UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE DINÂMICA

SEM 0232 – Modelos Dinâmicos

Modelagem de Sistemas Elétricos
Teoria

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

Objetivos

Objetivo da presente aula é apresentar elementos teóricos para a modelagem de Sistemas Elétricos no contexto da Dinâmica de Sistemas. Os elementos de sistemas elétricos dividem-se em dois grupos: (i) passivos (***p***) e ; (ii) ativos (***a***) :

- Resistência elétrica (***p***)
- Capacitância elétrica (***p***)
- Indutância Elétrica (***p***)
- O amplificador Operacional (***a***)

Bibliografia:

1 Felício, L. C., Modelagem da Dinâmica de Sistemas e Estudo da Resposta, Rima, 2010

2 Doebelin, E. O., System Dynamics, Modeling, Analysis, Simulation, Design, M. Dekker, 1998

Introdução

Tal como no caso de sistemas mecânicos, onde procuramos estabelecer relações entre *força/movimento*, no caso de elementos e sistemas elétricos utilizaremos as grandezas ***tensão/corrente elétrica***.

HIPÓTESE FUNDAMENTAL

Para usarmos o conceito de parâmetros concentrados assumiremos que a *dimensão geométrica* do elemento a ser considerado (por exemplo, um resistor) é *menor* do que o *comprimento de onda* associado à propagação do sinal no elemento.

Três elementos passivos:

- Resistência elétrica: ***dissipação*** de energia (efeito Joule)
- Capacitância elétrica: ***armazenamento*** de energia
- Indutância elétrica: "***inércia***" de um sistema elétrico

Um elemento "ativo":

- Amplificador Operacional

PUROS E IDEAIS

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves

O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: dissipação de energia elétrica (calor)

O elemento resistência elétrica *puro* e *ideal* obedece a primeira lei de Ohm

$$\boxed{e = Ri}$$

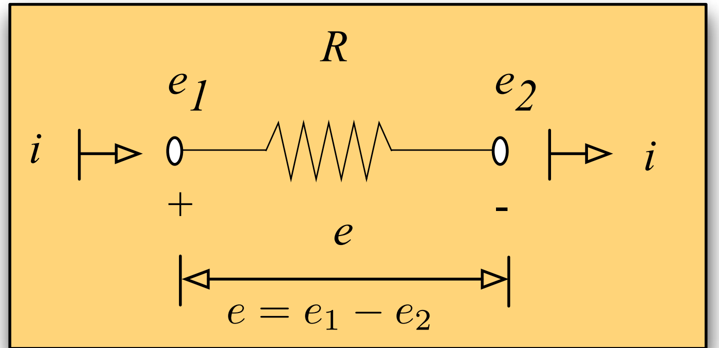
2ª Lei Ohm:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

onde:

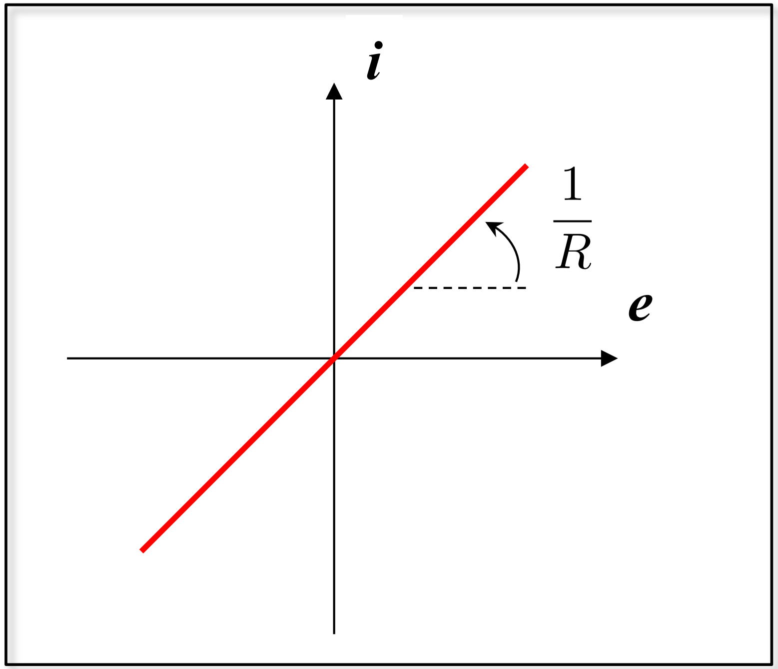
- ***e*** é a tensão elétrica nos terminais do elemento (V)
- ***i*** é a corrente elétrica que percorre o elemento (A)
- ***R*** é o valor da resistência elétrica (Ω)

Sua representação:



O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Sua curva característica é mostrada abaixo



Para o ***elemento resistência ideal*** (linear), o valor da resistência é dado pela relação:

$$R = \frac{e}{i} \qquad G = \frac{i}{e} = \frac{1}{R}$$

G → *condutância*

Aplicando a T. L. à equação do elemento temos

$$\mathcal{L}\,(e(t)) = \mathcal{L}(Ri(t)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(s) = RI(s)}$$

O ELEMENTO RESISTÊNCIA ELÉTRICA

Diagrama de blocos e F.T. para o elemento resistência pura e ideal

Resistência elétrica: Elemento de *ordem zero* (ganho constante !)

O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: Armazenamento de energia elétrica

A noção básica de um capacitor *puro* e *ideal* prevê que dois condutores separados por um meio isolante (dielétrico) formam um capacitor e sua capacitância elétrica C é definida por

$$\boxed{C = \frac{q}{e}} \quad \text{(farads)}$$

onde:

- ***q*** é a carga do capacitor (C)
- ***e*** é a tensão aplicada a seus terminais (V)

Sua representação:

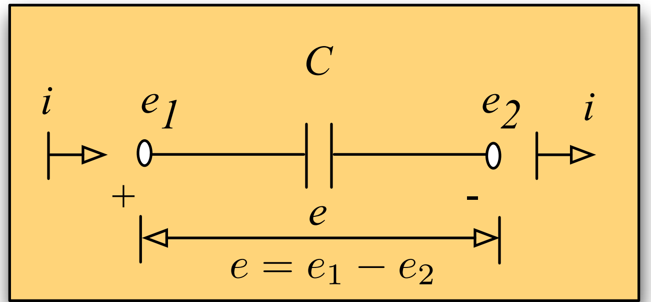
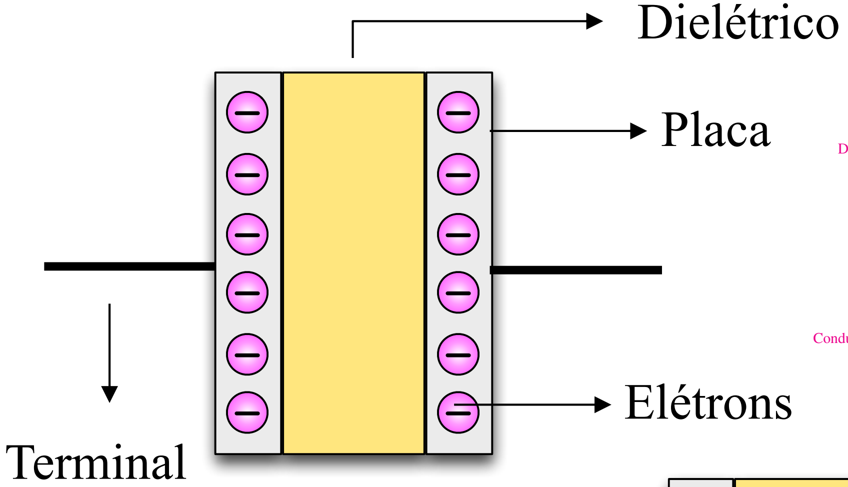
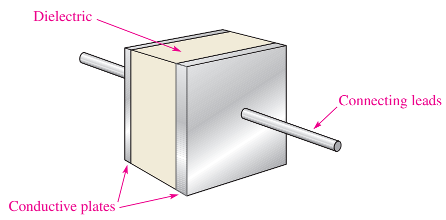
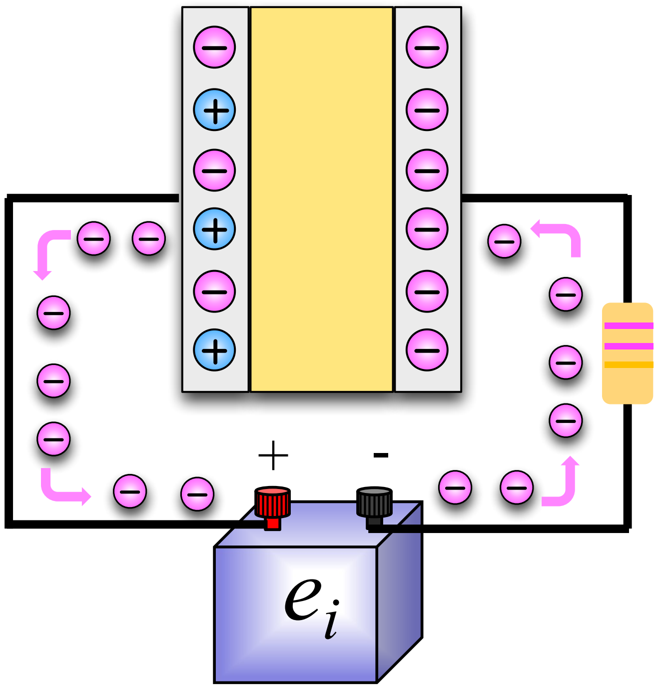


Ilustração do processo de carregamento de um capacitor de placas planas

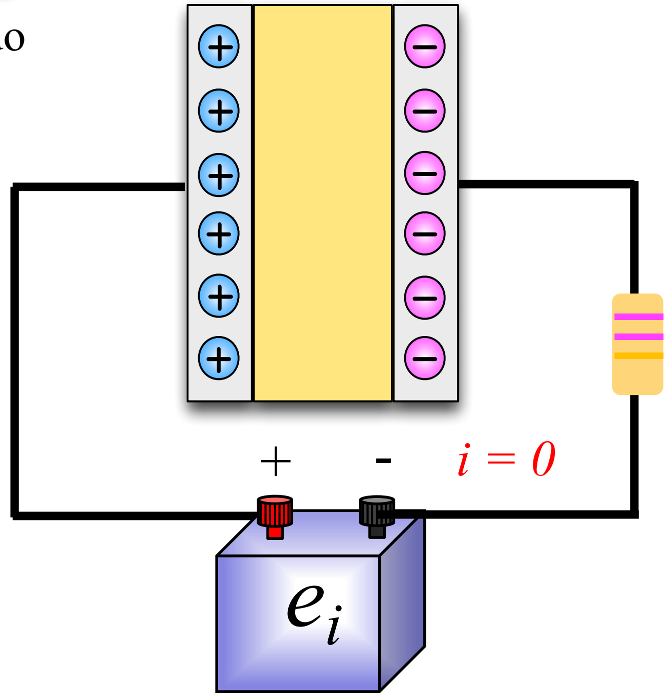


(a) Descarregado

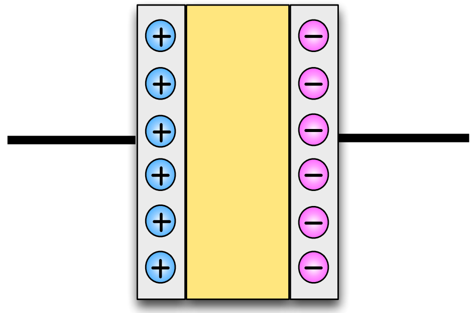




(b) Conectado à fonte de tensão



(c) Carregado

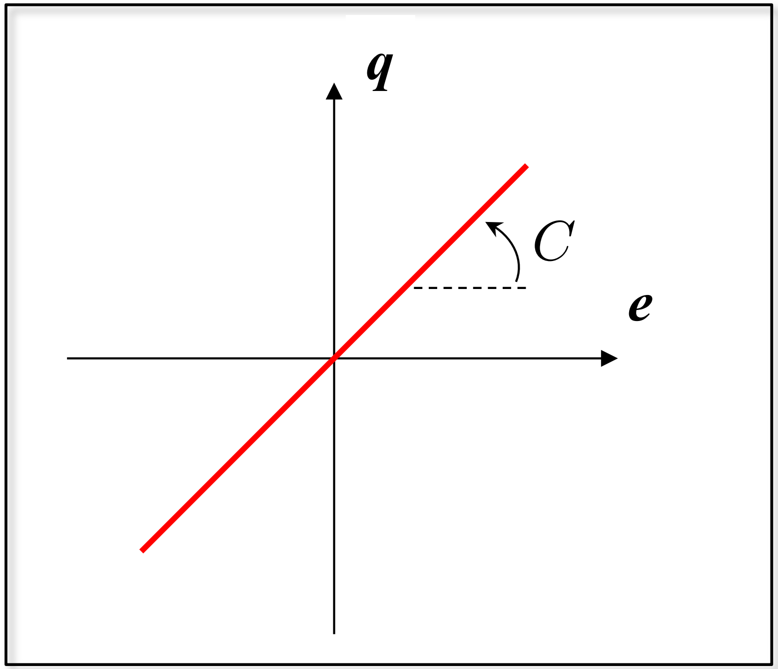


(d) Capacitor puro retém carga
quando desconectado da fonte

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Sua curva característica é mostrada abaixo



Para a relação tensão/corrente temos:

$$e = \frac{1}{C} q \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

Combinando estas duas temos:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{i}{C} \quad \Rightarrow \quad de = \frac{1}{C} i dt$$

Continuando, escrevemos:

$$\int_{e_0}^{e} de = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i \; dt$$

O ELEMENTO CAPACITÂNCIA ELÉTRICA

Integrando esta última expressão:

Capacitor inicialmente descarregado
$e_0 = 0$ em $t_0 = 0$

$$e - e_0 = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i(t)\ dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{e(t) = \frac{1}{C} \int_{0}^{t} i(t)\ dt}$$

Aplicando a T. L. à esta última expressão vem:

$$\mathcal{L}(e(t)) = \frac{1}{C}\, \mathcal{L}\left(\int_{t_0}^{t} i(t)\ dt \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(s) = \frac{1}{Cs} I(s)}$$

Diagrama de blocos e F.T. para o elemento capacitância puro e ideal

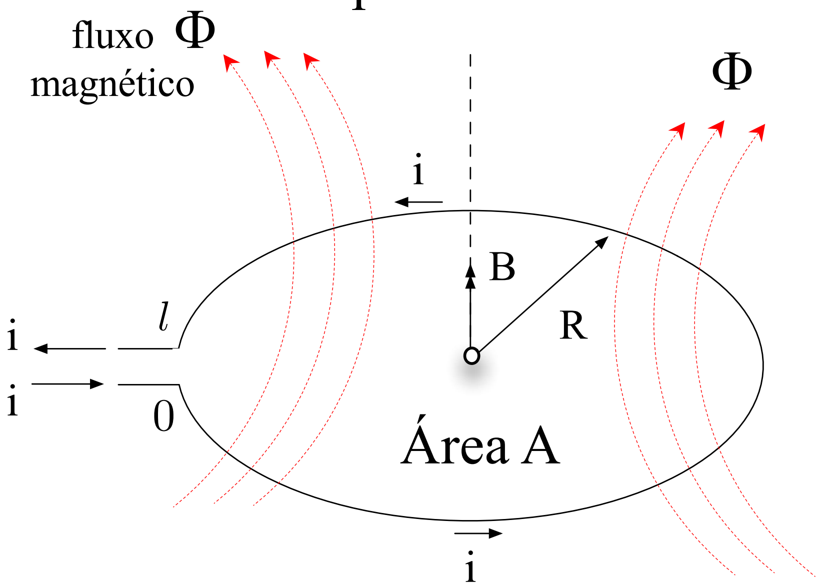
Capacitância elétrica: Elemento de *ordem 1* (integrador ou derivador !)

O ELEMENTO INDUTÂNCIA ELÉTRICA

Efeito físico: campo magnético gerado por corrente através de condutor

Premissa: Uma corrente elétrica (movimento de cargas elétricas) em um condutor sempre cria um campo magnético associado. Se este campo magnético varia com o tempo, uma força eletromotriz (tensão) é induzida no circuito

Espira Circular



Campo Magnético:

μ – permeabilidade magnética do meio

$$B(t) = \mu \frac{i(t)}{l}$$

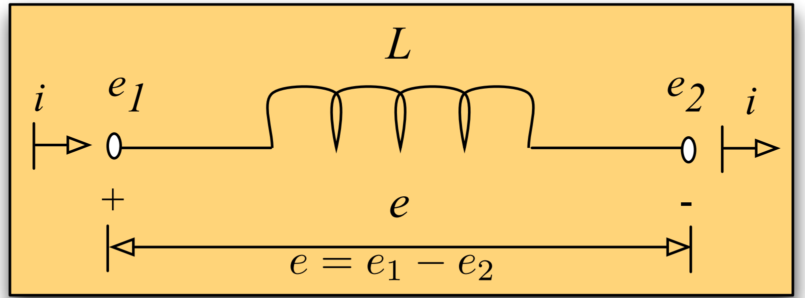
$$\Phi = AB(t) = \frac{A\mu}{l}\, i(t) = L\; i(t)$$

Lei de Maxwell: $$e(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

Logo: $$e(t) = \frac{d(Li(t))}{dt}$$ ⇨ $$\boxed{e(t) = L\frac{di}{dt}}$$ indutor puro e ideal

O ELEMENTO INDUTÂNCIA ELÉTRICA

Representação do elemento:

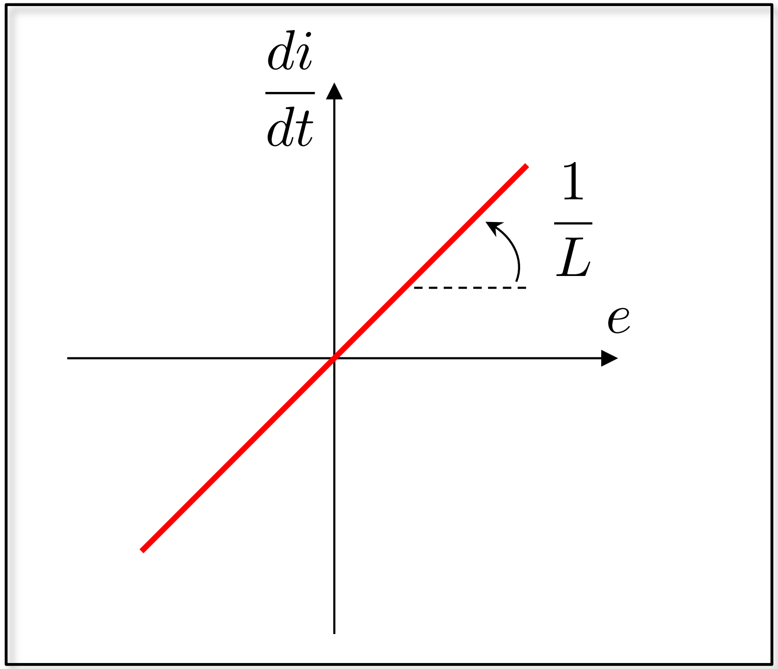


$$e(t) = L\frac{di}{dt}$$

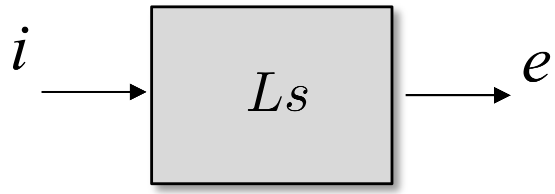
$$\downarrow \mathcal{L}$$

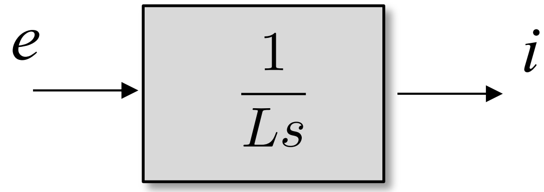
$$E(s) = Ls\ I(s)$$

Curva:



F.T.:





Indutância elétrica: Elemento de *ordem 1* (integrador ou derivador !)

ANALOGIAS ELETROMECÂNICAS

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Impedância Elétrica:} \quad z(t) = \dfrac{e(t)}{i(t)} & \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} & Z(s) = \dfrac{E(s)}{I(s)} \\[2em] \text{Impedância Mecânica:} \quad z(t) = \dfrac{f(t)}{v(t)} & \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} & Z(s) = \dfrac{F(s)}{V(s)}\end{array}\right\}$$

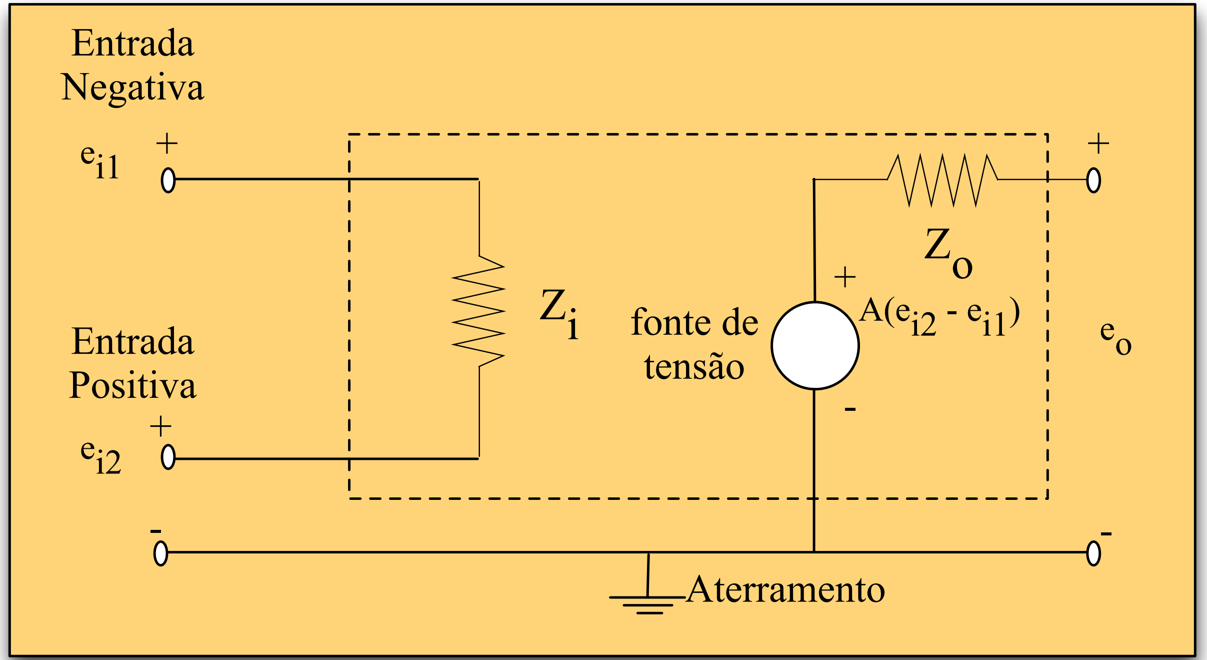
$$\boxed{\begin{array}{c} e(t) \longleftrightarrow f(t) \\ i(t) \longleftrightarrow v(t) \\[1em] E(s) \longleftrightarrow F(s) \\ I(s) \longleftrightarrow V(s) \end{array}}$$

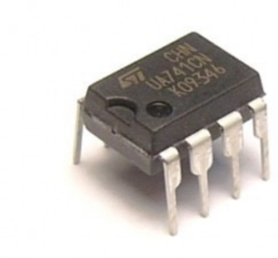
TABELA DE ANALOGIAS

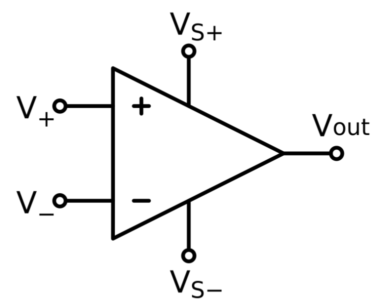
MECÂNICO		ELÉTRICO	
ELEMENTO	IMPEDÂNCIA	ELEMENTO	IMPEDÂNCIA
MASSA	Ms	INDUTÂNCIA	Ls
MOLA	$1/Ks$	CAPACITÂNCIA	$1/Cs$
AMORTECEDOR	B	RESISTÊNCIA	R

O AMPLIFICADOR OPERACIONAL (amp-op)

Embora muito útil em aplicações práticas o amp-op não é um elemento de sistemas elétricos conforme vimos nos casos anteriores, pois é construído a partir de outros elementos (resistores, transistores). Um modelo já simplificado do amp-op:

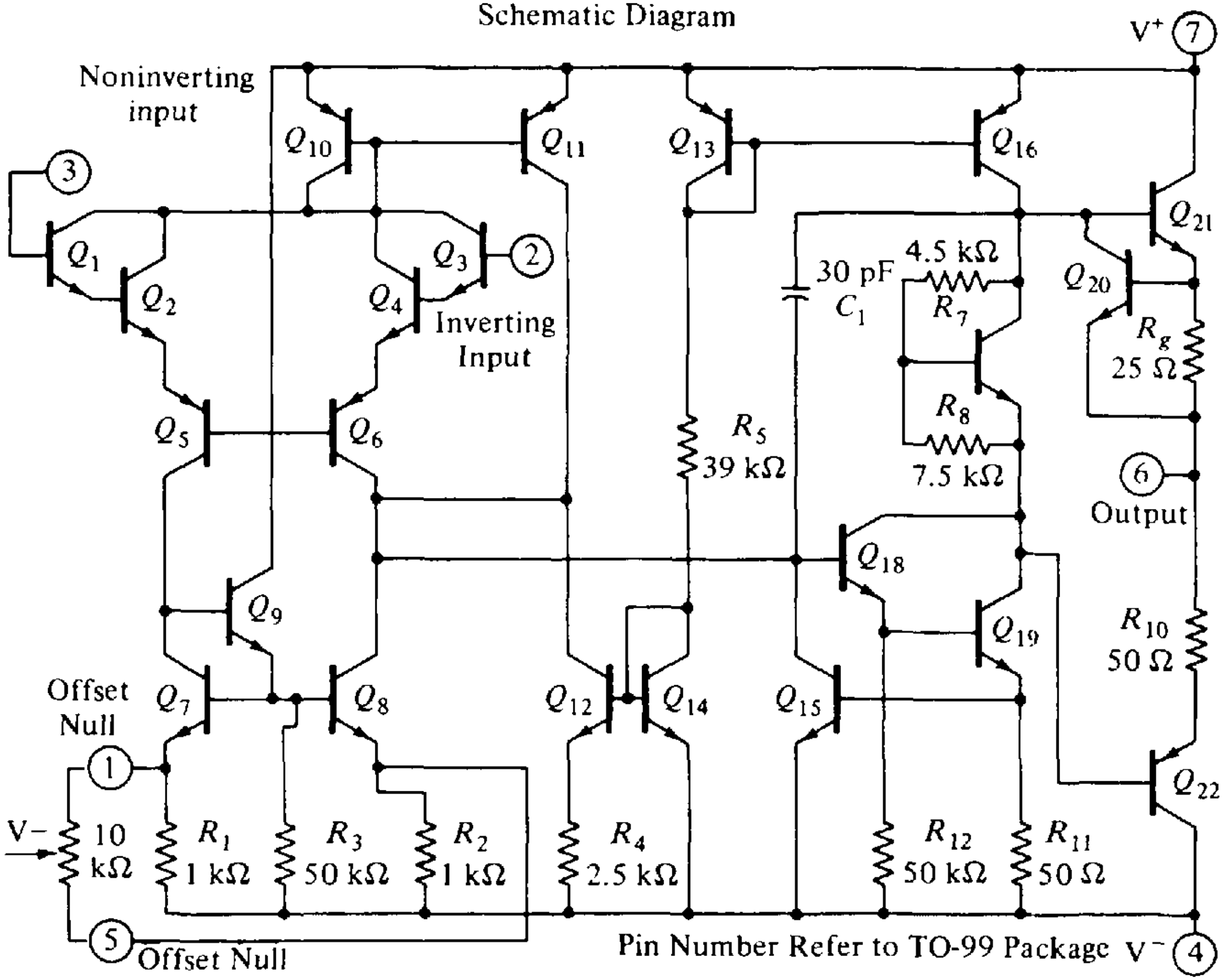






O modelo acima ainda permite algumas simplificações, a seguir

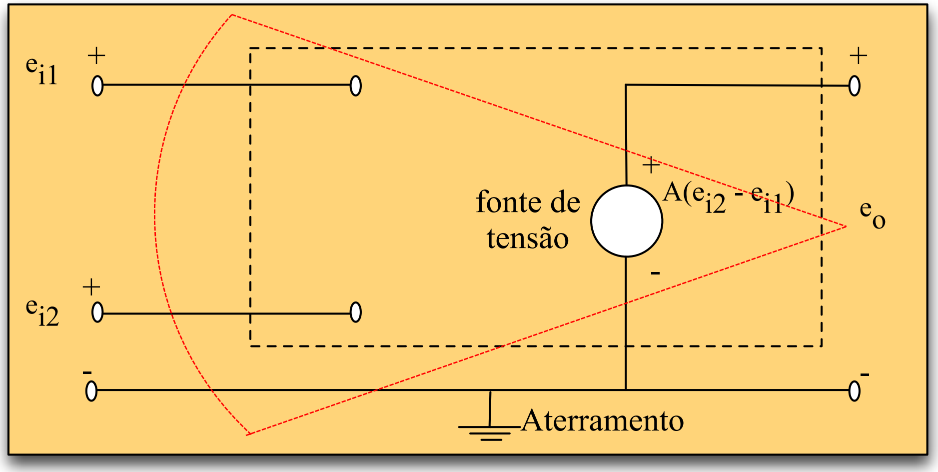
Modelo "real" de um amp-op de circuito integrado[1]

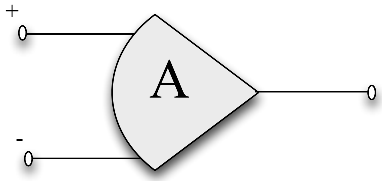


[1] Doebelin, E. O., Modeling, Analysis, Simulation, Design, M.D., 1998

Cont. ...

- Ganho A infinito ou muito grande
- Impedância de entrada Z_i infinita (o amp-op não tira energia do circuito externo)
- Impedância de saída Z_o nula
- Resposta instantânea no tempo
- Tensão de saída em uma faixa de projeto pré-estabelecida



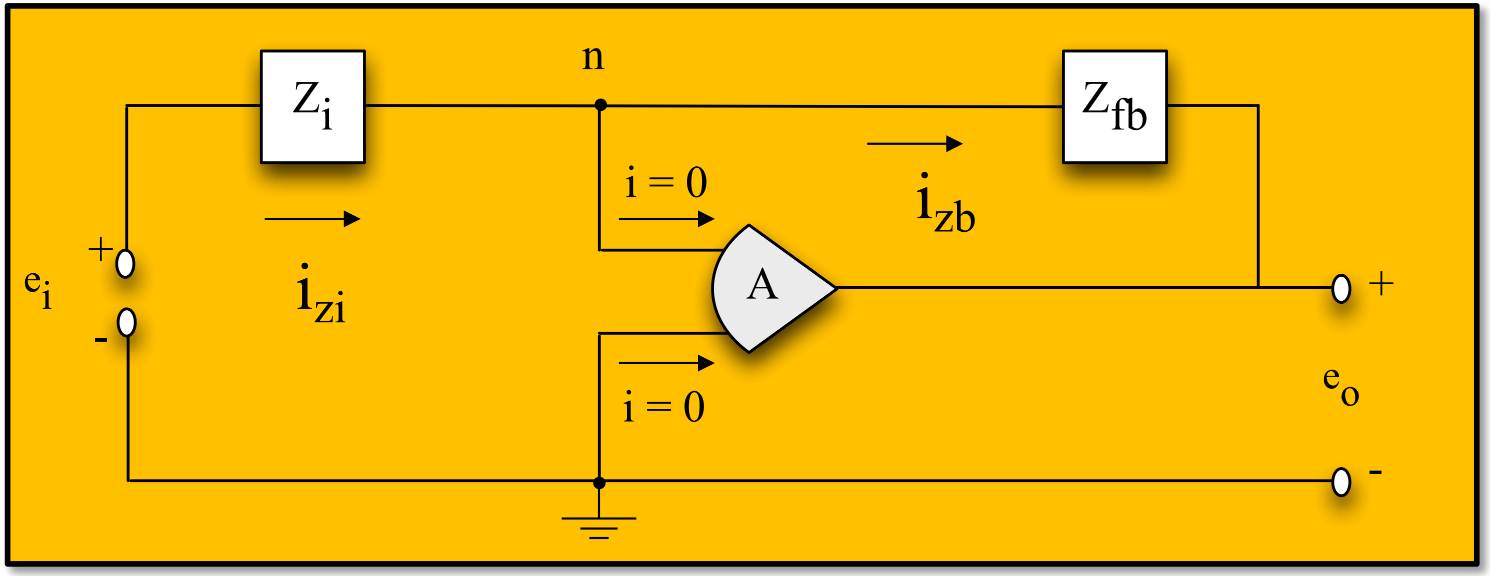


No contexto de modelagem nos interessa avaliar como ele se comporta em um circuito elétrico. Então …

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

Cont. ...

Seja o circuito abaixo composto da associação de elementos elétricos genéricos e, dentre eles um amp-op

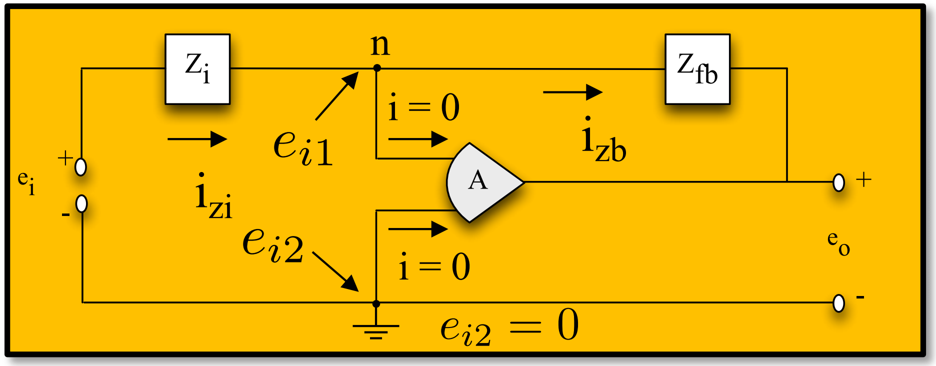


Onde:

- Z_i é a impedância de entrada no circuito
- Z_{fb} é chamada de impedância de feedback (retroalimentação)

Cont. ...

Então, como $i = 0$: $\quad i_{Zi} = i_{Zfb}$



$$z_i = \frac{e_i - e_{i1}}{i_{zi}} \qquad z_{fb} = \frac{e_{i1} - e_o}{i_{zfb}}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_i(s) &= \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{I_{zi}(s)} \Longrightarrow I_{zi}(s) = \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{Z_i(s)} \\ Z_{fb}(s) &= \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{I_{zfb}(s)} \Longrightarrow I_{zfb}(s) = \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{Z_{fb}(s)} \end{aligned}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{E_i(s) - E_{i1}(s)}{Z_i(s)} = \frac{E_{i1}(s) - E_o(s)}{Z_{fb}(s)}$$

Cont. ...

E, desta última expressão podemos determinar a F.T. para o circuito com o amp-op:

$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_{fb}(s)}{Z_i(s)}}$$

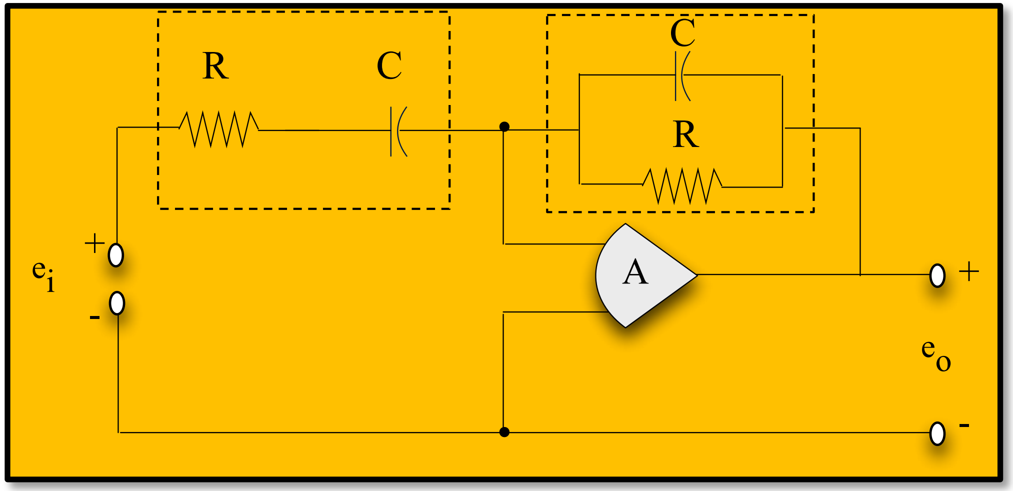
$$Z_R = \frac{E(s)}{I(s)} = R$$

$$Z_C = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

Vejamos um exemplo:

$$Z_i(s) = R + \frac{1}{Cs} \qquad Z_{fb}(s) = \frac{R(\frac{1}{Cs})}{R + \frac{1}{Cs}}$$

$\Uparrow \qquad \Uparrow$



$$\boxed{\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1}}$$

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP

FIM

Bom Estudo !

Prof. Paulo S. Varoto
Prof. Luiz A. M. Gonçalves
EESC · USP