SME0121 Processos Estocásticos: Lista 3 – Cadeias de Markov: Classificação de estados e distribuição estacionária

Thomas Peron

Não haverá provinha teórica sobre esta lista; utilize-a como treino para a P1.

1. Quais dos estados são transientes e quais são recorrentes na cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

2. Determine as classes e classifique os estados para cada um dos estados da cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. Uma partícula desloca-se sobre uma circunferência parando em cinco pontos previamente marcados no sentido dos ponteiros do relógio: 0, 1, 2, 3 e 4. Em cada passo a partícula desloca-se no sentido horário com probabilidade p e no sentido contrário com probabilidade $1-p$, com $0 < p < 1$. Seja, para X_n, $n = 1, 2, \ldots$, a posição da partícula no instante n.

   (a) Encontre a matriz de probabilidade de transição.

   (b) Essa cadeia de Markov é irredutível? Encontre os estados transientes e recorrentes.

   (c) Essa cadeia é Markov é aperiódica?

   (d) Determine a distribuição de probabilidade estacionária.

4. Considere uma cadeia de Markov com estados 1, 2, ... e 9, e com as seguintes probabilidades de transição: $p_{1,2} = p_{1,7} = 1/2$, $p_{i,i+1} = 1$ para $i \neq 1, 6, 9$, e $p_{61} = p_{91} = 1$. Determine se a classe recorrente dessa cadeia é periódica ou não.