Fenômenos de Transportes 3 (ZEA0764)

Difusão em Regime Transiente
1ª parte

Prof. Responsável:
Paulo José do Amaral Sobral

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Abril de 2024

Capítulo 5 do Livro Texto (Cremasco):**

Estudar todos os subcapítulos, com exceção do 5.5.

Tópicos

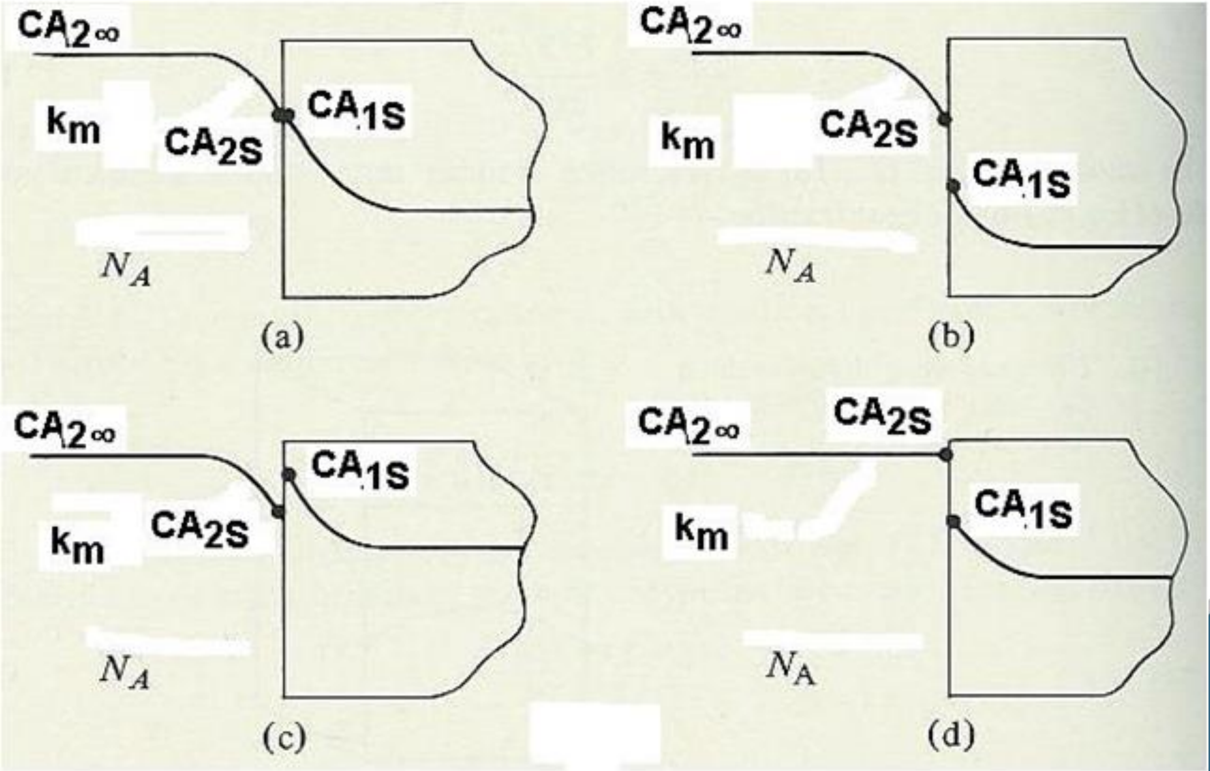
- I. Difusão em RT com resistência externa desprezível
- I.1. Difusão em uma placa plana infinita
- I.2. Difusão em uma esfera.
- I.3 Difusão em um cilindro infinito

A difusão será transiente, quando a diferença da concentração variar no tempo, e consequentemente, o fluxo também variará no tempo.

Esse fenômeno pode ocorrer em vários processos industriais, tais como, secagem, adsorção, hidratação, umidificação, extração, salga/dessalga, etc.

Nesses processos, geralmente a difusão ocorre dentro de um sólido (ou líquido parado ou movendo-se em regime laminar), com o fluxo entrando ou saindo dele, para ou de um fluido.

Portanto, existirão, sempre, duas resistência à transferência de massa: a interna (dentro do corpo onde ocorre a difusão), e a externa (no fluido, onde ocorre convecção ou mesmo, difusão).



Portanto, existirão, sempre, **duas resistência** à transferência de massa: a **interna** (dentro do corpo onde ocorre a difusão), e a **externa** (no fluido, onde ocorre convecção ou mesmo, difusão).

Em ambos os casos, a equação da difusão é:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap} \nabla^2 C_A \qquad (1)$$

Cuja solução dependerá de Bi_M:

$$Bi_M = \frac{Z\,\mathrm{km}}{Dap\ Kp} = \frac{Z/Dap}{Kp/km} \qquad (2)$$

Ocorrerão 2 situações:

1) Quando $Bi_M \rightarrow \infty$

Considera-se que a **Rext é desprezível**

$$(Z/Dap >> Kp/km)$$

Ocorrerão 2 situações:

1) Quando $Bi_M \rightarrow \infty$

Considera-se que a **Rext é desprezível**

$$(Z/Dap >> Kp/km)$$

2) Quando $Bi_M \rightarrow 0$

Considera-se que a **Rext não é desprezível**

$$(Z/Dap << Kp/km)$$

Ocorrerão 2 situações:

1) Quando $Bi_M \rightarrow \infty$ ($Bi_M > 50$)

Considera-se que a **Rext é desprezível**

$$(Z/Dap >> Kp/km)$$

2) Quando $Bi_M \rightarrow 0$

Considera-se que a **Rext não é desprezível**

$$(Z/Dap << Kp/km)$$

I. Difusão em RT com resistência externa desprezível

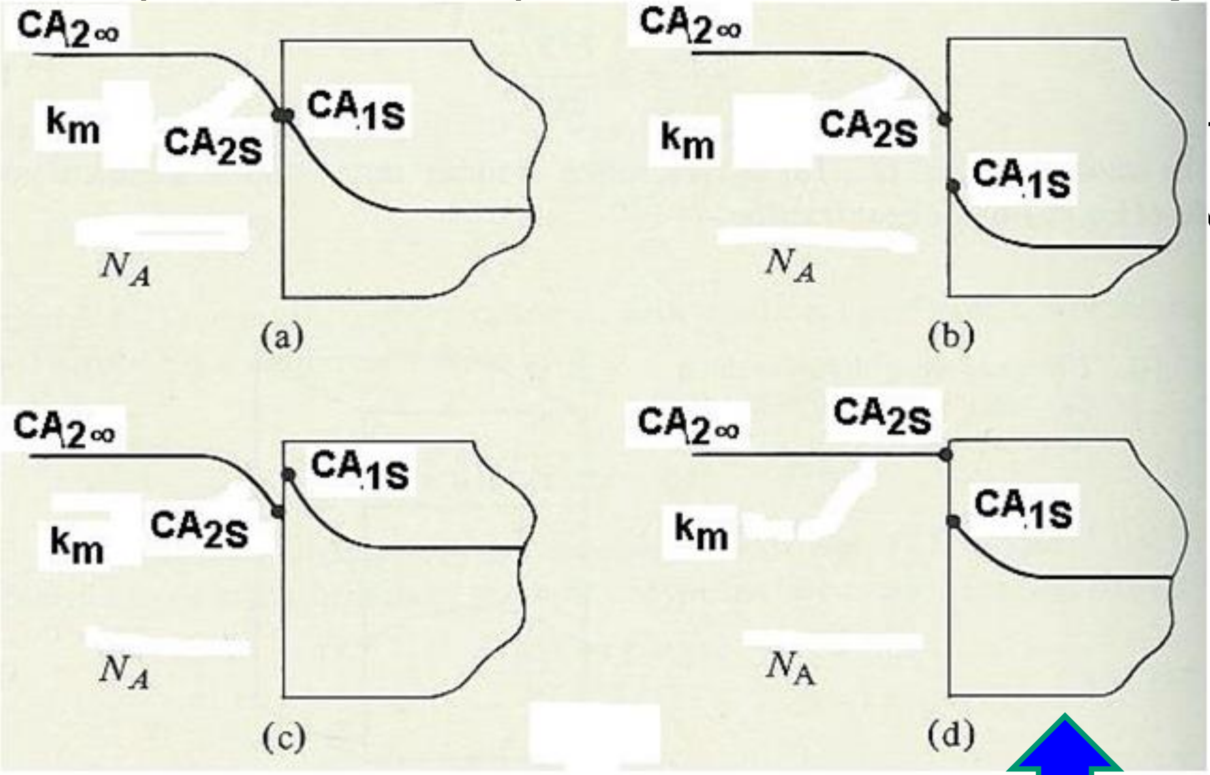
Esta situação ocorrerá quando houver forte convecção (Re elevado) na fase fluida, ou seja, fora do meio onde está ocorrendo a difusão.

Portanto, inexiste gradiente de concentração no fluido, que terá concentração no infinito. E, devido a forte convecção, a superfície do sólido entrará em equilíbrio imediatamente.

I. Difusão em RT com resistência externa desprezível

Esta situação ocorrerá quando houver forte convecção (Re elevado) na fase fluida, ou seja, fora do meio

Portanto ... no fluido, q... vido a forte co... em equilíbri...



I. Difusão em RT com resistência externa desprezível

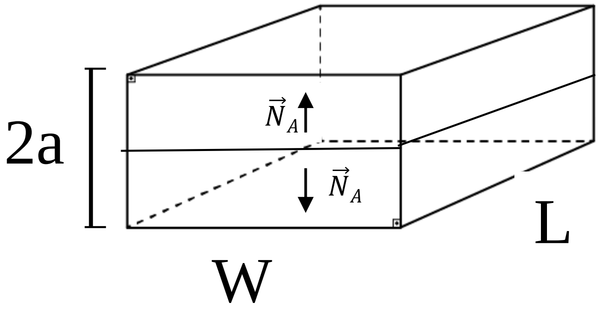
Esta situação ocorrerá quando houver forte convecção (Re elevado) na fase fluida, ou seja, fora do meio onde está ocorrendo a difusão.

Portanto, inexiste gradiente de concentração no fluido, que terá concentração no infinito. E, devido a forte convecção, a superfície do sólido entrará em equilíbrio imediatamente.

Estamos interessados, agora, em obter uma equação que permita o cálculo da evolução da concentração dentro do sólido [$\overline{C}_A = f(t)$].

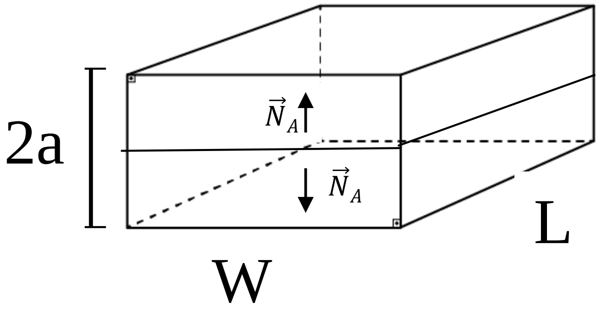
I.1. Difusão em uma placa plana infinita

Placa plana infinita: L >> 2a, e W >> 2a.



I.1. Difusão em uma placa plana infinita

Placa plana infinita: L >> 2a, e W >> 2a.

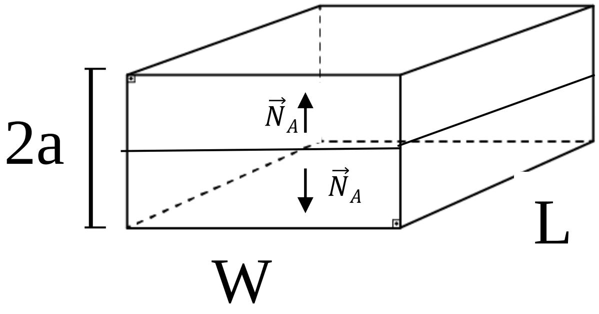


Nesse caso, a equação da difusão:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}\right) \quad (3)$$

I.1. Difusão em uma placa plana infinita

Placa plana infinita: L >> 2a, e W >> 2a.



Nesse caso, a equação da difusão:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}\right) \quad (3)$$

E, as condições de contorno:

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0}$

CC1: $t > 0$, em $z = 0 \rightarrow \partial C_A/\partial z = 0$

CC2: $t > 0$, em $z = Z \rightarrow C_A = C_A^* = Kp\ C_{A\infty}$

Visando a obtenção de uma solução “mais universal”, vamos adimensionalisar a Equação da difusão (Eq. 3), usando o adimensional θ:

$$\theta = \frac{C_A - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} \qquad (4)$$

Visando a obtenção de uma solução "mais universal", vamos adimensionalisar a Equação da difusão (Eq. 3), usando o adimensional θ:

$$\theta = \frac{C_A - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} \qquad (4)$$

Logo: $$C_A = \theta(C_{A0} - C_A^*) + C_A^*$$

Visando a obtenção de uma solução "mais universal", vamos adimensionalisar a Equação da difusão (Eq. 3), usando o adimensional θ:

$$\theta = \frac{C_A - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} \quad (4)$$

Logo: $$C_A = \theta(C_{A0} - C_A^*) + C_A^*$$

E,

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = (C_{A0} - C_A^*)\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2} = (C_{A0} - C_A^*)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

Substituindo na Eq. 3, temos:

$$(C_{A0} - C_A^*)\frac{\partial\theta}{\partial t} = D_{ap}(C_{A0} - C_A^*)(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2})$$

Substituindo na Eq. 3, temos:

$$\cancel{(C_{A0} - C_A^*)}\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{ap}\cancel{(C_{A0} - C_A^*)}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right)$$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Substituindo na Eq. 3, temos:

$$\cancel{(C_{A0} - C_A^*)}\frac{\partial\theta}{\partial t} = D_{ap}\cancel{(C_{A0} - C_A^*)}(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2})$$

E, portanto, a equação da difusão adimensional fica:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D_{ap}\,(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}) \qquad (5)$$

E, as condições de contorno?

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0} \rightarrow \theta = \dfrac{C_{A0} - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} = 1$

E, as condições de contorno?

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0} \rightarrow \theta = \frac{\cancel{C_{A0} - C_A^*}}{\cancel{C_{A0} - C_A^*}} = 1$

E, as condições de contorno?

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0} \rightarrow \theta = \frac{\cancel{C_{A0} - C_A^*}}{\cancel{C_{A0} - C_A^*}} = 1$

CC1: em $z = 0 \rightarrow \frac{\partial C_A}{\partial z} = \overbrace{(C_{A0} - C_A^*)}^{\neq 0} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

E, as condições de contorno?

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0} \rightarrow \theta = \dfrac{\cancel{C_{A0} - C_A^*}}{\cancel{C_{A0} - C_A^*}} = 1$

CC1: em $z = 0 \rightarrow \dfrac{\partial C_A}{\partial z} = \overbrace{(C_{A0} - C_A^*)}^{\neq 0} \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \rightarrow \dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

CC2: em $z = Z \rightarrow C_A = C_A^* \rightarrow \theta = \dfrac{C_A^* - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} = 0$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Em Resumo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{ap} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) \qquad (5)$$

CI: $t = 0 \rightarrow \theta = 1$

CC1: em $z = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

CC2: em $z = Z \rightarrow \theta = 0$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Em Resumo:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_{ap} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) \qquad (5)$$

CI: $t = 0 \rightarrow \theta = 1$

CC1: em $z = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$

CC2: em $z = Z \rightarrow \theta = 0$

$$\theta \begin{cases} 1 \\ \\ 0 \end{cases}$$

A solução da Eq. 5 [$\theta = f(z,t)$ e $\bar{\theta} = f(t)$] será pela técnica de Separação de Variáveis:

$$\theta(z,t) = \psi(z)\,\beta(t) \quad (6)$$

A solução da Eq. 5 [$\theta = f(z,t)$ e $\bar{\theta} = f(t)$] será pela técnica de Separação de Variáveis:

$$\theta(z,t) = \psi(z)\, \beta(t) \quad (6)$$

Portanto, teremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi \frac{d\beta}{dt} \quad (7)$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \beta \frac{d^2\psi}{dz^2} \quad (8)$$

E, substituindo as Eqs 7 e 8 na Eq. 5, teremos:

$$\psi \frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\beta \ \frac{d^2\psi}{dz^2} \qquad (9)$$

$$\psi \frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\beta \ \frac{d^2\psi}{dz^2} \qquad (9)$$

Que, separando as variáveis, fica:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi} \ \frac{d^2\psi}{dz^2} \qquad (10a)$$

$$\psi \frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\beta \ \frac{d^2\psi}{dz^2} \qquad (9)$$

Que, separando as variáveis, fica:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi} \ \frac{d^2\psi}{dz^2} = -\lambda^2 \qquad (10b)$$

$$\psi \frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\beta \; \frac{d^2\psi}{dz^2} \qquad (9)$$

Que, separando as variáveis, fica:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\;\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\lambda^2 \qquad (10b)$$

Portanto, temos:

$$\frac{d\beta}{dt} + \lambda^2 D_{ap}\beta = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda^2\psi = 0 \qquad (12)$$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Solução da Eq. 11:

$$\int \frac{d\beta}{\beta} = -\lambda^2 D_{ap} \int dt \qquad (13)$$

É:

$$Ln\beta = -\lambda^2 D_{ap} t + C_0 \qquad (14)$$

E, portanto:

$$\boxed{\beta = C_1 \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)} \qquad (15)$$

E, a solução da Eq. 12:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda^2\psi = 0$$

Será:

E, a solução da Eq. 12:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda^2\psi = 0$$

Será:

$$\boxed{\psi = C_2 Sen(\lambda z) + C_3 Cos(\lambda z)} \quad (16)$$

E, a solução da Eq. 12:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda^2\psi = 0$$

Será:

$$\boxed{\psi = C_2 Sen(\lambda z) + C_3 Cos(\lambda z)} \quad (16)$$

Portanto, a solução $\theta = f(z,t)$ será:

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

E, a solução da Eq. 12:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \lambda^2\psi = 0$$

Será:

$$\boxed{\psi = C_2 Sen(\lambda z) + C_3 Cos(\lambda z)} \quad (16)$$

Portanto, a solução $\theta = f(z,t)$ será:

$$\boxed{\theta = [A\ Cos(\lambda z) + B\ Sen(\lambda z)]Exp(-\lambda^2 D_{ap} t)} \quad (17)$$

Onde: $A = C_1 \times C_3$ e $B = C_1 \times C_2$

Aplicando a CC1:

$$\frac{d\theta}{dz} = [-A\lambda \mathrm{Sen}(\lambda z) + B\lambda \mathrm{Cos}(\lambda z)]\overbrace{\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}^{\text{constante}} \quad (18)$$

Aplicando a CC1:

$$\frac{d\theta}{dz} = [-A\lambda \mathrm{Sen}(\lambda z) + B\lambda \mathrm{Cos}(\lambda z)]\overbrace{\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}^{\textbf{constante}} \quad (18)$$

E, consequentemente:

$$\left.\frac{d\theta}{dz}\right|_{z=0} = [-A\lambda \overset{0}{\cancel{\mathrm{Sen}(\lambda 0)}} + B\lambda \overset{1}{\cancel{\mathrm{Cos}(\lambda 0)}}] = 0 \qquad (19)$$

Portanto, a Eq. 19 só será “verdade”, se B = 0.

E, a Eq. 17 ficará:

$$\boxed{\theta = [\mathrm{A}\ \mathrm{Cos}(\lambda \mathrm{z})]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)} \quad (20)$$

$$\boxed{\theta = [\mathrm{A\ Cos}(\lambda z)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)} \quad (20)$$

Agora, aplicamos a CC2:

$$\theta|_{z=Z} = [\mathrm{A\ Cos}(\lambda Z)]\,\overbrace{\mathrm{Exp}\left(-\lambda^2 D_{ap}\right.}^{\neq 0}\left.t\right) = 0 \quad (21)$$

$$\boxed{\theta = [\mathrm{A}\ \mathrm{Cos}(\lambda z)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)} \quad (20)$$

Agora, aplicamos a CC2:

$$\theta|_{z=Z} = [\mathrm{A}\ \mathrm{Cos}(\lambda Z)]\,\overbrace{\mathrm{Exp}\left(-\lambda^2 D_{ap} t\right)}^{\neq 0} = 0 \quad (21)$$

Portanto, considerando que $A \neq 0$:

$$\mathrm{Cos}(\lambda Z) = 0 \qquad (22)$$

E, isso será verdade em

$\lambda = \pi/2Z;\ 3\pi/2Z;\ 5\pi/2Z.\ ...$

Logo, encontramos Lambda:

$$\boxed{\lambda_n = (2n+1)\frac{\pi}{2Z}} \qquad (23)$$

Logo, encontramos Lambda:

$$\boxed{\lambda_n = (2n+1)\,\frac{\pi}{2Z}} \qquad (23)$$

Portanto, a Eq. 20 ficará:

$$\boxed{\theta = \Sigma\, \mathrm{A}_n\, \mathrm{Cos}\!\left(\frac{2n+1}{2Z}\,\pi\, \mathrm{z}\right) \mathrm{Exp}\left(-\frac{(2n+1)^2}{4Z^2}\,\pi^2 D_{ap}\, t\right)} \qquad (24)$$

Mas, ainda falta encontrar A_n... com a CI...

$$\theta|_{t=0} = \Sigma\, A_n\, \mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, z\right)\cancelto{1}{\mathrm{Exp}(0)} = 1 \qquad (25)$$

$$\theta|_{t=0} = \Sigma\, A_n \,\mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, z\right)\cancelto{1}{\mathrm{Exp}(0)} = 1 \qquad (25)$$

Portanto: $$\Sigma\, A_n \,\mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, z\right) = 1 \qquad (26)$$

$$\theta|_{t=0} = \Sigma\, \text{A}_n\, \text{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, \text{z}\right)\cancelto{1}{\text{Exp}(0)} = 1 \quad (25)$$

Portanto: $$\Sigma\, \text{A}_n\, \text{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, \text{z}\right) = 1 \quad (26)$$

Os A_n são os Coeficientes da Série Cosseno de Fourier, determinados com a equação:

$$\text{A}_n = \frac{2}{Z}\int_0^Z \text{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z}\pi\, \text{z}\right)dz \quad (27)$$

Ou

$$\boxed{\text{A}_n = \frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}\right]} \quad (28)$$

Logo, substituindo a Eq. 28 na Eq. 24, teremos a solução da Equação da difusão em uma placa plana infinita [$\theta = f(z,t)$]:

$$\boxed{\theta = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1}\right] \mathrm{Cos}\left(\frac{2n+1}{2Z} \pi\, z\right) \mathrm{Exp}\left(-\frac{(2n+1)^2}{4Z^2} \pi^2 D_{ap} t\right)} \quad (29)$$

Essa equação pode se apresentar de maneira muito mais simples, se usarmos os seguintes termos:

$$\eta = z/Z$$

$$\gamma_n = (2n+1)\pi/2$$

$$\text{e, } Fo_M = \frac{D_{ap}\, t}{Z^2} \text{ (Nº de Fourier)}$$

Essa equação pode se apresentar de maneira muito mais simples, se usarmos os seguintes termos:

$$\eta = z/Z$$

$$\gamma_n = (2n+1)\pi/2$$

$$\text{e, } Fo_M = \frac{D_{ap}\, t}{Z^2} \text{ (Nº de Fourier)}$$

$$\boxed{\theta = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n} \mathrm{Cos}(\gamma_n \eta)\,\mathrm{Exp}(-\gamma_n{}^2 Fo_M)} \quad (30)$$

Agora, vamos para a equação que representa a evolução da concentração média no tempo.

Recordando o conceito de média de uma função:

$$\overline{\theta} = \frac{1}{Z}\int_0^Z C_A(z,t)\,dz \quad (31)$$

E, aplicando a Eq. 29 nessa integral, chega-se à equação $\overline{\theta} = f(t)$:

$$\boxed{\overline{\theta} = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\ \mathrm{Exp}\left(-\frac{(2n+1)^2}{4Z^2}\pi^2 D_{ap} t\right)} \quad (32)$$

ou

$$\boxed{\overline{\theta} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_n{}^2 \mathrm{Fo}_M)} \qquad (33)$$

Recordando:

$$\overline{\theta} = \frac{\overline{C_A} - C_A^*}{C_{A0} - C_A^*} \quad \text{e} \quad \gamma_n = (2n+1)\pi/2$$

Aplicando a Eq. 33:

$$\theta = \frac{2}{\gamma_0^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_0{}^2\mathrm{Fo}_M) + \frac{2}{\gamma_1^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_1{}^2\mathrm{Fo}_M) + \frac{2}{\gamma_2^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_2{}^2\mathrm{Fo}_M) + \frac{2}{\gamma_3^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_3{}^2\mathrm{Fo}_M) + \frac{2}{\gamma_4^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_4{}^2\mathrm{Fo}_M) + \frac{2}{\gamma_5^2}\mathrm{Exp}(-\gamma_5{}^2\mathrm{Fo}_M) + \varepsilon$$

Com $\gamma_0 = \pi/2$; $\gamma_1 = 3\pi/2$; $\gamma_2 = 5\pi/2$; $\gamma_3 = 7\pi/2$; $\gamma_4 = 9\pi/2$; $\gamma_5 = 11\pi/2$...

Critério de trucagem:

Quando $Fo_M \geq 0,2 \rightarrow$ trunca-se em n=0.

$$\theta = \frac{2}{\gamma_0^2} \mathrm{Exp}(-\gamma_0{}^2 Fo_M)$$

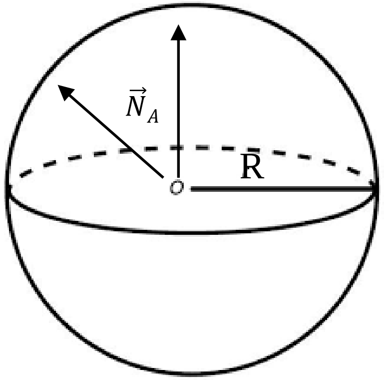
Com $\gamma_0 = \pi/2$

$$Fo_M = \frac{D_{ap}\, t \uparrow}{\downarrow Z^2}$$

I.2. Difusão em uma esfera.

Quando o meio onde estiver ocorrendo a difusão for uma esfera, ou possa ser aproximado a uma esfera, deve-se utilizar a solução da equação da difusão em coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial CA}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}\right) \quad (34)$$



I.2. Difusão em uma esfera.

Quando o meio onde estiver ocorrendo a difusão for uma esfera, ou possa ser aproximado a uma esfera, deve-se utilizar a solução da equação da difusão em coordenadas esféricas:

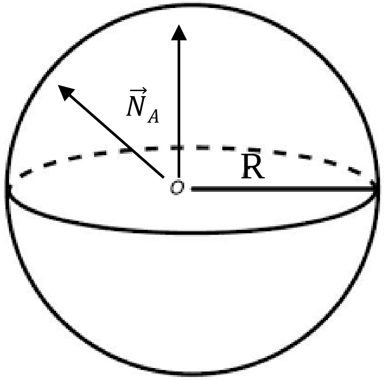
$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial CA}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}\right) \quad (34)$$

Com:

CI: $t = 0 \rightarrow C_A = C_{A0}$

CC1: $t > 0$, em $r = 0 \rightarrow \lim_{r\to 0} C_A = finito$

CC2: $t > 0$, em $r = R \rightarrow C_A = C_A^*$



Apresentando em adimensional:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right) \qquad (34)$$

Com:

CI: t = 0 → θ = 1

CC1: t > 0, em r = 0 → $\lim_{r\to 0}\theta = finito$

CC2: t > 0, em r = R → θ = 0

De maneira análoga...

$$\theta(r,t) = \psi(\mathrm{r})\ \beta(t) \quad (35)$$

Portanto, teremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi\,\frac{d\beta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \ \beta\,\frac{d\psi}{dr}$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = \ \beta\,\frac{d^2\psi}{dr^2}$$

E, portanto:

$$\psi\,\frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\left(\frac{2}{r}\beta\ \frac{d\psi}{dr} + \beta\ \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) \quad (36)$$

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (37)$$

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (37)$$

Sendo que a solução da primeira integral, já conhecemos (Eq. 15):

$$\boxed{\beta = C_1 \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}$$

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (37)$$

Sendo que a solução da primeira integral, já conhecemos (Eq. 15):

$$\boxed{\beta = C_1 \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}$$

E, a segunda equação é:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \lambda^2\psi = 0 \qquad (38)$$

Para resolver a Eq. 38, é preciso criar uma nova variável (ε):

$$\varepsilon = r\,\psi \qquad (39)$$

Então, é necessário derivar a função ψ, para substituição na Eq. 38:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{\varepsilon}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{d\epsilon}{dr} \qquad (40)$$

E,

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = 2\,\frac{\varepsilon}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} \qquad (41)$$

E, substituindo as Eqs. 39, 40 e 41 na Eq. 38:

$$\frac{2\varepsilon}{r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} - \frac{2\varepsilon}{r^3} + \frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr} + \lambda^2\frac{\epsilon}{r} = 0 \quad (42)$$

E, substituindo as Eqs. 39, 40 e 41 na Eq. 38:

$$\cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \frac{1}{\cancel{r}}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} - \cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \lambda^2\frac{\epsilon}{\cancel{r}} = 0 \quad (42)$$

E, substituindo as Eqs. 39, 40 e 41 na Eq. 38:

$$\cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \frac{1}{\cancel{r}}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} - \cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \lambda^2\frac{\epsilon}{\cancel{r}} = 0 \quad (42)$$

Ficando assim:

$$\boxed{\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} + \lambda^2\epsilon = 0} \quad (43)$$

Que é idêntica à Eq. 12, para Placa Plana.

E, substituindo as Eqs. 39, 40 e 41 na Eq. 38:

$$\cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \frac{1}{\cancel{r}}\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} - \cancel{\frac{2\varepsilon}{r^3}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{d\epsilon}{dr}} + \lambda^2\frac{\epsilon}{\cancel{r}} = 0 \quad (42)$$

Ficando assim:

$$\boxed{\frac{d^2\varepsilon}{dr^2} + \lambda^2\epsilon = 0} \quad (43)$$

Que é idêntica à Eq. 12, para Placa Plana. Logo, sua solução é conhecida:

$$\epsilon = C_2\mathrm{Sen}(\lambda r) + C_3\mathrm{Cos}(\lambda r) \quad (44)$$

Como $\psi = \varepsilon/r$ (da Eq. 39), a Eq. 44 fica:

$$\psi = \frac{C_2}{r}\,\mathrm{Sen}(\lambda r) + \frac{C_3}{r}\,\mathrm{Cos}(\lambda r) \qquad (45)$$

Como ψ = ε/r (da Eq. 39), a Eq. 44 fica:

$$\psi = \frac{C_2}{r}\mathrm{Sen}(\lambda r) + \frac{C_3}{r}\mathrm{Cos}(\lambda r) \qquad (45)$$

E, a Eq. 35 fica, então:

$$\boxed{\theta = [\frac{A}{r}\mathrm{Cos}(\lambda r)+\frac{B}{r}\mathrm{Sen}(\lambda r)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)} \qquad (46)$$

Agora, temos que aplicar as CCs e CI...

Os passos seguintes são similares aos da Placa Plana, com exceção da aplicação da CC1:

$$\lim_{r\to 0}\theta = [\frac{\mathrm{A}}{r}\mathrm{Cos}(\lambda 0)+\frac{\mathrm{B}}{r}\mathrm{Sen}(\lambda 0)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)=\text{finito} \quad (47)$$

Os passos seguintes são similares aos da Placa Plana, com exceção da aplicação da CC1:

$$\lim_{r\to 0}\theta = [\frac{A}{r}\cancelto{1}{\mathrm{Cos}(\lambda 0)}+\frac{B}{r}\cancelto{0}{\mathrm{Sen}(\lambda 0)}]\overbrace{\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}^{\text{constante finita}}=\text{finito} \quad (47)$$

Os passos seguintes são similares aos da Placa Plana, com exceção da aplicação da CC1:

$$\lim_{r \to 0} \theta = [\frac{A}{r} \overset{1}{\cancel{\mathrm{Cos}(\lambda 0)}} + \frac{B}{r} \overset{0}{\cancel{\mathrm{Sen}(\lambda 0)}}] \overbrace{\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)}^{\text{constante finita}} = \text{finito} \quad (47)$$

Portanto, temos a seguinte situação:

$$\lim_{r \to 0} \theta = \left[\overset{\infty}{\cancel{\frac{A}{0}}} + \overset{\text{indeterminado}}{\cancel{\frac{0}{0}}} \right] \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) = \text{finito} \quad (48)$$

Portanto, A = 0, por que o limite não pode tender para o infinito...

Mas, a Eq. 47 simplificada ainda tem que atender a CC1:

$$\lim_{r \to 0} \theta = [\frac{B}{0} \mathrm{Sen}(\lambda 0)] \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) = \text{finito} \quad (47)$$

Mas, a Eq. 47 simplificada ainda tem que atender a CC1:

$$\lim_{r\to 0}\theta = [\frac{\mathrm{B}}{0}\mathrm{Sen}(\lambda 0)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) = \text{finito (47)}$$

Ou seja, o termo em Seno tem que ser finito.

Mas, a Eq. 47 simplificada ainda tem que atender a CC1:

$$\lim_{r \to 0} \theta = [\frac{\mathrm{B}}{0} \mathrm{Sen}(\lambda 0)]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) = \text{finito (47)}$$

Ou seja, o termo em Seno tem que ser finito. Aplicando a Regra de L'Hôpital no termo entre []:

$$\lim_{r \to 0} \theta = [\mathrm{B}\, \lambda\, \cancelto{1}{\mathrm{Cos}(\lambda 0)}] = \text{finito}$$

Ou seja, a CC1 está satisfeita.

E Equação então, continua como:

$$\theta = [\frac{\mathrm{B}}{r}\mathrm{Sen}(\lambda \mathrm{r})]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (48)$$

E Equação então, continua como:

$$\theta = [\frac{\mathrm{B}}{r}\mathrm{Sen}(\lambda \mathrm{r})]\mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (48)$$

Aplicando-se a CC2, se determina:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{R} \qquad (49)$$

E, com a CI, determina-se:

$$B_n = \frac{2R}{n\pi}(-1)^{n+1} \quad (50)$$

Substituindo as Eqs 49 e 50 na Eq. 48, temos:

$$\boxed{\theta = \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{nr}\right] \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \mathrm{Exp}\left(-\frac{(n\pi)^2}{R^2} D_{ap} t\right)} \quad (51)$$

Substituindo as Eqs 49 e 50 na Eq. 48, temos:

$$\boxed{\theta = \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{nr}\right] \mathrm{Sen}\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \mathrm{Exp}\left(-\frac{(n\pi)^2}{R^2} D_{ap} t\right)} \quad (51)$$

Que pode ficar:

$$\boxed{\theta = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n}\right] \mathrm{Sen}(\eta\gamma_n) \mathrm{Exp}(-\gamma_n^2 \mathrm{Fo}_M)} \quad (52)$$

Neste caso, $\gamma_n = n\pi$ e $\eta = r/R$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

As respectivas equações da concentração média:

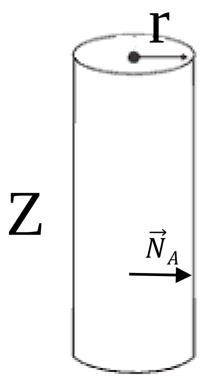
$$\boxed{\overline{\theta} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \mathrm{Exp}\left(-\frac{(n\pi)^2}{R^2} D_{ap} t\right) \quad (53)}$$

Que pode ficar:

$$\boxed{\overline{\theta} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \mathrm{Exp}\left(-\gamma_n^2 \mathrm{Fo}_M\right)} \quad (54)$$

I.3 Difusão em um cilindro infinito

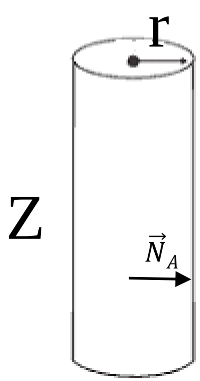
O cilindro infinito é aquele cuja altura é muito maior que seu raio→ $Z >> r$ (figura).



I.3 Difusão em um cilindro infinito

O cilindro infinito é aquele cuja altura é muito maior que seu raio→ Z >> r (figura).

A respectiva equação da difusão é:

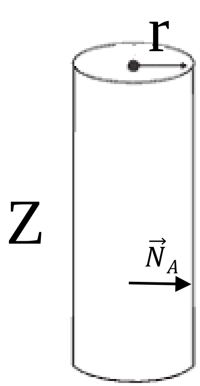


$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}\right) \qquad (55)$$

I.3 Difusão em um cilindro infinito

O cilindro infinito é aquele cuja altura é muito maior que seu raio→ Z >> r (figura).

A respectiva equação da difusão é:



$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2}\right) \qquad (55)$$

Com:

CI: t = 0 → $C_A = C_{A0}$

CC1: t > 0, em r = 0 → $\lim_{r \to 0} C_A = finito$

CC2: t > 0, em r = R → $C_A = C_A{}^*$

Adimensionalisada:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = D_{ap}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\right) \quad (56)$$

Com:

CI: t = 0 → θ = 1

CC1: t > 0, em r = 0 → $\lim_{r\to 0}\theta = finito$

CC2: t > 0, em r = R → θ = 0

De maneira análoga...

$$\theta(r,t) = \psi(\mathrm{r})\,\beta(t)$$

Portanto, teremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi \frac{d\beta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \beta \frac{d\psi}{dr}$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = \beta \frac{d^2\psi}{dr^2}$$

De maneira análoga...

$$\theta(r,t) = \psi(\mathrm{r})\,\beta(t)$$

Portanto, teremos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \psi \frac{d\beta}{dt}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \beta \frac{d\psi}{dr}$$

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} = \beta \frac{d^2\psi}{dr^2}$$

E, portanto:

$$\psi \frac{d\beta}{dt} = D_{ap}\left(\frac{1}{r}\beta \frac{d\psi}{dr} + \beta \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) \quad (57)$$

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (58)$$

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (58)$$

A solução da primeira integral é conhecida (Eq. 15):

$$\beta = C_1 \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)$$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

E, então:

$$\frac{1}{D_{ap}\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) = -\lambda^2 \qquad (58)$$

A solução da primeira integral é conhecida (Eq. 15):

$$\beta = C_1 \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t)$$

E, a segunda equação é:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \lambda^2\psi = 0 \qquad (59)$$

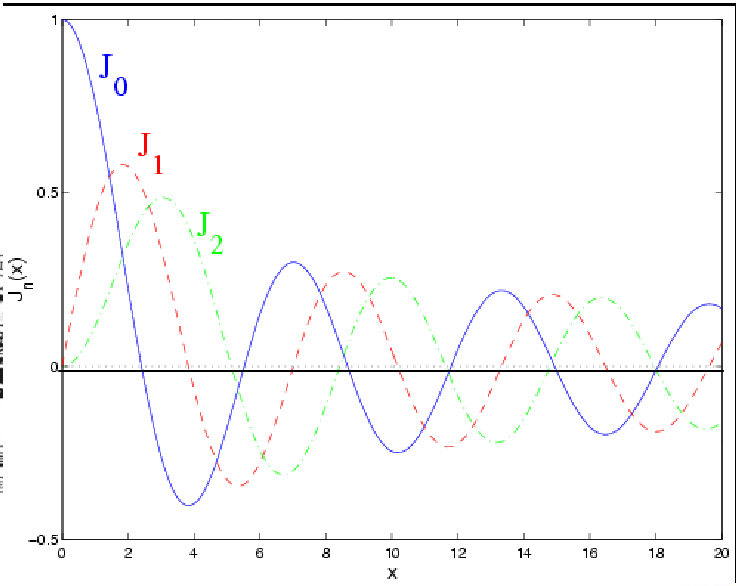
A Eq. 59 é conhecida como Eq. de Bessel de Ordem Zero, cuja solução é a seguinte:

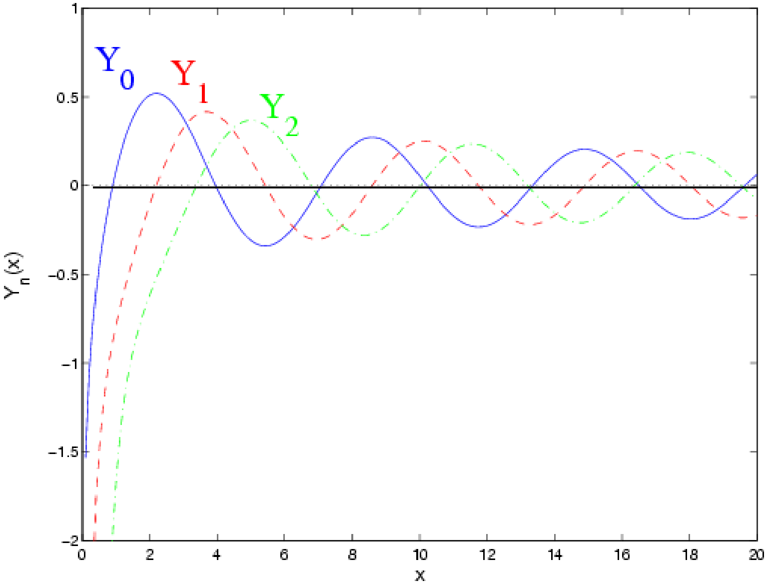
$$\psi = C_2\, J_0(\lambda\, r) + C_3\, Y_0\,(\lambda r) \qquad (60)$$

Onde:

J_0 é a função de Bessel de Primeira Classe de Ordem Zero;

Y_0 é a função de Bessel de Segunda Classe de Ordem Zero.





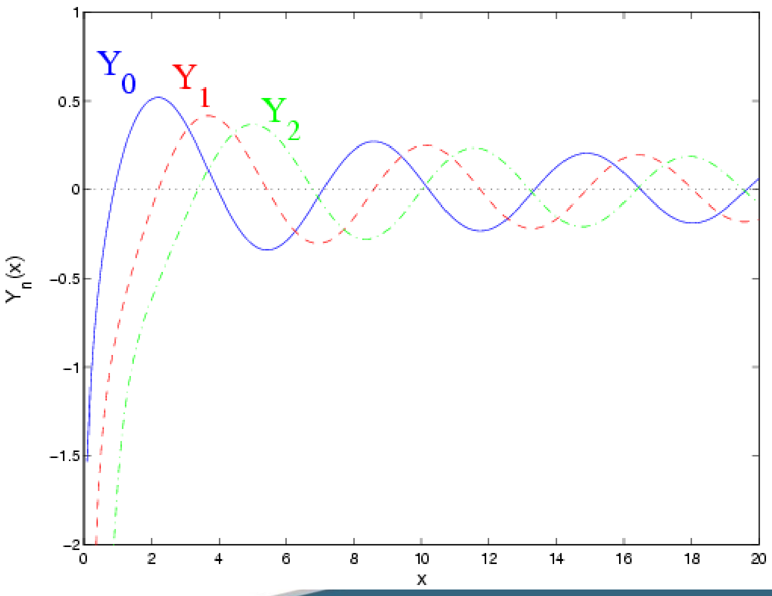
Temos, então:

$$\theta = [A\ J_0(\lambda\ r) + B\ Y_0\ (\lambda r)]\ \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (61)$$

Temos, então:

$$\theta = [A\ J_0(\lambda\ r) + B\ Y_0\ (\lambda r)]\ \mathrm{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (61)$$

Segundo a CC1, Eq. 61 tem que ser finita em r→0. Entretanto, nota-se que a função Y_0 tende para –∞ quando r→0. Logo, B = 0.



Temos, então:

$$\theta = [A\ J_0(\lambda\ r) + B\ Y_0\ (\lambda r)]\ \text{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (61)$$

Segundo a CC1, Eq. 61 tem que ser finita em r→0. Entretanto, nota-se que a função Y_0 tende para –∞ quando r→0. Logo, B = 0. Assim, ficamos com:

$$\theta = [A\ J_0(\lambda\ r)]\ \text{Exp}(-\lambda^2 D_{ap} t) \quad (62)$$

Que, portanto, atende a CC1.

Aplicando-se a CC2:

$$\theta(r=R) = [A\ J_0(\lambda\ R)]\ \underbrace{\mathrm{Exp}\left(-\lambda^2 D_{ap} t\right)}_{\neq 0} = 0 \qquad (63)$$

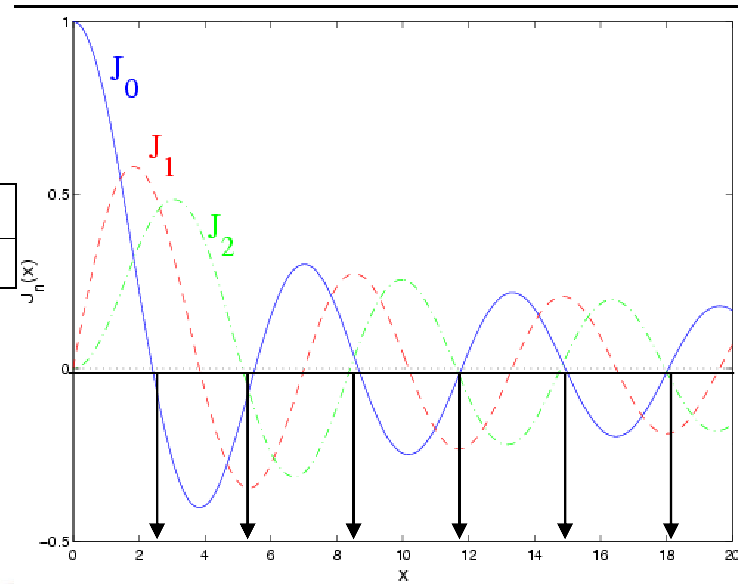
Aplicando-se a CC2:

$$\theta(r=R) = [A\, J_0(\lambda R)]\ \overbrace{\mathrm{Exp}\left(-\lambda^2 D_{ap} t\right)}^{\neq 0} = 0 \qquad (63)$$

Isso será verdade quando $J_0(\lambda R) = 0$, pois $A \neq 0$, ou seja, quando $\lambda_n R = \gamma_n$ for Raiz da função de Bessel J_0.

Tabela 5.1:

γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711



Observem que $\lambda_n = \gamma_n/R$

Aplicando a CCI, obtém-se a última incógnita (A):

$$A_n = \frac{2}{\gamma_n}\left[\frac{1}{(J_1(\gamma_n)}\right]$$

Onde J_1 é a função de Bessel de Primeira Classe e Primeira Ordem.

Então, substituindo B=0, λ_n e A_n na Eq. 61, obtemos:

$$\boxed{\theta = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\gamma_n}\right]\frac{J_0\left(\frac{\gamma_n r}{R}\right)}{J_1(\gamma_n)}\ \mathrm{Exp}\left(-\gamma_n\frac{D_{ap}t}{R^2}\right)} \quad (64)$$

Que pode se apresentar assim:

$$\boxed{\theta = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\gamma_n}\right]\frac{J_0(\eta\,\gamma_n)}{J_1(\gamma_n)}\,\mathrm{Exp}(-\gamma_n^2 \mathrm{Fo}_M)} \quad (65)$$

Neste caso, γ_n = raízes funções de Bessel e $\eta = r/R$

As respectivas equações da concentração média:

$$\boxed{\overline{\theta} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\,\mathrm{Exp}\left(-\gamma_n^2 \frac{D_{ap}\,t}{R^2}\right)} \quad (53)$$

Que pode ficar:

$$\boxed{\overline{\theta} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\,\mathrm{Exp}\left(-\gamma_n^2 \mathrm{Fo}_M\right)} \quad (54)$$

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Quadro 5.1 do Livro texto

$\theta(\eta, Fo_M)$	γ_n
$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\gamma_n^2}\cos(\eta\gamma_n)e^{\left(-\gamma_n^2 Fo_M\right)}$	$(2n+1)\frac{\pi}{2}$
$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\gamma_n}\text{sen}(\eta\gamma_n)e^{\left(-\gamma_n{}^2 Fo_M\right)}$	$(n\pi)$
$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{J_0(\eta\gamma_n)}{J_1(\gamma_n)}\right]e^{\left(-\gamma_n^2 Fo_M\right)}$	tab.(5.1)

Quadro 5.2 do Livro texto

$\bar{\theta}(Fo_M)$	γ_n
$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\ e^{\left(-\gamma_n^2 Fo_M\right)}$	$(2n+1)\frac{\pi}{2}$
$6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\ e^{\left(-\gamma_n^2 Fo_M\right)}$	$(n\pi)$
$4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}\ e^{\left(-\gamma_n^2 Fo_M\right)}$	tab.(5.1)

Boa semana e se cuidem!