MAP2313 - Tópicos de Matemática Aplicada

1º Semestre de 2013 - Tarefa

UMA APLICAÇÃO DA FFT

Esta tarefa é um estudo dirigido sobre um método numérico eficiente para se aproximar soluções do problema de Dirichlet no quadrado unitário. Você não precisa implementar o método, mas deverá resolver os exercícios propostos.

O problema de Dichlet para a equação de Laplace

Considere a equação de Laplace no quadrado unitário

$$-\Delta u = 0, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$$

com as condições de contorno

$$u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,1) = f_2(x), \quad u(0,y) = g_1(y), \quad u(1,y) = g_2(y),$$

onde o sinal negativo é conveniente para a discussão a seguir e as funções f_1, f_2, g_1 e g_2 são dados do problema.

Discretizando-se o laplaciano na malha $(x_i, y_j) = (\frac{i}{N+1}, \frac{j}{N+1})$, onde N é um inteiro positivo, obtemos, conforme visto em aula, as equações abaixo para as aproximações u_{ij} dos valores $u(x_i, y_j)$ da solução nos pontos da malha:

$$-u_{i-1,j} + 2u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} + 2u_{ij} - u_{i,j+1} = 0, \quad 1 \le i,j \le N$$

com $u_{i0} = f_1(x_i)$, $u_{i,N+1} = f_2(x_i)$, $u_{0j} = g_1(y_j)$ e $u_{N+1,j} = g_2(y_j)$.

O sistema linear e a sua resolução

Passando-se as condições de contorno para o lado direito, as equações acima definem um sistema linear para as incógnitas $U_{ij} = u_{ij}$, $1 \le i,j \le N$, o qual pode expresso como

$$T_N U + U T_N = F \tag{1}$$

onde T_N é a matriz $N \times N$ *tridiagonal* definida como

$$T_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 1 Mostre que o sistema linear é dado por (1) e determine os elementos F_{ij}, $1 \le i,j \le N$ do lado direito.

A matriz T_N tem uma estrutura muito especial, sendo possível determinar explicitamente seus autovetores e autovalores.

Exercício 2 Mostre que para cada k, $1 \leq k \leq N$, o vetor $v^{(k)}$ cujas componentes são

$$v_j^{(k)} = \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right), \quad 1 \leq j \leq N,$$

é um autovetor de T_N com autovalor

$$\lambda_k = 2\left[1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)\right] = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{k}{N+1}\frac{\pi}{2}\right).$$

Logo, se V for a matriz $N \times N$ cujos elementos são $V_{jk} = v_j^{(k)}$, $1 \leq j, k \leq N$, então $V^{-1}T_N V = D$ onde

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$$

é a matriz diagonal cujo elemento diagonal D_{kk} é λ_k. Multiplicando-se a equação (1) por V^{-1} à esquerda e por V à direita obtemos

$$D\bar{U} + \bar{U}D = \bar{F}, \text{ onde } \bar{U} = V^{-1}UV \text{ e } \bar{F} = V^{-1}FV. \tag{2}$$

que pode ser facilmente resolvida para $\bar{U}$ em termos de $\bar{F}$.

Exercício 3 Deduza a equação (2) e mostre que a solução é $\bar{U}_{jk} = \bar{F}_{jk}/(\lambda_j + \lambda_k)$.

Uma vez calculada $\bar{U}$, a solução de (1) é obtida por $U = V\bar{U}V^{-1}$.

A inversa de V

Os vetores coluna de V são autovetores de T_N associados a autovalores distintos. Como T_N é simétrica, eles são ortogonais em relação ao produto escalar do R^N e portanto V^TV é uma matriz diagonal. Note que V é simétrica de onde segue que V^2 é uma matriz diagonal. Melhor ainda, todos os elementos da diagonal desta matriz são iguais!

Exercício 4 Mostre que

$$\sum_{j=1}^{N}(v_j^{(k)})^2 = \sum_{j=1}^{N}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)\right]^2 = \frac{N+1}{2}$$

e portanto

$$V^{-1} = \frac{2}{N+1}V.$$

A resolução de (1) pode então ser feita pelas seguintes etapas:

(i) $\bar{F} = \frac{2}{N+1}VFV$

(ii) $\bar{U}_{jk} = \frac{1}{\lambda_j + \lambda_k}\bar{F}_{jk}$

(iii) $U = \frac{2}{N+1}V\bar{U}V$

E estas contas podem ser realizadas eficientemente usando a FFT, como veremos a seguir.

A transformada seno discreta e a FFT

Dados N números reais $(y_1, \ldots, y_N)$, a sua transformada seno discreta é o conjunto de N números reais definidos por

$$\hat{y}_k = \sum_{j=1}^{N} y_j \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right) = \sum_{j=1}^{N} y_j v_k^{(j)} = \sum_{j=1}^{N} V_{kj} y_j, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Se denotarmos por y e $\hat{y}$ os respectivos vetores do R^N, temos

$$\hat{y} = Vy.$$

Logo, se C for uma matriz $N \times N$, VC é a matriz cujas colunas são as transformadas seno discretas das respectivas colunas de C. Como $CV = (VC^T)^T$, produtos da forma VCV podem ser calculados a partir da transformada seno discreta. E a transformada seno discreta pode ser calculada a partir da transformada de Fourier discreta.

Exercício 5 Mostre que a transformada seno discreta de $y \in R^N$ é igual à parte imaginária dos N primeiros números da transformada de Fourier discreta do vetor de tamanho $2N$

$$yy = (0, y_1, \ldots, y_N, 0, \ldots, 0).$$

Portanto, se N for uma potência de 2, o sistema linear (1) de N^2 equações e N^2 incógnitas pode ser resolvido com $O(N^2 \log_2(N^2))$ operações aritméticas usando-se a FFT.