

# ACH2043

# INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

## Aula 12

### Forma normal de Chomsky

Profa. Ariane Machado Lima  
ariane.machado@usp.br

# Aulas anteriores

- Gramáticas Livres de Contexto
- Aplicações
- Derivações, árvores sintáticas, ambiguidade
- Análise sintática
  - Algoritmo CYK (necessita que a gramática esteja na forma normal de Chomsky)

# Aulas anteriores

- Gramáticas Livres de Contexto
- Aplicações
- Derivações, árvores sintáticas, ambiguidade
- Análise sintática
  - Algoritmo CYK (necessita que a gramática esteja na **forma normal de Chomsky**)

# Aula de hoje

- Prova de que TODA Gramática Livre de Contexto pode ser convertida na **forma normal de Chomsky**

→ Algoritmo de conversão

Passo necessário antes de aplicar o CYK (caso a gramática não esteja na forma normal de Chomsky)

# Forma Normal de Chomsky

Uma GLC está na Forma Normal de Chomsky se:

a) Toda regra de substituição é da forma

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

onde B,C são variáveis, a é símbolo terminal;

b) A variável inicial S não pode aparecer no lado direito de nenhuma regra;

c) Somente a variável inicial pode ter a regra

$$S \rightarrow \varepsilon .$$

# Forma Normal de Chomsky

## TEOREMA 2.9

---

Qualquer linguagem livre-do-contexto é gerada por uma gramática livre-do-contexto na forma normal de Chomsky.

# Forma Normal de Chomsky

Uma GLC está na Forma Normal de Chomsky se:

a) Toda regra de substituição é da forma

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

onde B,C são variáveis, a é símbolo terminal;

b) A variável inicial S não pode aparecer no lado direito de nenhuma regra;

c) Somente a variável inicial pode ter a regra

$$S \rightarrow \varepsilon .$$

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda;

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

A variável inicial  $S$  não pode aparecer  
no lado direito de nenhuma regra.  
O QUE FAZER?

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda; resultado da introdução da nova variável inicial é mostrada à direita

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

Cria-se uma nova variável inicial gerando a antiga!

# Forma Normal de Chomsky

- Prova: Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC:
  - a) Adicionar nova variável inicial  $S_0$  e adicionar a regra  $S_0 \rightarrow S$ ;

# Forma Normal de Chomsky

Uma GLC está na Forma Normal de Chomsky se:

a) Toda regra de substituição é da forma

$$A \rightarrow BC \quad \text{ou} \quad A \rightarrow a$$

onde B,C são variáveis, a é símbolo terminal;

b) A variável inicial S não pode aparecer no lado direito de nenhuma regra;

c) Somente a variável inicial pode ter a regra

$$S \rightarrow \varepsilon .$$

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda; resultado da introdução da nova variável inicial é mostrada à direita

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

Somente a variável inicial pode ter a regra  $S \rightarrow \epsilon$   
O QUE FAZER?



# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda; resultado da introdução da nova variável inicial é mostrada à direita

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \epsilon \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

b) Eliminação de regras  $A \rightarrow \varepsilon$

b<sub>1</sub>) Remover a regra;

b<sub>2</sub>) Para toda regra  $R \rightarrow u A v$ , **adicionar**  $R \rightarrow u v$ ;

$u$  e  $v$  pertencentes a  $(V \cup \Sigma)^*$

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda; resultado da introdução da nova variável inicial é mostrada à direita

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \epsilon \leftarrow \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$



# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

1. GLC original é mostrada à esquerda; resultado da introdução da nova variável inicial é mostrada à direita

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \epsilon \leftarrow \\ B &\rightarrow b \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \mid \epsilon \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

- Prova: Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC:

a) Adicionar nova variável inicial  $S_0$  e adicionar a regra  $S_0 \rightarrow S$ ;

b) Eliminação de regras  $A \rightarrow \varepsilon$

b<sub>1</sub>) Remover a regra;

$u, v$  e  $w$  pertencentes a  $(V \cup \Sigma)^*$

b<sub>2</sub>) Para toda regra  $R \rightarrow u A v$ , adicionar  $R \rightarrow u v$ ;

Nota: Fazer isso para cada ocorrência INDIVIDUAL de  $A$ .

Ex: se  $R \rightarrow u A v A w$ , deve-se acrescentar 3 regras:

$$R \rightarrow u v A w, \quad R \rightarrow u A v w, \quad R \rightarrow u v w$$

b<sub>3</sub>) Se tivermos a regra  $R \rightarrow A$  e se  $R \rightarrow \varepsilon$  não tiver sido previamente eliminado, adicionar  $R \rightarrow \varepsilon$

(posteriormente, essa regra também será removida se  $R \neq S_0$ )

b<sub>4</sub>) Repetir até eliminar todas as ocorrências (com exceção de quando  $R = S_0$ ).

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

Exemplo 2.10: conversão da GLC abaixo para a FNC

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

Vamos começar a resolver as produções unitárias... (que possuem exatamente um símbolo não-terminal do lado direito)

**O que fazer?**

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

- Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC (cont.):

c) Remoção de regras unitárias  $A \rightarrow B$ :

c1) Remover a regra;  $u$  pertencente a  $(V \cup \Sigma)^*$

c2) Para toda regra  $B \rightarrow u$ , acrescentamos  $A \rightarrow u$ , a menos que essa seja uma regra unitária já removida.

c3) Repetir para todas as regras unitárias.

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias:  $S \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \quad S$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

1

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias:  $S \rightarrow S$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \quad \text{\textcircled{S}} \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias:  $S_0 \rightarrow S$

$$S_0 \rightarrow S$$

$$S \rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS$$

$$A \rightarrow B \mid S$$

$$B \rightarrow b$$

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias:  $S_0 \rightarrow S$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias:  $S_0 \rightarrow S$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

3b. Remoção de regras unitárias  $A \rightarrow B$  (esq) e  $A \rightarrow S$  (dir)

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias  $S \rightarrow S$  (esq) e  $S_0 \rightarrow S$  (dir)

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

3b. Remoção de regras unitárias  $A \rightarrow B$  (esq) e  $A \rightarrow S$  (dir)

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \mid b \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

3a. Remoção de regras unitárias  $S \rightarrow S$  (esq) e  $S_0 \rightarrow S$  (dir)

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

3b. Remoção de regras unitárias  $A \rightarrow B$  (esq) e  $A \rightarrow S$  (dir)

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow B \mid S \mid b \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow b \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \textcircled{S} b \mid \mathbf{ASA} \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

Se  $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_k$ , sendo que  $u_i$  é variável ou símbolo terminal,

Se  $k = 2 \dots$

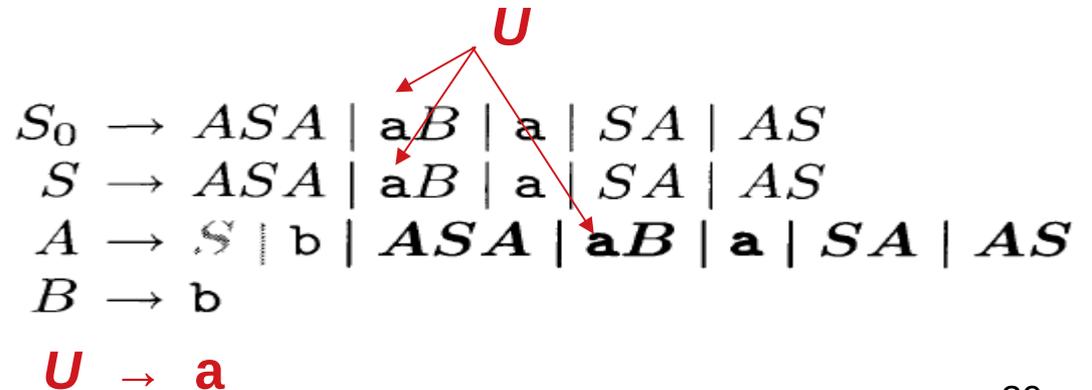
$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \textcircled{S} b \mid \mathbf{ASA} \mid \mathbf{aB} \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{SA} \mid \mathbf{AS} \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

Se  $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_k$ , sendo que  $u_i$  é variável ou símbolo terminal,

Se  $k = 2 \dots$



# Forma Normal de Chomsky

- Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC (cont.):

d) Converter todas as regras remanescentes para a forma apropriada  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$ :

d1) Se  $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_k$ , onde  $k \geq 3$

...

d2) Se  $k=2$ , então substituir qualquer terminal  $u_i$  na(s) regra(s) precedente(s) por uma nova variável  $U_i$ , e adicionar a regra  $U_i \rightarrow u_i$ .

# Forma Normal de Chomsky

Toda regra de substituição é da forma  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$  ?

Se  $A \rightarrow u_1 u_2 \dots u_k$ , sendo que  $u_i$  é variável ou símbolo terminal,

Se  $k \geq 3$ ...

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \underline{S} \mid b \mid \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow b \\ U &\rightarrow a \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

- Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC (cont.):

d) Converter todas as regras remanescentes para a forma apropriada  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$ :

d1) Se  $A \rightarrow u_1u_2 \dots u_k$ , onde  $k \geq 3$  e  $u_i$  é variável ou símbolo terminal, então substituir esta regra por:

$$A \rightarrow u_1A_1, A_1 \rightarrow u_2A_2, A_2 \rightarrow u_3A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1}u_k.$$

d2) Se  $k=2$ , então substituir qualquer terminal  $u_i$  na(s) regra(s) precedente(s) por uma nova variável  $U_i$ , e adicionar a regra  $U_i \rightarrow u_i$ .

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

4. Conversão das regras remanescentes para a forma apropriada acrescentando variáveis e regras adicionais

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \cancel{S} \mid b \mid \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow b \\ U &\rightarrow a \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

## Exemplo 2.10 (cont)

4. Conversão das regras remanescentes para a forma apropriada acrescentando variáveis e regras adicionais

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow \cancel{S} \mid b \mid \underline{ASA} \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ B &\rightarrow b \\ U &\rightarrow a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ S &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ A &\rightarrow b \mid AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ A_1 &\rightarrow SA \\ U &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

# Forma Normal de Chomsky

- Prova: Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC:

a) Adicionar nova variável inicial  $S_0$  e adicionar a regra  $S_0 \rightarrow S$ ;

b) Eliminação de regras  $A \rightarrow \varepsilon$

b<sub>1</sub>) Remover a regra;

b<sub>2</sub>) Para toda regra  $R \rightarrow u A v$ , adicionar  $R \rightarrow u v$ ;

Nota: Fazer isso para cada ocorrência INDIVIDUAL de  $A$ .

Ex: se  $R \rightarrow u A v A w$ , deve-se acrescentar 3 regras:

$$R \rightarrow u v A w, \quad R \rightarrow u A v w, \quad R \rightarrow u v w$$

b<sub>3</sub>) Se tivermos a regra  $R \rightarrow A$  e se  $R \rightarrow \varepsilon$  não tiver sido previamente eliminado, adicionar  $R \rightarrow \varepsilon$

(posteriormente, essa regra também será removida se  $R \neq S_0$ )

b<sub>4</sub>) Repetir até eliminar todas as ocorrências (com exceção de quando  $R = S_0$ ).

# Forma Normal de Chomsky

- Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC (cont.):
  - c) Remoção de regras unitárias  $A \rightarrow B$ :
    - c1) Remover a regra;
    - c2) Para toda regra  $B \rightarrow u$ , acrescentamos  $A \rightarrow u$ , a menos que essa seja uma regra unitária já removida.
    - c3) Repetir para todas as regras unitárias.

# Forma Normal de Chomsky

- Conversão de uma GLC  $G = (V, \Sigma, R, S)$  para FNC (cont.):

d) Converter todas as regras remanescentes para a forma apropriada  $A \rightarrow BC$  ou  $A \rightarrow a$ :

d1) Se  $A \rightarrow u_1u_2 \dots u_k$ , onde  $k \geq 3$  e  $u_i$  é variável ou símbolo terminal, então substituir esta regra por:

$$A \rightarrow u_1A_1, A_1 \rightarrow u_2A_2, A_2 \rightarrow u_3A_3, \dots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1}u_k.$$

d2) Se  $k=2$ , então substituir qualquer terminal  $u_i$  na(s) regra(s) precedente(s) por uma nova variável  $U_i$ , e adicionar a regra  $U_i \rightarrow u_i$ .

# Exercício

**2.14** Converta a seguinte GLC numa GLC equivalente na forma normal de Chomsky, usando o procedimento dado no Teorema 2.9.

$$\begin{aligned} A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\ B &\rightarrow 00 \mid \epsilon \end{aligned}$$

# Exercícios do Sipser

Temas das aulas anteriores: Ex 2.1 a 2.4, 2.6, 2.8, 2.9, 2.13, 2.15, 2.16, 2.17

Sobre a aula de hoje: 2.14, mas podem também converter para a FNC as gramáticas dos exercícios 2.1, 2.3, 2.13