1. Este exercício fornece um método alternativo (método de energia) ao uso do princípio do máximo para provar a unicidade de soluções para problemas de valor inicial e de fronteira para a equação da difusão.

   Considere o problema de valor inicial e de fronteira para a equação de difusão

$$\begin{aligned} &u_t - ku_{xx} = f(t,x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < l \\ &u(0,t) = g(t), \; u(l,t) = h(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

   Sejam u_1 e u_2 soluções desse problema e seja $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Mostre que

$$\int_0^l [w(x,t)]^2 \, dx = 0, \quad \forall\, t > 0. \tag{1}$$

   Uma vez que (1) seja demonstrado, $u_1 \equiv u_2$.

   (*Sugestão:* w satisfaz $w_t - kw_{xx} = 0$ e $(w_t - kw_{xx})w = (\frac{1}{2}w^2)_t + (-kw_x w)_x + kw_x^2$. Agora integre em relação a x no intervalo $[0,l]$.)

2. (princípio do máximo). Seja u a solução para o problema

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 1, \; t > 0 \\ &u(x,0) = \sin \pi x, \quad 0 \le x \le 1, \\ &u(0,t) = 2te^{1-t}, \; u(1,t) = 1 - \cos \pi t, \quad t > 0 \end{aligned}$$

   (a) Prove que u é não negativa.

   (b) Encontre uma limitação superior para os valores de $u(1/2, 1/8)$ e $u(1/2, 3)$.

3. Considere a equação de difusão $u_t = u_{xx}$ $(0,1)$, para $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$, com $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e $u(x,0) = 1 - x^2$. Observe que esta função inicial não satisfaz a condição de contorno na extremidade esquerda, mas que a solução irá satisfazê-la para todo $t > 0$.

   (a) Mostre que $u(x,t) > 0$ em todos os pontos internos $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$.

   (b) Para cada $t > 0$, seja $\mu(t) = \max\{u(x,t), 0 \le x \le 1, t > 0\}$. Mostre que $\mu(t)$ é uma função decrescente (ou seja, não crescente) de t. (Dica: seja $X(t)$ o máximo, de modo que $\mu(t) = u(X(t),t)$. Derive $\mu(t)$, supondo que $X(t)$ é diferenciável.)

   (c) Desenhe um esboço do gráfico (u versus x) em alguns instantes. (Se você tiver um software apropriado disponível, use-o.)

4. Considere a equação de difusão $u_t = u_{xx}$, para $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$, com $u(0,t) = u(1,t) = 0$ e $u(x,0) = 4x(1-x)$.

   (a) Mostre que $0 < u(x,t) < 1$ para todo $t > 0$ e $0 < x < 1$.

   (b) Mostre que $u(x,t) = u(1-x,t)$ para todo $t \ge 0$ e $0 \le x \le 1$.

   (c) Use o método da energia para mostrar que $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)^2 \, dx$ é uma função de t estritamente decrescente.

5. Seja ϕ uma função contínua tal que $|\phi(x)| \le Ce^{ax^2}$. Mostre que a fórmula para a solução da equação de difusão na reta toda com dado inicial ϕ faz sentido para $0 < t < 1/(4ak)$.