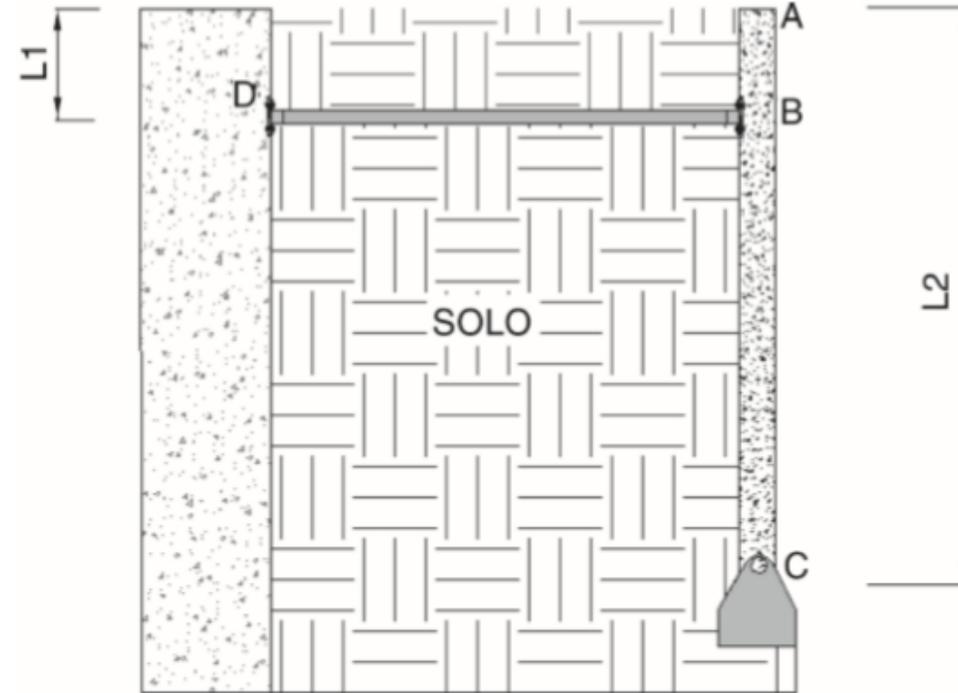
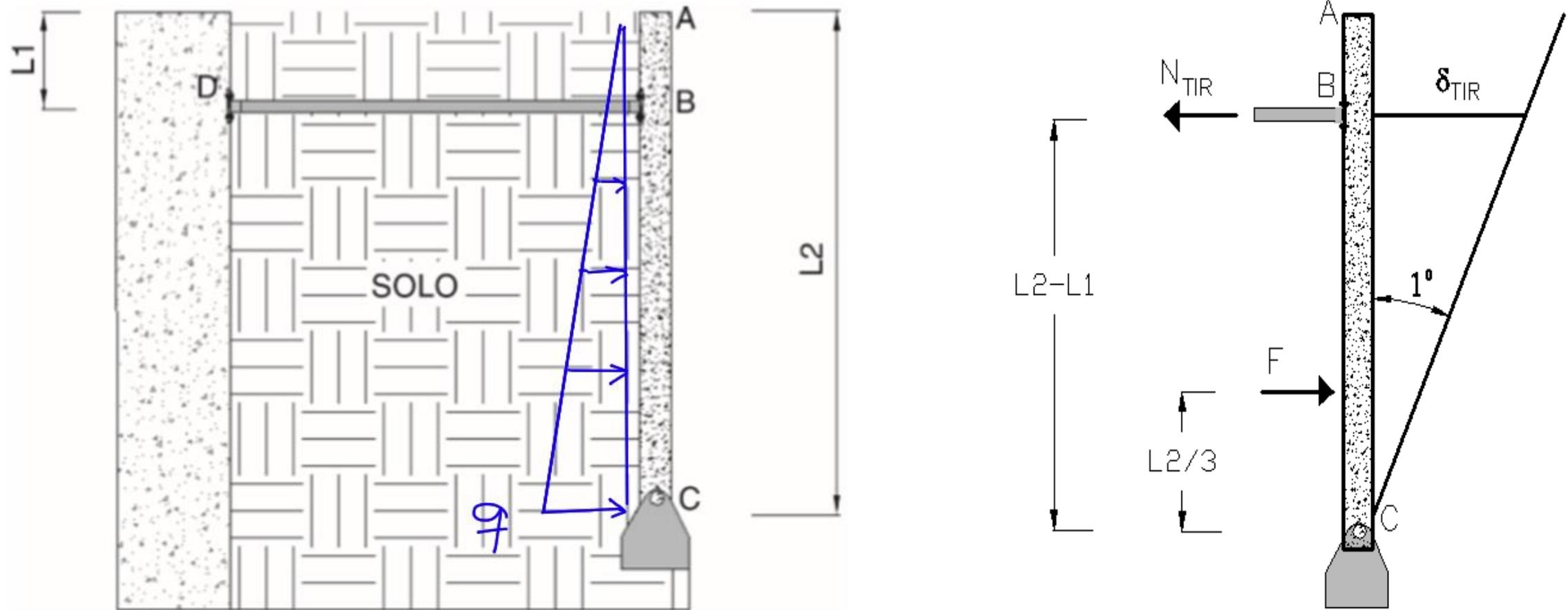


FIGURA 1.63A Muro de contenção rígido atirantado.

Exemplo 3)



$$q_e = \gamma_{solo} \cdot L2 \cdot b \cdot k_0$$

$$q = 22 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = 110 \text{ kN/m} \rightarrow F = q \cdot 10 / 2 = 550 \text{ kN};$$

$$\sum M_C = 0 : \rightarrow F \cdot 10 / 3 = N_{TIR} \cdot 9 \rightarrow N_{TIR} = 203,70 \text{ kN}$$

Exemplo 3)

$$N_{\text{TIR}} = 203,70 \text{ kN}$$

Variação de comprimento da barra:

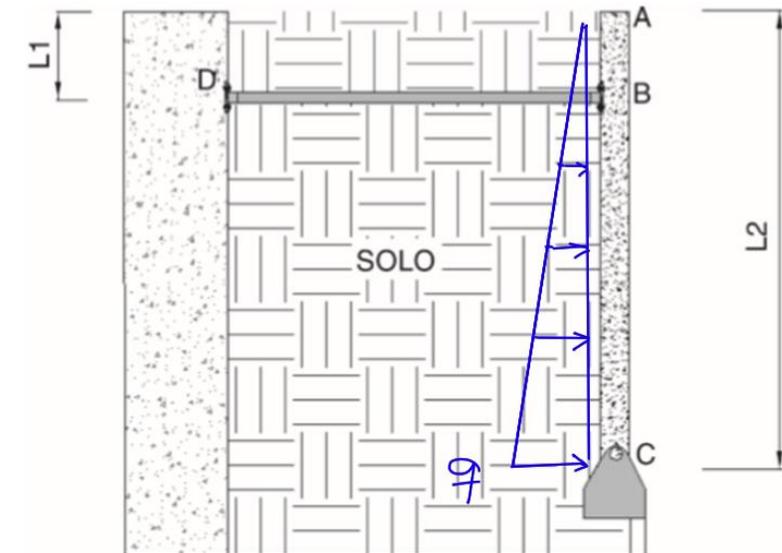
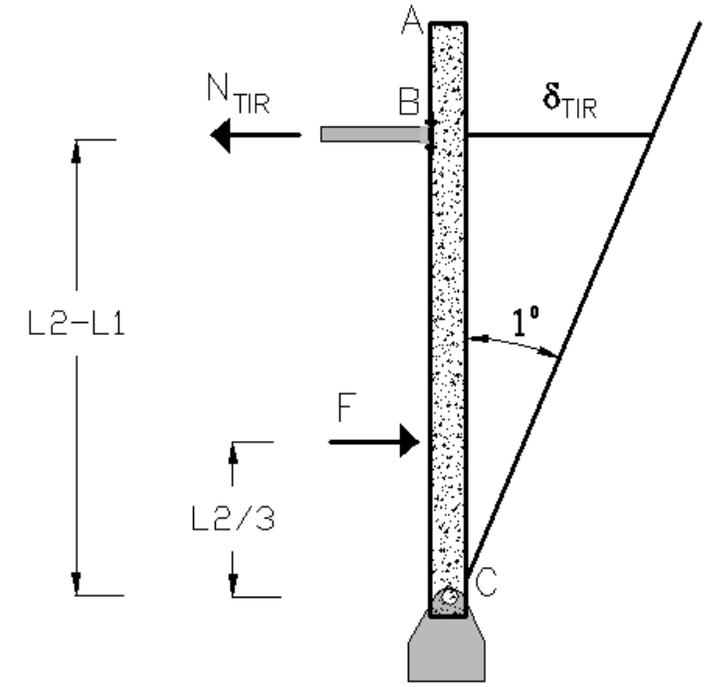
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

Tirante está fixo em D:

$$\delta_{\text{TIR}} = \left[\frac{203,07 \cdot 4,0}{200 \cdot 10^6 \cdot A} \right] = \frac{4,0741 \cdot 10^{-6}}{A} \text{ m}$$

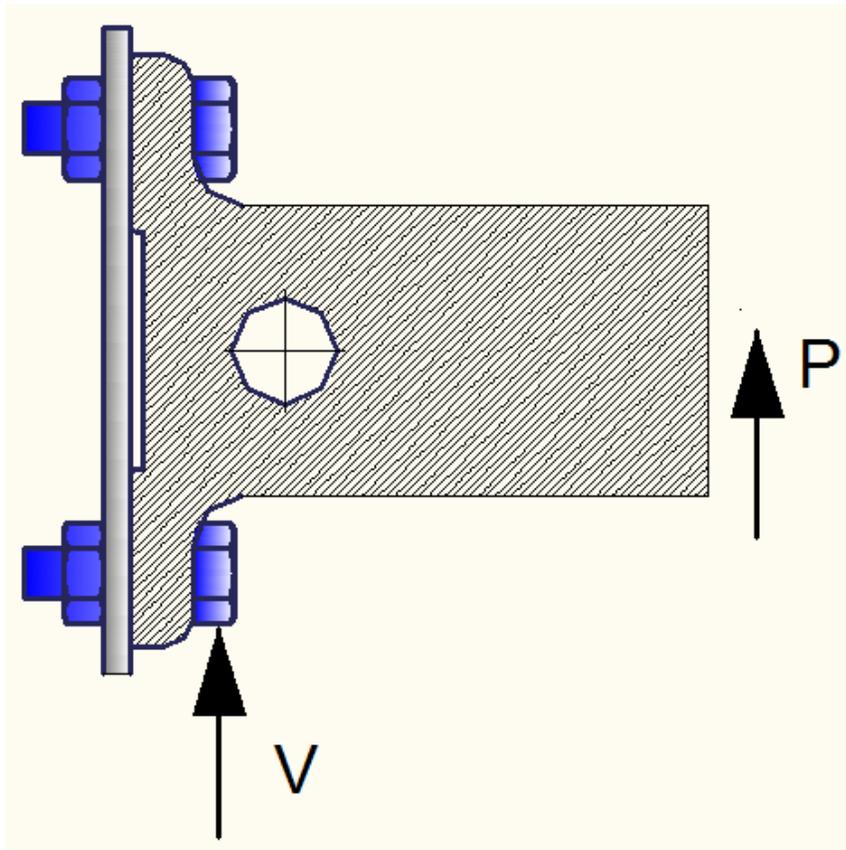
$$\frac{\delta_{\text{TIR}}}{L2 - L1} \leq 1^\circ = \frac{\pi}{180} \rightarrow \frac{4,0741 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot A} \leq \frac{\pi}{180}$$

$$\rightarrow A \geq 25,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \rightarrow d_{\text{min}} = 5,75 \text{ mm}$$



CISALHAMENTO PURO

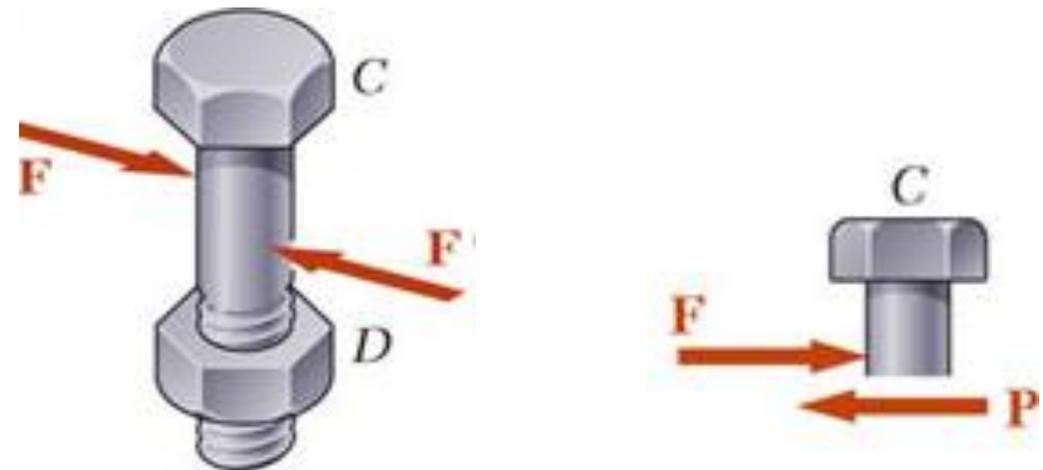
Suponha ação que gere apenas força cortante.



Ex. Ligações parafusadas

Força cortante V age no parafuso

Supondo tensões normais desprezíveis



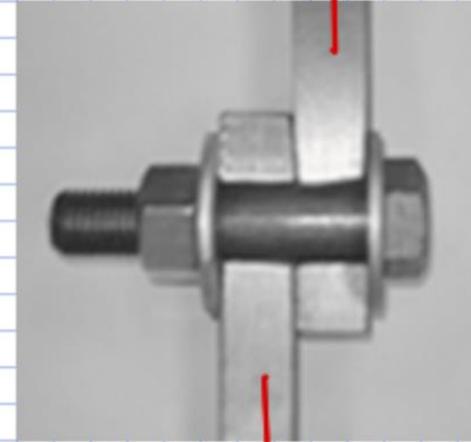
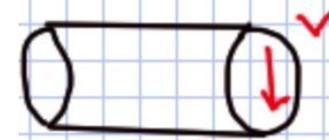
CISALHAMENTO PURO

Admitindo:

- V suficiente grande
- apoios rígidos *aprox.*

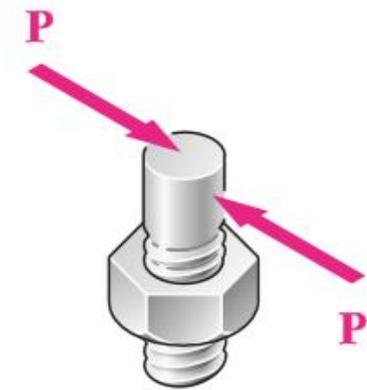
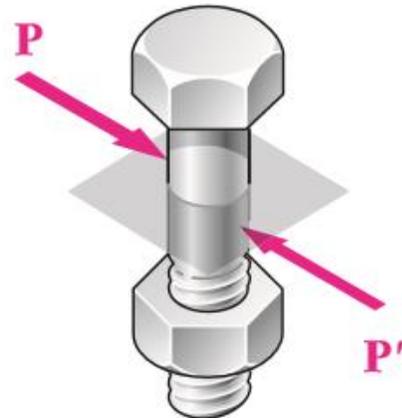


$$\tau_{\text{médio}} = \frac{V}{A}$$

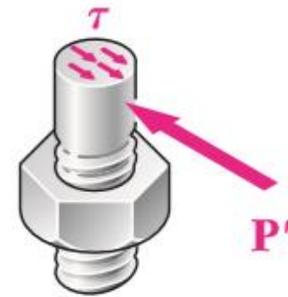


Normas permitem sua aplicação em:

- conexões
- ligações parafusadas e rebitadas



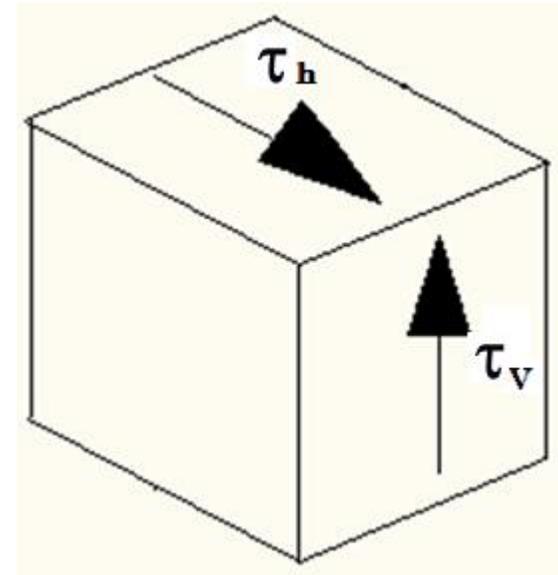
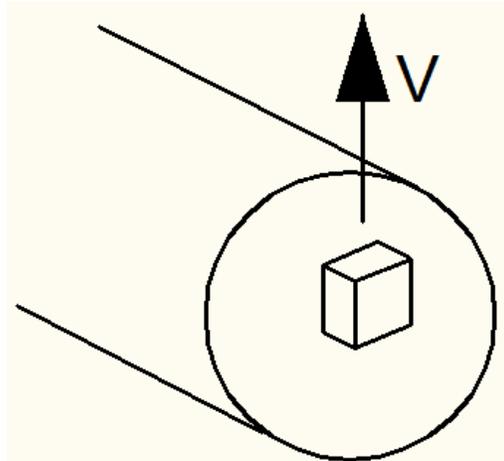
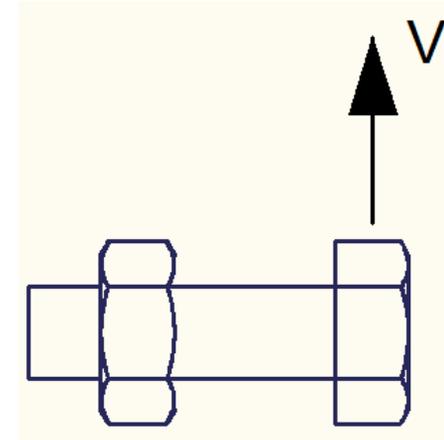
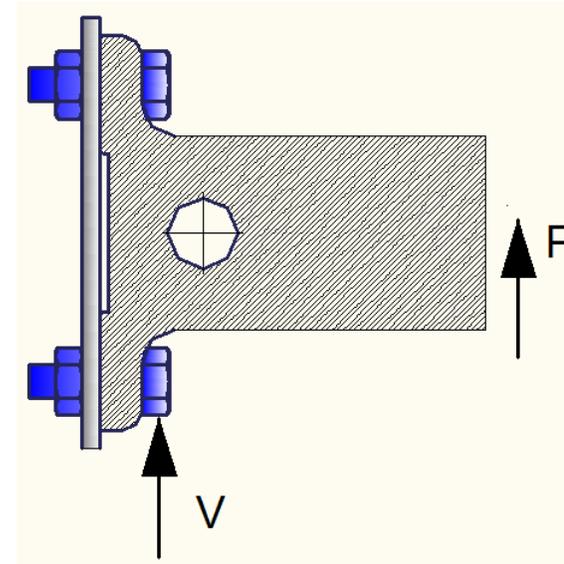
=



CISALHAMENTO PURO

No parafuso tem a força cortante V

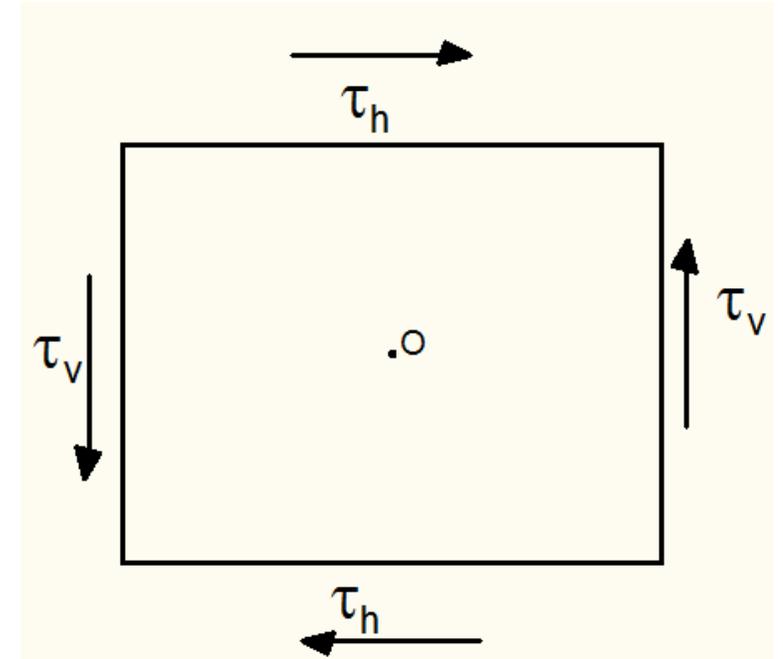
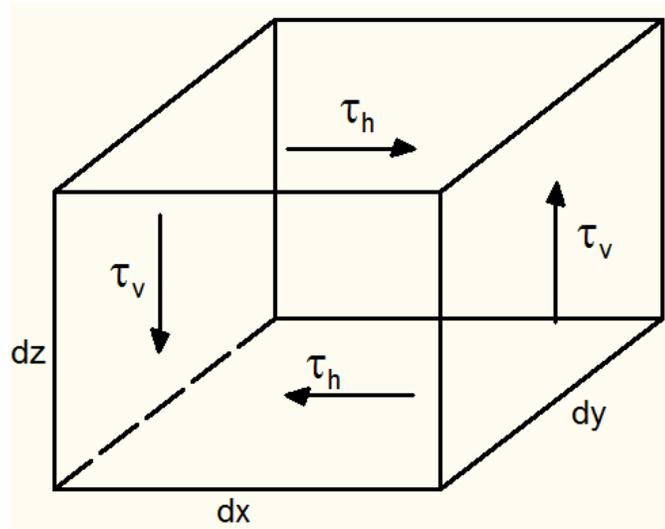
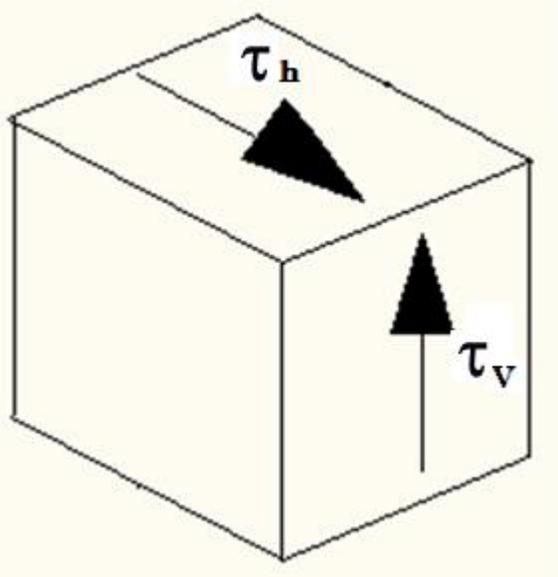
Tome um elemento infinitesimal no parafuso



$$\tau_{\text{m\u00e9dio}} = \frac{V}{A}$$

TENSÃO CISALHANTE - τ

Simetria das tensões cisalhantes, por equilíbrio:



$$\sum M_O = 0$$

$$\tau_h \cdot (dz \cdot dx) \cdot dy = \tau_v \cdot (dz \cdot dy) \cdot dx \rightarrow \tau_h = \tau_v$$

DEFORMAÇÃO ANGULAR - γ

As tensões cisalhantes distorcem o elemento

Define-se a distorção angular (deformação angular)

Deformação angular: Redução do ângulo (orig. reto) do elemento

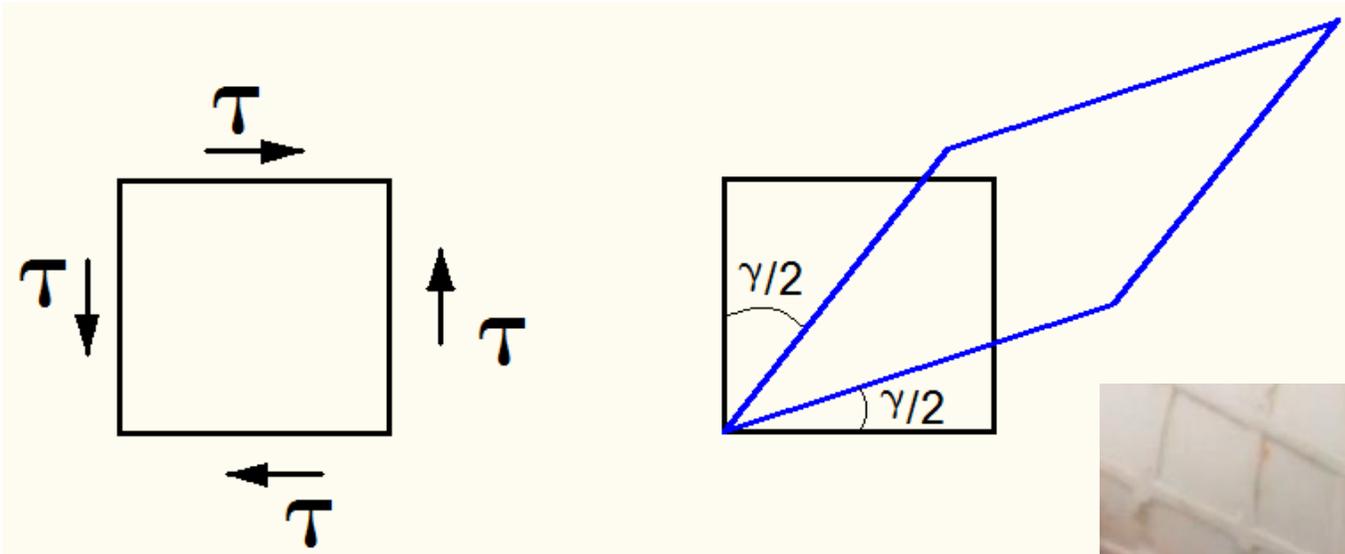
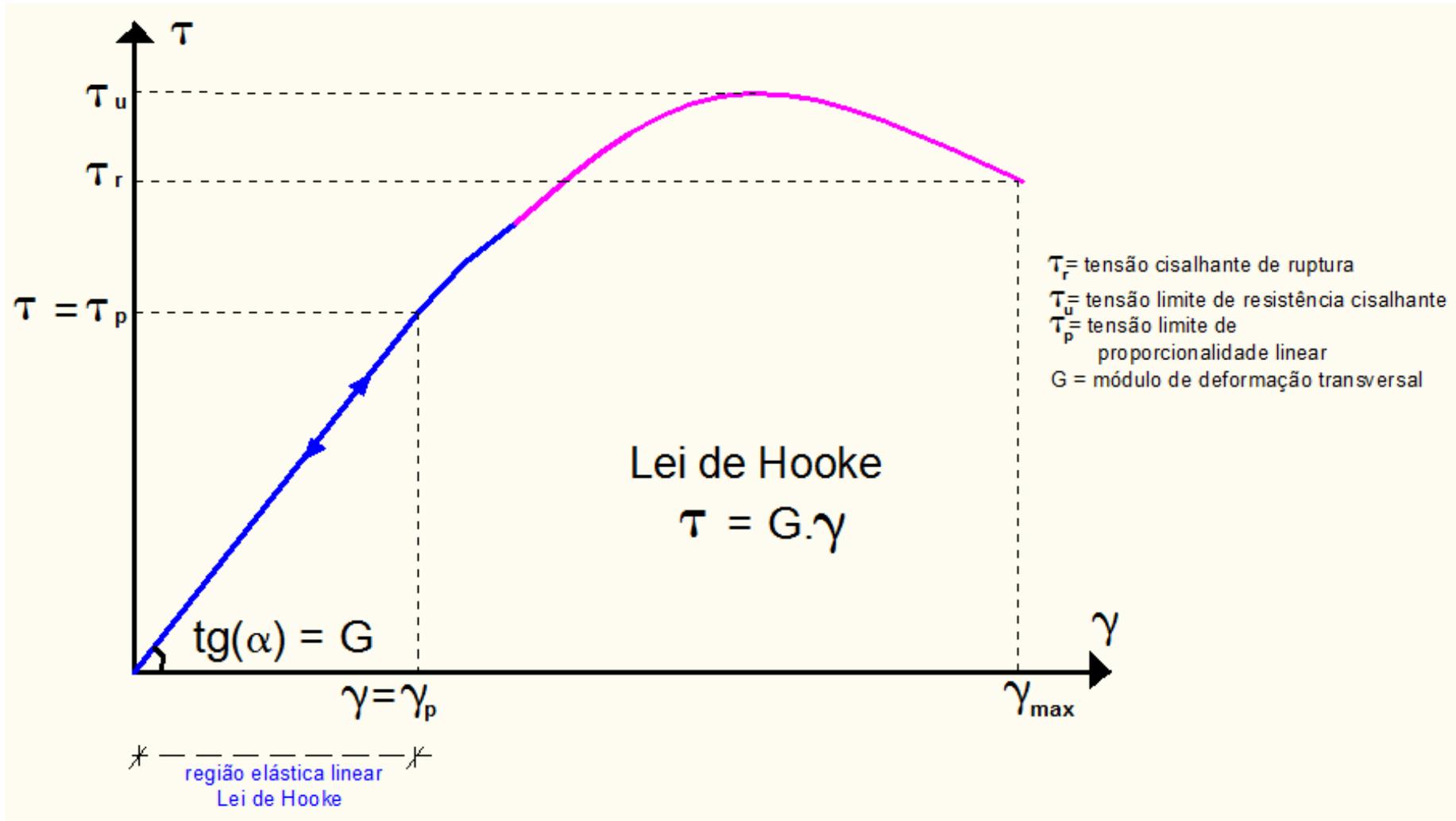


Diagrama Tensão - Deformação Angular (τ - γ)

Ensaio de corpo de prova



Exemplos de materiais

Trecho Elástico-Linear

Aço Estrutural: $G = 75 \text{ GPa}$

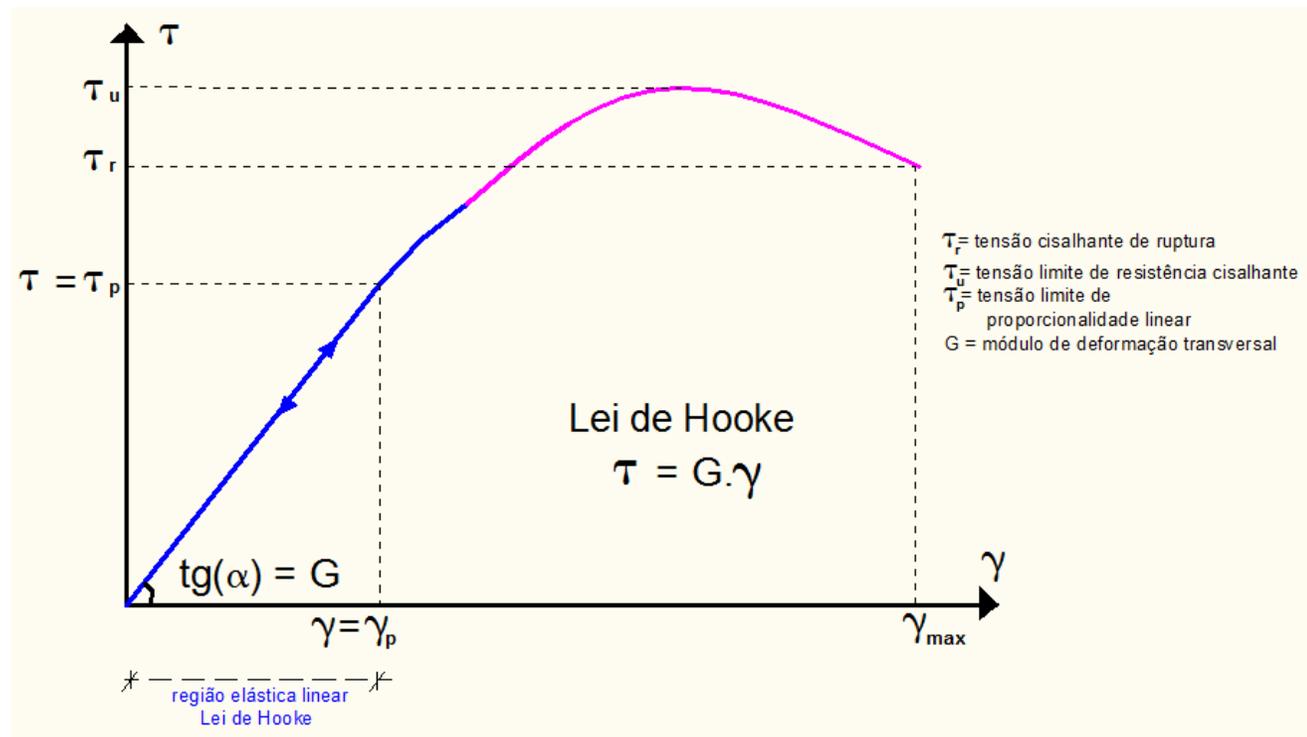
$\tau_e = 150 \text{ MPa}$

Alumínio: $G = 75 \text{ GPa}$

$\tau_e = 26 \text{ MPa}$

G : módulo de elasticidade transversal

$$\tau = G \cdot \gamma$$



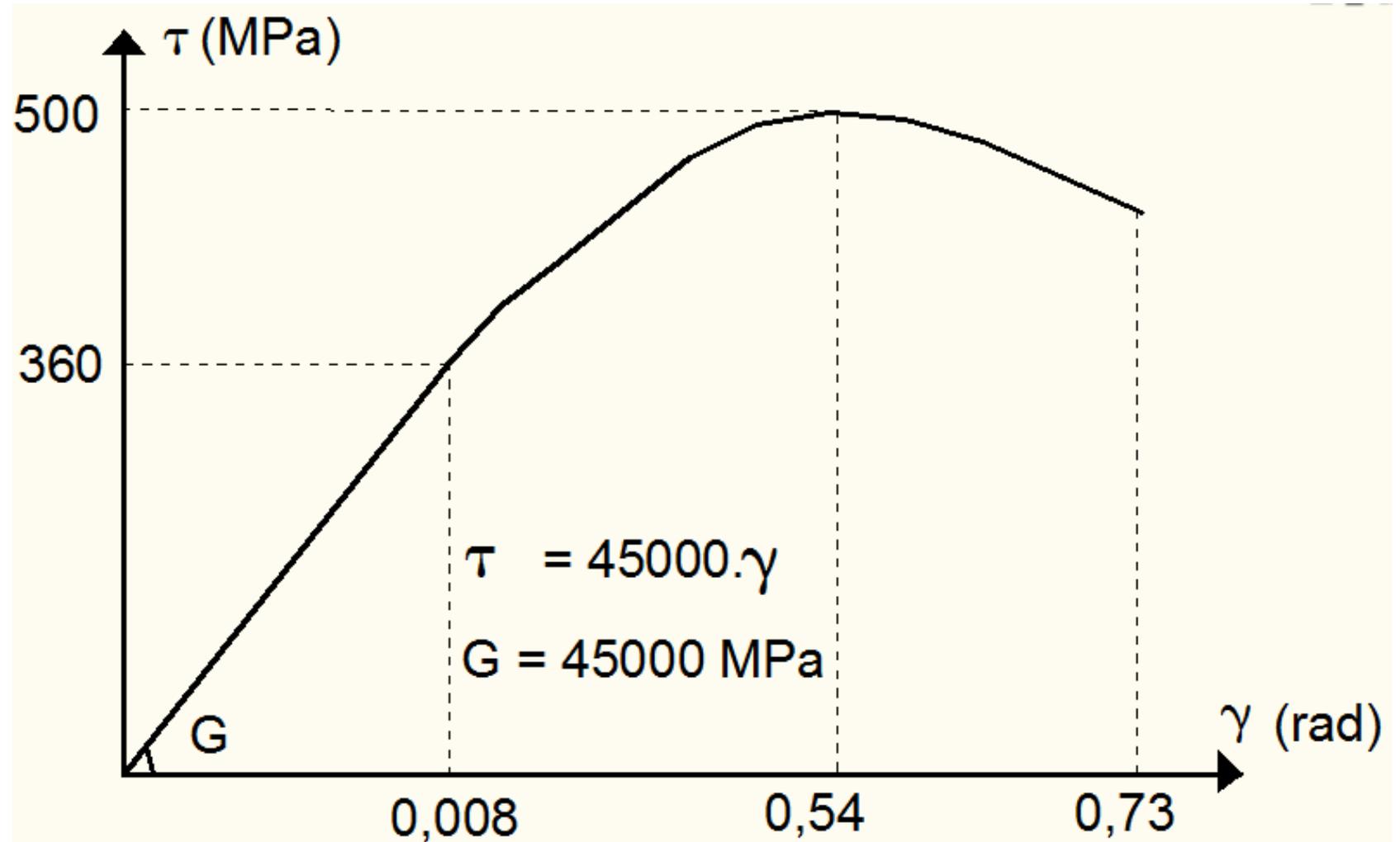
(Unidades SI)
Continuação

Material	Densidade kg/m ³	Limite de resistência			Tensão de escoamento ²		Módulo de elasticidade, GPa	Módulo de elasticidade transversal, GPa	Coeficiente de expansão térmica, 10 ⁻⁶ /°F	Ductilidade, porcentagem de alongamento em 50 mm
		Tração, MPa	Compressão ² , MPa	Cisalhamento, MPa	Tração, MPa	Cisalhamento, MPa				
Ligas de magnésio										
Liga AZ80 (forjado)	1800	345		160	250		45	16	25,2	6
Liga AZ31(extrudado)	1770	255		130	200		45	16	25,2	12
Titânio										
Liga (6% Al, 4% V)	4730	900			830		115		9,5	10
Liga Monel 400 (Ni-Cu)										
Trabalhado a frio	8830	675			585	345	180		13,9	22
Recozido	8830	550			220	125	180		13,9	46
Cobre-níquel (90% Cu, 10% Ni)										
Recozido	8940	365			110		140	52	17,1	35
Trabalhado a frio	8940	585			545		140	52	17,1	3
Madeira, seca ao ar³										
Douglas fir	470	100	50	7,6			13	0,7	Varia 3,0 a 4,5	
Spruce, sitka	415	60	39	7,6			10	0,5		
Shortleaf pine	500		50	9,7			12			
Western white pine	390		34	7,0			10			
Ponderosa pine	415	55	36	7,6			9			
White oak	690		51	13,8			12			
Red oak	660		47	12,4			12			

Diagrama Tensão - Deformação Angular ($\tau - \gamma$)

Exemplo:

Liga de Titânio



TENSÕES ADMISSÍVEIS - τ_{adm}

Tensão de segurança ou admissível:
é comum projetar no regime elástico - linear

$$\tau_{adm} = \bar{\tau} = \frac{\tau_u}{s} \quad s > 1,0 \text{ (coeficiente de segurança, normalizado)}$$

s: associado as incertezas de projeto (ações, dimensões)

Critério para dimensionar ou verificar a ligação:

$$\max(\tau) \leq \bar{\tau}$$

Relação generalizada tensão-deformação

Material elástico

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \dots \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & \vdots & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & \vdots & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \dots \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

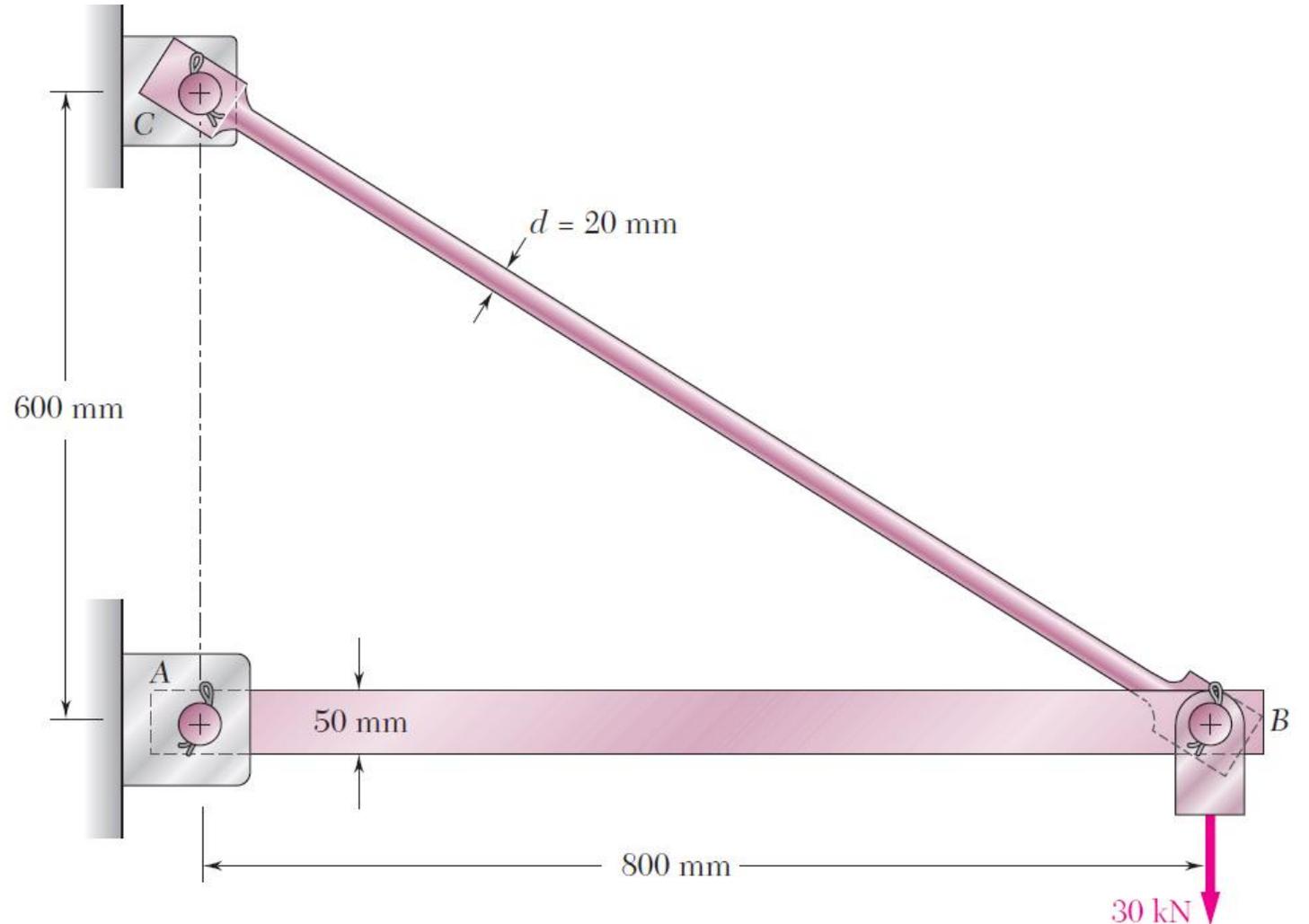
$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad \text{com} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

O módulo de cisalhamento G está relacionado a E e ν por: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Exemplo 4)

Determinar:

- a) Reações e esforços da treliça;
- b) Tensões cisalhantes nas conexões A e C;
- c) Tensões normais nas barras AB e BC.



Exemplo 4)

a) Calcular reações e esforços:

$$+\curvearrowright \sum M_C = 0:$$

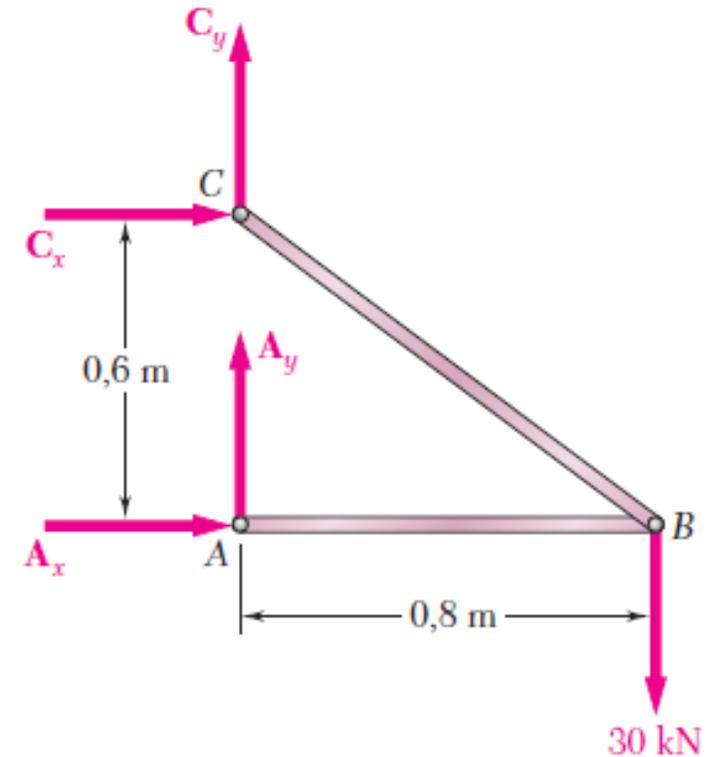
$$A_x(0,6 \text{ m}) - (30 \text{ kN})(0,8 \text{ m}) = 0$$

$$A_x = +40 \text{ kN}$$

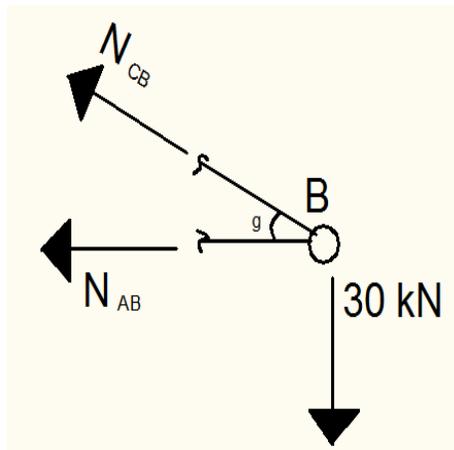
$$\rightarrow \sum F_x = 0:$$

$$A_x + C_x = 0$$

$$C_x = -A_x \quad C_x = -40 \text{ kN}$$



Equilíbrio nó B



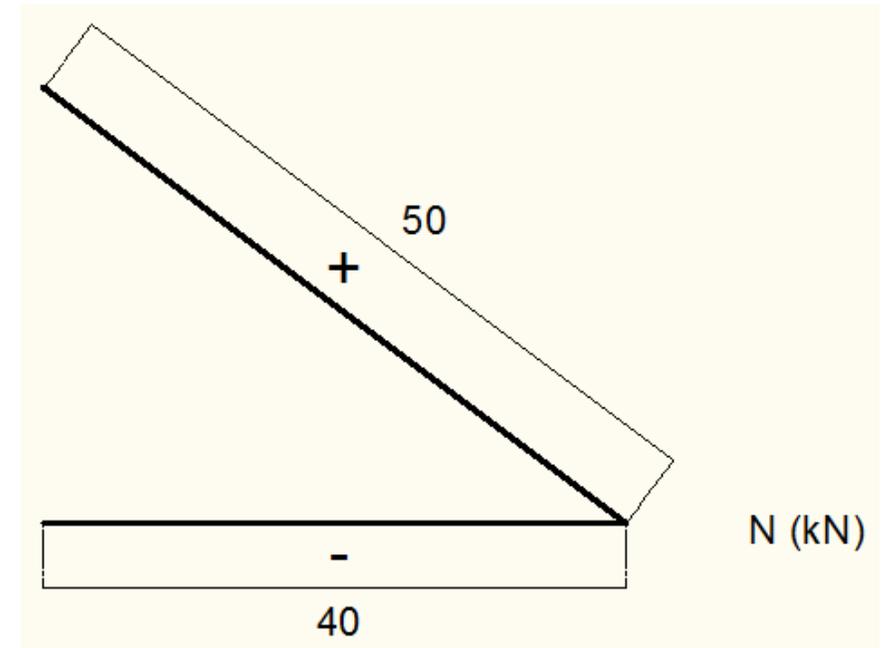
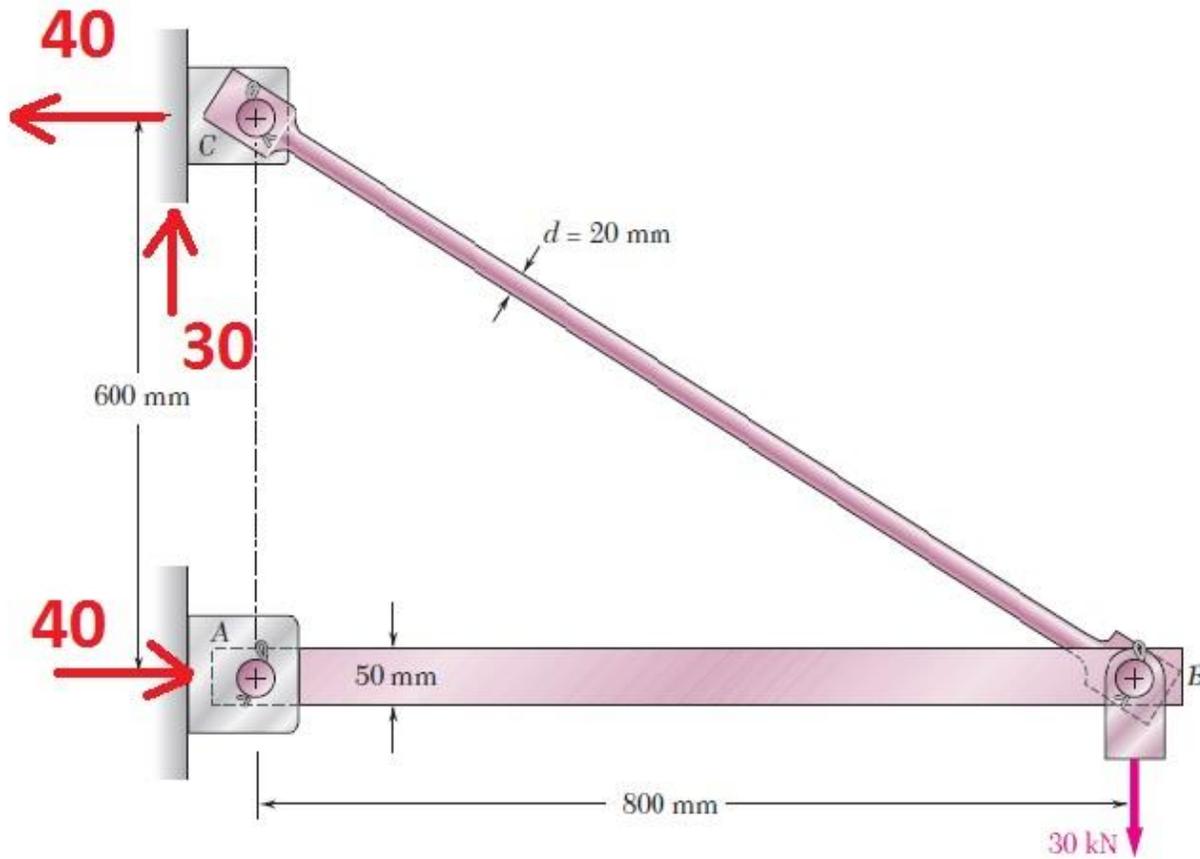
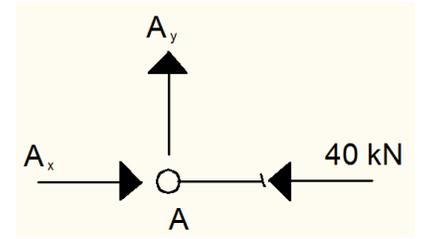
$$\sum F_y = 0: N_{CB} \cdot \text{sen}(g) - 30 = 0 \rightarrow N_{CB} = 30 / 0,6 = 50 \text{ kN (tração)}$$

$$\sum F_x = 0: N_{AB} + N_{CB} \cdot \text{cos}(g) = 0 \rightarrow N_{AB} = -40 \text{ kN (compressão)}$$

Exemplo 4)

$$\sum F_y = 0 : A_y = 0 \rightarrow C_y = 30 \text{ kN}$$

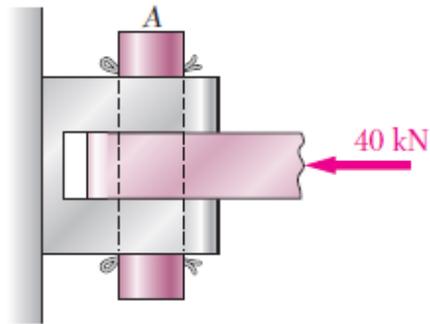
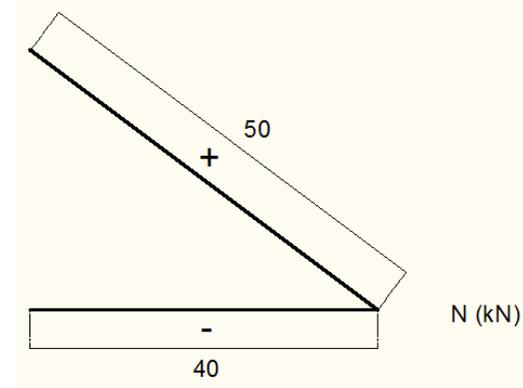
Equilíbrio nó A



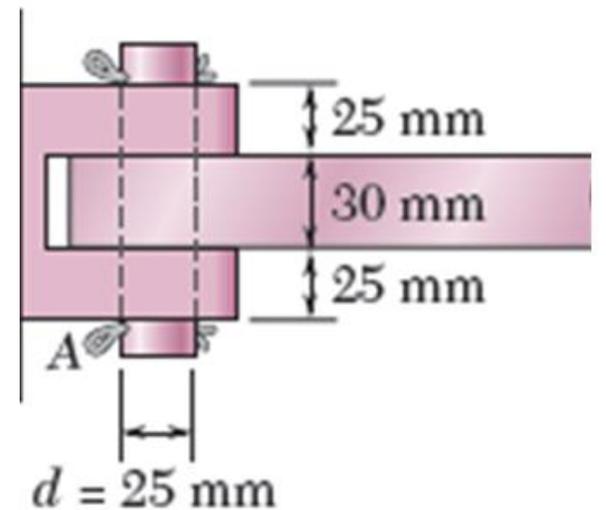
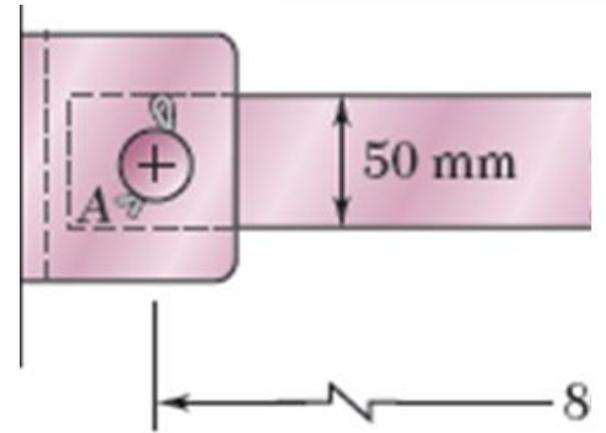
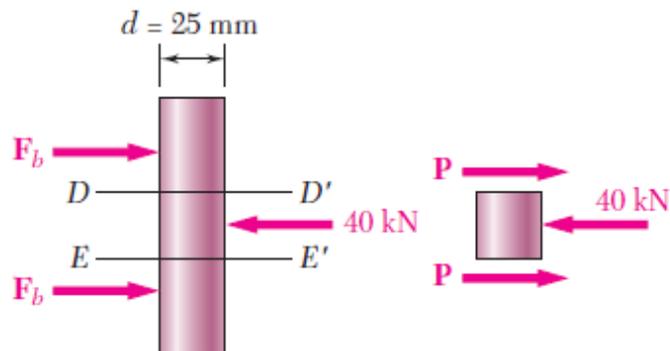
Exemplo 4) b1) Tensão cisalhante na conexão em A

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{20 \text{ kN}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 40,7 \text{ MPa}$$



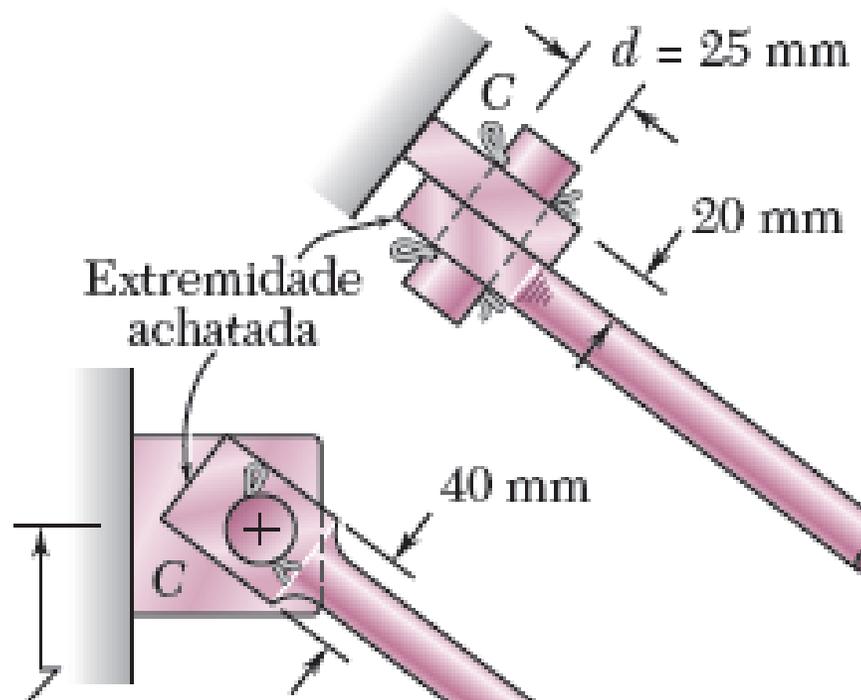
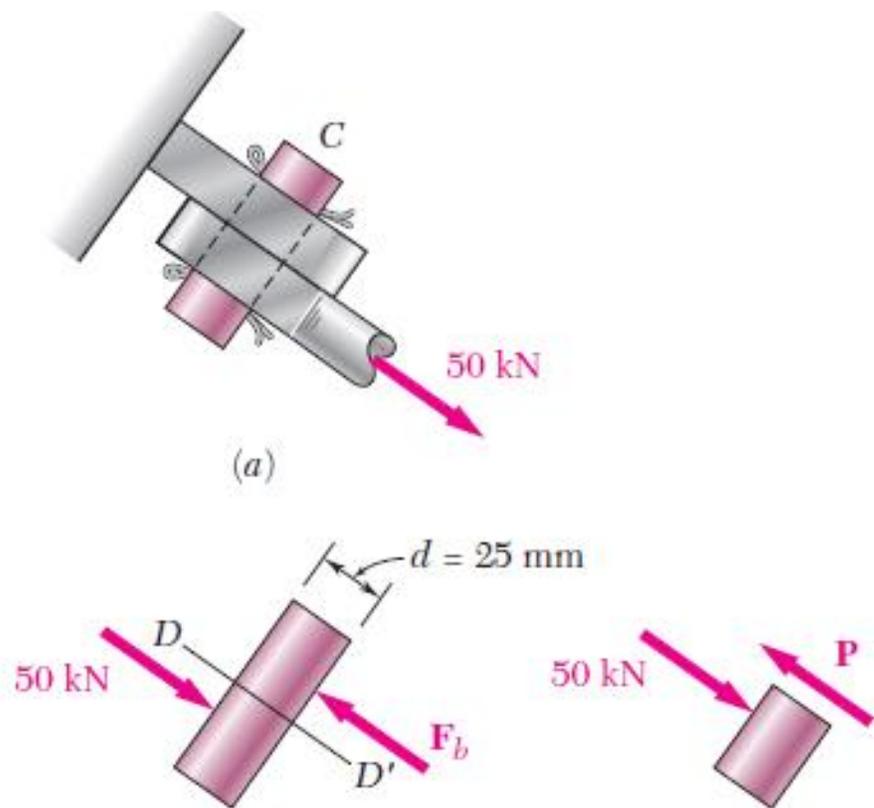
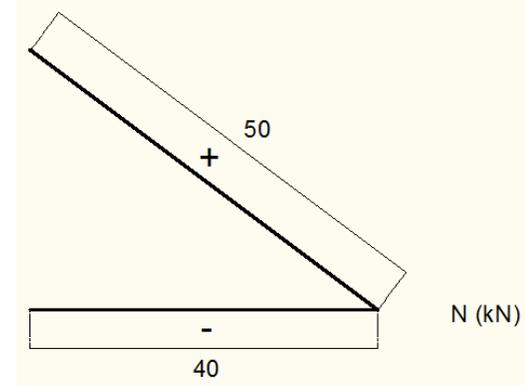
(a)



Exemplo 4)

b2) Tensão cisalhante na conexão em C

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{25 \text{ mm}}{2} \right)^2 = \pi (12,5 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 491 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

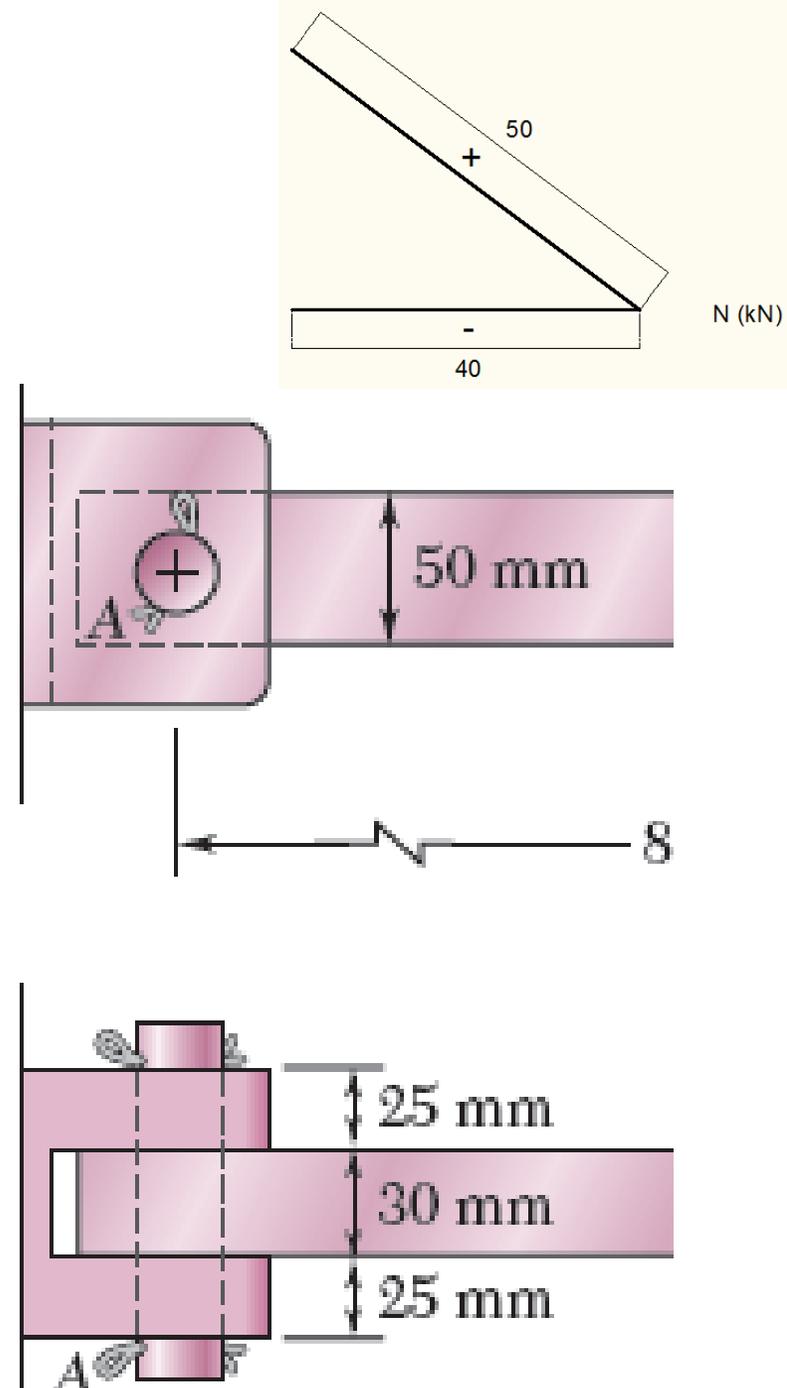
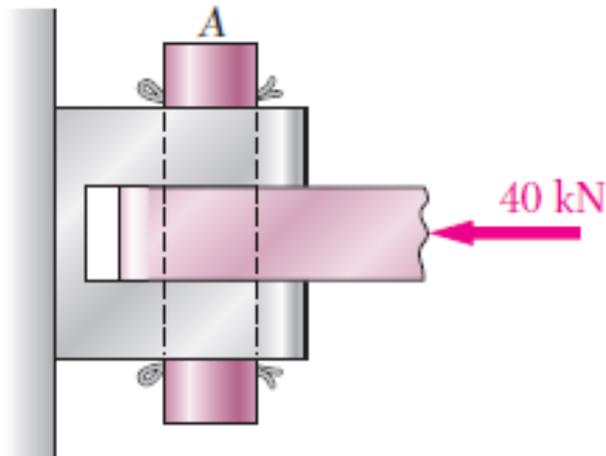


$$\tau_{\text{méd}} = \frac{P}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N}}{491 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 102,0 \text{ MPa}$$

Exemplo 4) c1) Tensão normal na barra AB

$$A_{AB} = 30 \cdot 50 = 1500 \text{ mm}^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{AB} = -\frac{40 \times 10^3 \text{ N}}{1,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = -26,7 \times 10^6 \text{ Pa} = -26,7 \text{ MPa}$$

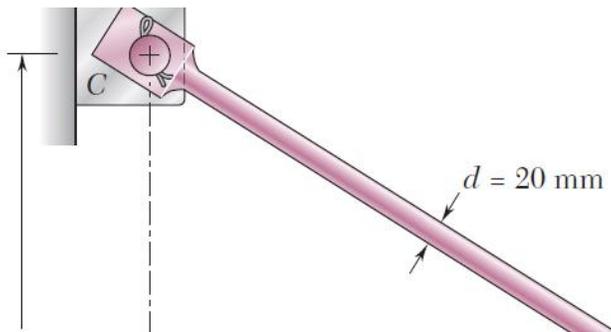
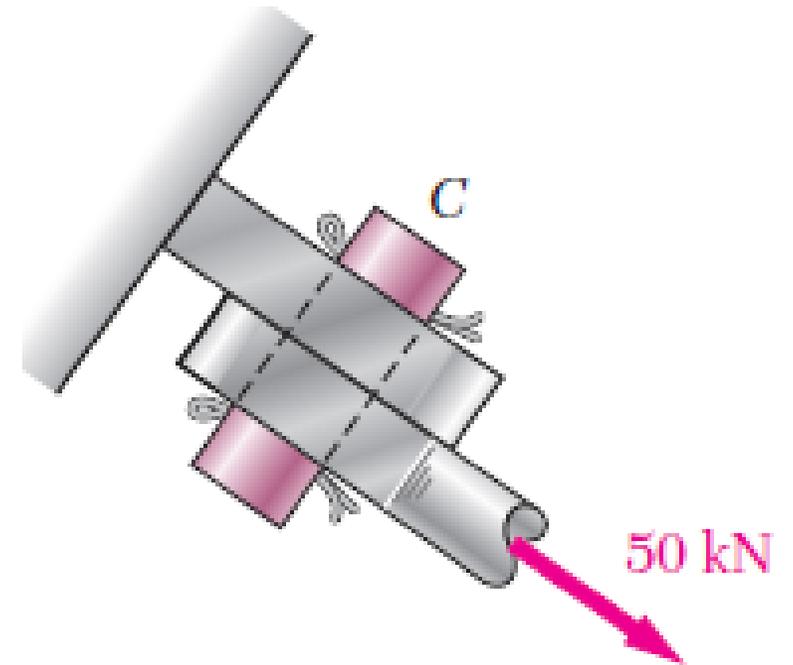


Exemplo 4)

c2) Tensão normal na barra BC

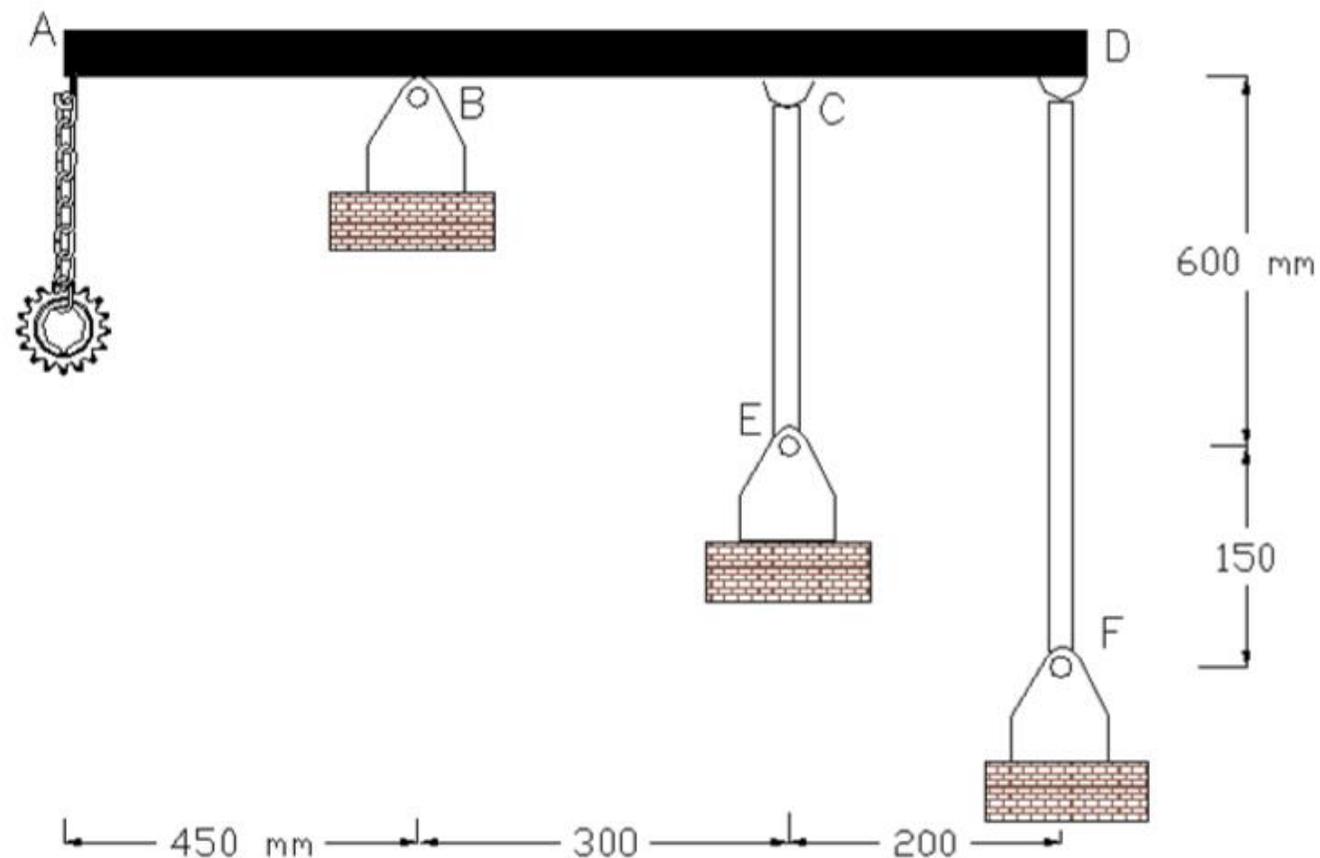
$$A_{BC} = \pi \cdot \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 314,16 \text{ mm}^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{50 \text{ kN}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 159.154,6 \text{ kPa} = 159,1 \text{ MPa}$$

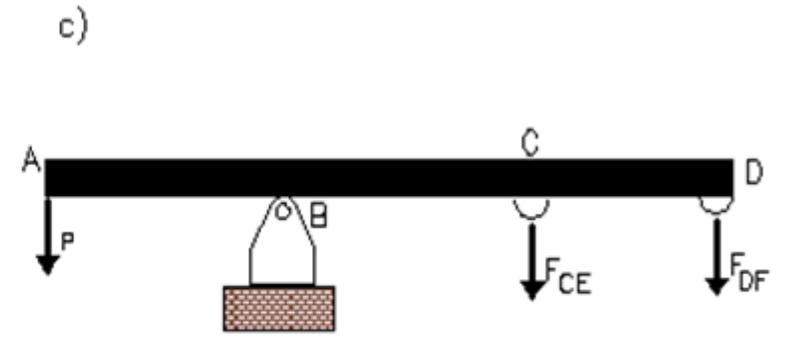
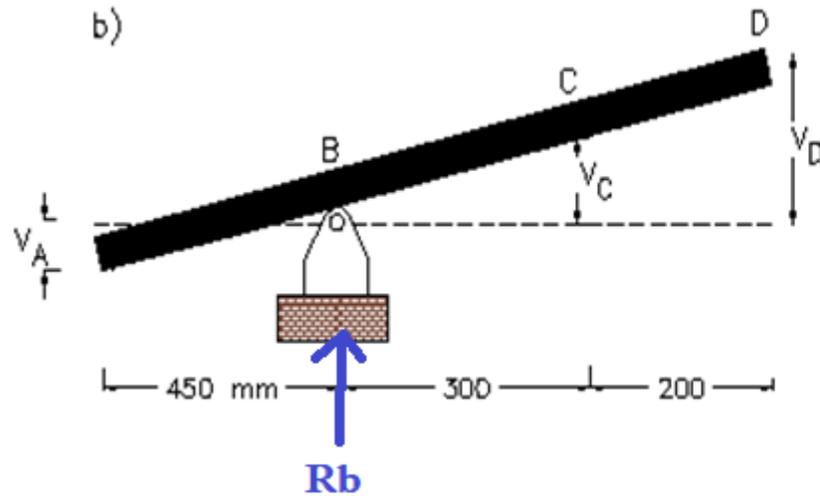


Exemplo 5*)

1.7.25. As barras cilíndricas CE e DF têm, respectivamente, diâmetros de 10 mm e 15 mm e são de alumínio. Elas estão ligadas à barra rígida ABCD. Determine o máximo valor admissível do peso (P) da peça dentada para que as tensões desenvolvidas nessas barras não sejam superiores à tensão admissível do alumínio e nem que o deslocamento vertical do ponto A exceda 1,25 mm. Com esse valor obtido máximo de P , calcule o fator de segurança da estrutura, definido como a relação entre tensão resistente do material e tensão admissível. Dados: $E_{al} = 70 \text{ GPa}$; $\bar{\sigma}_{al} = 200 \text{ MPa}$.



Exemplo 5)



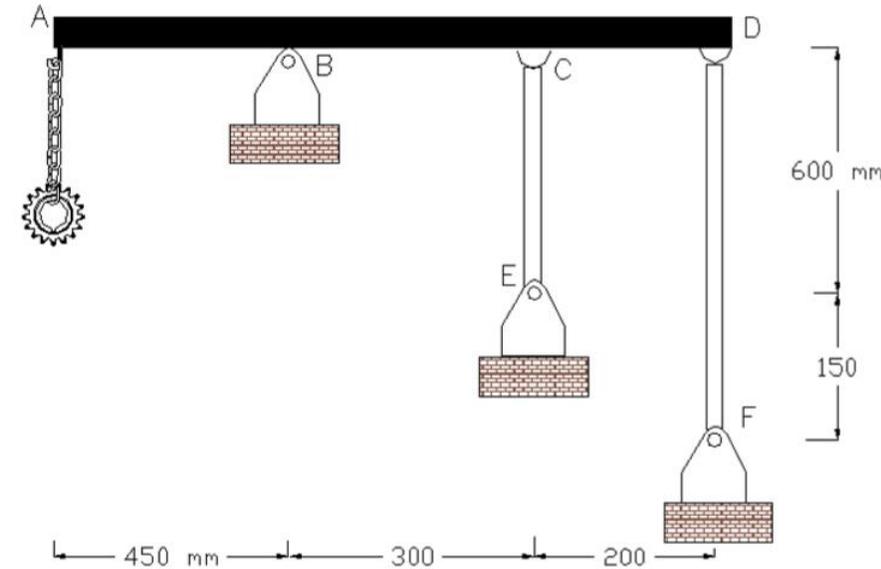
Conforme semelhança de triângulo da Figura 1.64b:

$$\frac{v_A}{0,45} = \frac{v_C}{0,3} = \frac{v_D - v_C}{0,2} \rightarrow 1,67 \cdot v_C = v_D \quad (1)$$

Com v_A , v_C e v_E sendo os deslocamentos dos pontos A, C e D, respectivamente. A equação de equilíbrio, conforme Figura 1.64c, fica:

$$\sum M_B = 0 : \rightarrow 0,45 \cdot P = 0,3 \cdot F_{CE} + 0,5 \cdot F_{DF} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 : R_b = F_{CE} + F_{DF}$$



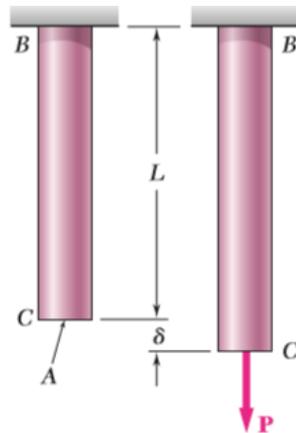
3 incógnitas de força vertical (R_b, F_{CE}, F_{DF}): Estrutura hiperestática!

Exemplo 5)

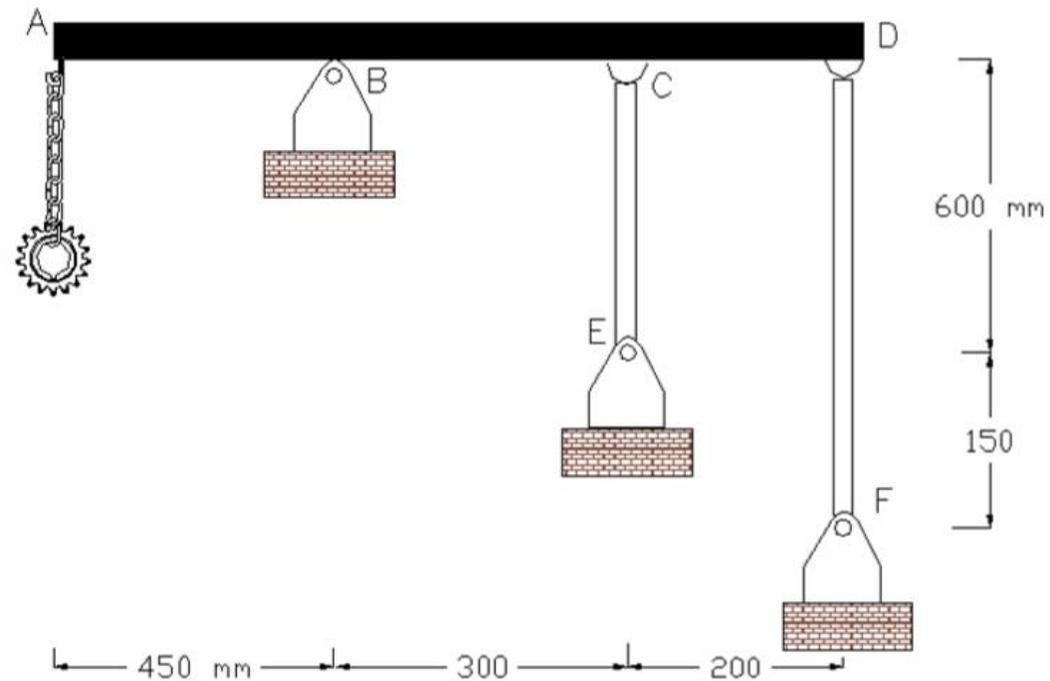
$$\frac{v_A}{0,45} = \frac{v_C}{0,3} = \frac{v_D - v_C}{0,2} \rightarrow 1,67 \cdot v_C = v_D \quad (1)$$

$$v_C = \delta_{CE} = \frac{F_{CE} \cdot L_{CE}}{A_{CE} \cdot E}$$

$$v_D = \delta_{DF} = \frac{F_{DF} \cdot L_{DF}}{A_{DF} \cdot E}$$

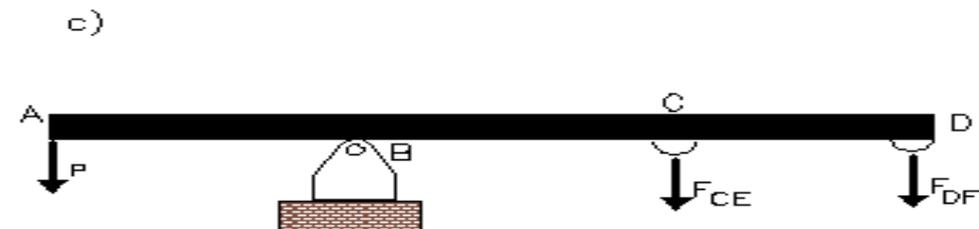


$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



As variações v_C e v_D são relacionadas com os esforços normais por:

$$1,67 \cdot \frac{F_{CE} \cdot 0,6}{E \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4}} = \frac{F_{DF} \cdot 0,75}{E \cdot \frac{\pi \cdot 0,015^2}{4}} \rightarrow F_{CE} = F_{DF} / 3 \quad (3)$$



Exemplo 5)

Resolvendo simultaneamente Eq. (2) e Eq. (3), obtêm-se os esforços das barras CE e DF:

$$F_{CE} = 0,25 \cdot P; F_{DF} = 0,75 \cdot P$$

$$\frac{v_A}{0,45} = \frac{v_C}{0,3} = \frac{v_D - v_C}{0,2} \rightarrow 1,67 \cdot v_C = v_D$$

$$v_C = \delta_{CE} = \frac{F_{CE} \cdot L_{CE}}{A_{CE} \cdot E}$$

$$v_D = \delta_{DF} = \frac{F_{DF} \cdot L_{DF}}{A_{DF} \cdot E}$$

Verificando deslocamento máximo em A:

$$v_A = \frac{0,45}{0,3} v_C = \frac{0,15 \cdot 0,25 \cdot P \cdot 0,6}{70 \cdot 10^6 \cdot (\pi \cdot 0,01^2 / 4)} \leq 1,25 \cdot 10^{-3} \rightarrow P \leq 30,54 \text{ kN}$$

Verificando tensões admissíveis:

Exemplo 5)

Verificando tensões admissíveis:

$$\sigma_{CE} = \frac{0,25 \cdot P}{\pi \cdot 0,01^2 / 4} \leq 200 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 62,8 \text{ kN};$$

$$\sigma_{DF} = \frac{0,75 \cdot P}{\pi \cdot 0,015^2 / 4} \leq 200 \cdot 10^3 \rightarrow P \leq 47,1 \text{ kN}$$

Portanto: $P_{\text{máx}} = 30,5 \text{ kN}$

Obtendo o fator de segurança da estrutura:

$$\sigma_{CE} = \frac{30,5 \cdot 0,25}{\pi \cdot 0,01^2 / 4} = 97,1 \text{ MPa} \rightarrow s_{CE} = \frac{200}{97,1} = 2,1$$

$$\sigma_{DF} = \frac{30,5 \cdot 0,75}{\pi \cdot 0,015^2 / 4} = 129,4 \text{ MPa} \rightarrow s_{DF} = \frac{200}{129,4} = 1,5; s = \min(s_i) = 1,5$$

edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=87051#section-2

USP DISCIPLINAS Apoio às Disciplinas

Disciplinas » Suporte » Português - Brasil (pt_br)

Valerio da Silva Almeida

Administração

- Administração do ambiente
 - Editar configurações
 - Conclusão de curso
 - Usuários
 - Filtros
 - Relatórios
 - Configuração das Notas
 - Resultado da aprendizagem
 - Emblemas
 - Backup
 - Restaurar
 - Importar
 - Banco de questões
 - Lixeira

Navegação

- Início
 - Painel
 - e-Disciplinas
 - Meus Ambientes
 - 2021
 - EP
 - PEF
 - PEF3200-2021
 - PEF3307-101-2021**
 - PEF3307-102-2021

Viga/pórtico plano: E5;E6;E14;E24;E32;E35;E40;E45

Treliça: E46;E47;E48;E50;E52

Quadros 3D: E59;E60;E63

- Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 29/04/21 Editar
- Tarefa a ser entregue até 29/04/21 Editar
- Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 06/05/21 Editar
- Lista de exercícios de: reações e esforços solicitantes Editar
- ~~Tarefa a ser entregue até 14/05/21~~ Editar
- Determinação do número de seu exercício a ser entregue até 20/05/21 Editar
- Tarefa a ser entregue até 20/05/21 Editar

+ Adicionar uma atividade ou recurso

Vídeos de exercícios resolvidos - Diagramas de esforços solicitantes Editar

- Portico Plano engastado - Diagramas Editar
- Pórtico Plano com um trecho inclinado Editar
- Viga bi apoiada com carga linear Editar

+ Adicionar uma atividade ou recurso

2) Lista de exercícios de cargas axiais, deformações axiais de barras, problemas hiperestáticos com barras rígidas. Editar

Exercícios fortemente recomendados para fazer dessa lista:
2;4;9;17;28;30

- Lista de cargas axiais Editar