Lista de Exercícios aulas 4 e 5 - solução

Manoel Galdino

Exercício 4.1

Considere o seguinte jogo em um cassino. Você joga um dado de seis faces. Se sair 1, você recebe 25 reais. Se sair 2 você paga 5 reais ao cassino. Se o dado for 3, nada acontece. Se sair um 4 ou 5, você paga 10 ao cassino. Se sair um 6, você paga 15

Calcule o valor esperado do jogo. Você jogaria o jogo? Explique.

Resposta: Podemos calcular o Valor Esperado como:

$$1/6 * 25 + 1/6 * (-5) + 1/6 * 0 + 1/6 * (-10) + 1/6 * (-10) + 1/6 * (-15) =$$
$$(25 - 5 - 20 - 15)/6 =$$
$$-15/6 =$$
$$-2,5$$

Sendo assim, eu não jogaria o jogo, pois o valor esperado para o jogo é um valor negativo, em que eu perderia 2,5 reais.

Exercício 4.2

Considere o seguinte jogo. Em uma baralho comum de 52 cartas, com quatro naipes (copas, ouro, espada e paus), você escolhe uma carta ao acaso e ganha 10 reais se for de copas. Se tirar um Valete, Dama ou Rei que não seja de copas, você ganha 8. Qualquer outra carta, perde 4. Calcule o valor esperado do jogo.

Resposta: 13 das 52 cartas de um baralho são copas. Excluindo o naipe de copas, Valete, Dama e Rei de outros naipes são 9 cartas. Restam no baralho 30 cartas. Podemos calcular o valor esperado como:

$$13/52 * 10 + 9/52 * 8 + 30/52 * (-4) =$$
$$130 + 72 - 120/52 =$$
$$82/52 \simeq 1,6$$

Exercício 4.3

Suponha que a chance de seu carro ser roubado é de uma em mil. Seu carro vale R$50.000,00. Uma companhia de seguro decide te cobrar um prêmio de 100 reais para segurar seu carro contra roubo (e apenas contra roubo). Você faz o seguro, ou não? Explique. Você consegue imaginar uma probabilidade de roubo do seu carro que faria você mudar de ideia quanto ao seguro? Se sim, qual seria essa probabilidade?

Resposta: Há duas abordagens para responder esta pergunta, uma envolve pensar na variação patrimonial e a outra no patrimônio como um todo

Para a variação patrimonial

Se não for feito o seguro:

$$1/1.000 * (-50.000) + (1 - 1/1.000) * 0 = -50$$

Se for feito o seguro:

$$-100 + 0 * 1/1000 + 0 * (1 - 1/1000) = -100$$

Para o patrimônio total

Se não for feito o seguro:

$$0 * 1/1000 + 50.000 * (1 - 1/1000) =$$

$$50.000 * 999/1000 =$$

$$50 * 999 = 49.950$$

Se for feito o seguro:

$$-100 + 50.000 * 1/1000 + 50.000 * (1 - 1/1000) =$$

$$-100 + 50.000 * (1/1000 + 999/1/1000) =$$

$$-100 + 50.000 = 49.900$$

Em ambos os casos, com base nas probabilidade dadas, é mais vantajoso não fazer o seguro do que fazê-lo. No entanto, uma probabilidade de roubo diferente poderia me tornar indiferente entre fazer ou não o seguro se o valor for igual para as duas contas. Vamos calcular esta probabilidade utilizando a variação patrimonial.

$$p * (-50.000) + (1 - p) * 0 = -100 + 0 * p + 0 * (1 - p)$$

$$50.000p = 100$$

$$p = 1/500$$

Exercício 4.4

Suponha que um indivíduo enfrenta uma loteria L que oferece uma chance de 50% de ganhar 100 reais e 50% de ganhar 0. Se a função de utilidade do indivíduo para dinheiro é u(x)=x, qual é a utilidade esperada de participar na loteria L? E qual o valor esperado da loteria? Nesse caso, o valor esperado e a utilidade esperado são iguais? Como você interpreta isso?

Resposta: Calculamos o Valor Esperado como:

$$1/2 * 100 + 1/2 * 0 = 50$$

Com a função do Utilidade definida como $u(x) = x$, temos para o prêmio 0 a utilidade de 0 e para o prêmio de 100 a utilidade de 100. Desta forma, podemos calcular a função de utilidade esperada como:

$$1/2 * 100 + 1/2 * 0 = 50$$

Ainda que representando conceitos diferentes (o quanto de dinheiro é ganho no caso do valor esperado e a preferência do jogador para os resultados obtidos), os valores numéricos são os mesmos,ocorrendo a linearidade tanto na utilidade como no valor esperado do dinheiro ganho pelo jogador nesta loteria, não existindo diferença entre entre qual método utilizar para o cálculo. A utilização desta função $u(x) = x$ é simples para se realizar o cálculo e costuma descrever o comportamento de jogadores indiferentes ao risco, mas não permite que sejam evitados problemas como os previstos por Bernoulli no paradoxo de S. Petersburgo.

Exercício 4.5

Uma jogadora, Alice, tem a escolha entre um emprego seguro que paga uma renda certa de $50.000 por ano ou um empreendimento que pode render $100.000 anual com probabilidade de 50% ou $10.000 com probabilidade de 50%.

1. Calcule o valor esperado de ambas as opções.
2. calcule a utilidade esperadas de ambas as opções se a função de utilidade for $u(x) = x$, $u(x) = \sqrt{x}$ e $u(x) = log(x)$, em que x é a renda da jogadora.
3. Qual opção Alice deve escolher, com base na utilidade esperada para cada função de utilidade.

Resposta: 1) Valor esperado para manter emprego seguro (E1):

$$50.000 * 1 = 50.000$$

Valor esperado para o empreendimento (E2):

$$100.000 * 1/2 + 10.000 * 1/2 =$$

$$50.000 + 5.000 = 55.000$$

2) Para $u(x) = x$

$$E1 = 50.000$$

$$E2 = 55.000$$

Para $u(x) = \sqrt{x}$

$$E1 = \sqrt{50.000} * 1 \simeq 223 E2 = \sqrt{100.000} * 1/2 + \sqrt{10.000} * 1/2$$

$$E2 \simeq 316 * 1/2 + 100 * 1/2$$

$$E2 \simeq 158 + 50$$

$$E2 \simeq 208$$

Para $u(x) = logx$ (base 10)

$$E1 = \log 50.000 * 1 \simeq 4,7$$

$$E2 = log 100.000 * 1/2 + log 10.000 * 1/2$$

$$E2 = 5 * 1/2 + 4 + 1/2$$

$$E2 = 4,5$$

3) Observa-se que a função de utilidade afeta significamente como deve Alice se comportar. Para $u(x) = x$, Alice deve sair do emprego e tentar empreender, mas nos demais cenários é melhor alice permanecer no emprego seguro.

Exercício 4.6

Dois países, A e B, estão em uma disputa sobre a posse de um território que pode levar à guerra. O país A estima que tem 60% de chance de ganhar a guerra, que resultaria em controle total do território e uma utilidade de 200, já perder a guerra geraria uma utilidade de -100. Para o país B, a chance de ganhar a guerra é 40%, com os mesmos valores de utilidade para ganhar ou perder a guerra.

1. Calcule a utilidade esperada de uma guerra para ambos os países.
2. Divida a utilidade da vitória e derrota por 100. Verifique que a utilidade esperada é igual à utilidade esperada de antes, dividida por 100.
3. Suponha que a função de utilidade do território em disputa em uma solução diplomática é u(x)=300x, em que x é o percentual (entre 0 e 1) de controle por um país do território em disputa. Se houver guerra, a função de utilidade do controle do território passa a ser u(x)=300x−100. Lembrando que, se um país vence a guerra, o controle é 100% para o vencedor e 0% para o perdedor. Suponha que se uma solução diplomática for acordada, ela é implementada com certeza. Se B oferecer metade do território em disputa para A, ambos os países prefeririam essa solução à guerra? Qual o tamanho mínimo do território que B deveria oferecer a A para que este fosse indiferente entre fazer ou não a guerra?

Resposta: 1) Utilidade Esperada do País A na Guerra (UAG)

$$UAG = 60/100 * 200 + 40/100 * (-100)$$
$$UAG = 120 - 40$$
$$UAG = 80$$

Utilidade Esperada do País B (UB)

$$UBG = 60/100 * (-100) + 40/100 * 200$$
$$UBG = -60 + 80$$
$$UBG = 20$$

2) UAG e UBG, dividido por 100

$$UAG = 60/100 * 2 + 40/100 * (-1)$$
$$UAG = 1,2 - 0,4$$
$$UAG = 0,8$$

$$UBG = 60/100 * (-1) + 40/100 * 2$$
$$UBG = -0,6 + 0,8$$
$$UBG = 0,2$$

Desta forma, foi possível verificar que utilidade esperada é igual à utilidade esperada de antes, dividida por 100.

3) As utilidades de vitória (V) e derrota (D) do País A na Guerra são de

$$Va = 300 * 1 - 100$$
$$Va = 200$$

$$Da = 300 * 0 - 100$$
$$Da = -100$$

Para o país B, teremos os mesmos valores:

$$Vb = 300 * 1 - 100$$
$$Vb = 200$$

$$Db = 300 * 0 - 100$$
$$Db = -100$$

Mantendo as mesmas probabilidades utilizadas no cálculo da utilidade esperada, podemos pensar em (com UAD para a utilidade com o acordo diplomático).

$$UAG = 60/100 * 200 + 40/100 * (-100)$$
$$UAG = 120 - 40$$
$$UAG = 80$$

$$UAD = 300 * 0,5$$
$$UAD = 150$$

Assim, para A, é mais vantajoso aceitar o acordo diplomático do que a Guerra.

Para verificarmos qual seria a proporção de indiferença, devemos tomar a utilidade UAG de 80.

$$300 * x = 80$$
$$x = 80/300$$
$$x = 4/15$$

Assim, a proporção que causa indiferença entre ir para a guerra ou negociar diplomaticamente seria de 4/15 do território disputado, ou cerca de 26% do território.

Exercício 5.1

Considere um *happy hour* em que temos dois jogadores (um jogador, e todo o restante do grupo), e podem economizar ou não economizar.

1. Atribua números fictícios de payoff para esse jogo, de forma a ilustrar o dilema da ação coletiva.
2. Escreva as informações que especificam o jogo na forma normal (Número de jogadores, estratégias e funções de utilidade) e a matriz de payoff.

Resposta: 1) Para o primeiro jogador (individual) serão atribuídos os seguintes valores de utilidade: conomizar quando todos economizam = 5, Não economizar quando os demais economizam = 10, Economizar quando os demais não economizam = 0, Não economizar quando os demais não economizam = 4. Já para o jogador 2 (grupo), serão atribuídos os valores: Economizar quando o outro jogador economiza = 5, Não economizar quando o outro jogador economiza = 7, Economizar quando o outro jogador economiza = 3, Não economizar quando o outro jogador não economiza = 4.

2) Vamos tomar o conjunto N para o número de jogadores, conjunto S para as estratégias possíveis e dois conjuntos V para as utilidades extraídas das combinações (V1 para o jogador individual e V2 para a utilidade dos demais).

N={1, 2}

S={economizar, não economizar}

V1= {Economizar quando todos economizam = 5, Não economizar quando os demais economizam = 10, Economizar quando os demais não economizam = 0, Não economizar quando os demais não economizam = 4}

V2= {Economizar quando o outro jogador economiza = 5, Não economizar quando o outro jogador economiza = 7, Economizar quando o outro jogador economiza = 3, Não economizar quando o outro jogador não economiza = 4}.

Podemos montar a matriz de payoff da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Economizar} & \text{Não Economizar}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{Economizar} \\ \text{Não Economizar}\end{array} & \begin{pmatrix} 5,5 & 0,7 \\ 10,3 & 4,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercício 5.2

Considere o jogo do par ou ímpar.

1. Atribua números fictícios de payoff para esse jogo, de forma a captar as preferências de jogadores nesse jogo.

2. Escreva as informações que especificam o jogo na forma normal (Número de jogadores, estratégias e funções de utilidade) e a matriz de payoff.

Resposta: 1) Assumindo um jogador 1 que deseje o resultado final par e um jogador 2 que deseje o resultado final ímpar, podemos definir os seguintes números de payoff: Jogador 1 - Ele joga par e o oponente joga par = 1, Ele joga par e o oponente joga ímpar = -1, Ele joga ímpar e o oponente joga par =-1, Ele joga ímpar e o oponente joga ímpar = 1. Jogador 2 - Ele joga par e o oponente joga par = -1, Ele joga par e o oponente joga ímpar = 1, Ele joga ímpar e o oponente joga par =1, Ele joga ímpar e o oponente joga ímpar = -1.

2) Vamos tomar o conjunto N para o número de jogadores, conjunto S para as estratégias possíveis e dois conjuntos V para as utilidades extraídas das combinações (V1 para o jogador 1e V2 para o jogador 2).

N={1, 2}

S={utilizar um número par de dedos, utilizar um número ímpar de dedos,}

V1= {Jogar par e o oponente jogar par = 1, Ele jogar par e o oponente jogar ímpar = -1, jogar ímpar e o oponente jogar par =-1, jogar ímpar e o oponente jogar ímpar = 1}

V2= {Jogar par e o oponente jogar par = -1, jogar par e o oponente jogar ímpar = 1, jogar ímpar e o oponente jogar par =1, jogar ímpar e o oponente jogar ímpar = -1}.

Podemos montar a matriz de payoff da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Par} & \text{Ímpar} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Par} \\ \text{Ímpar} \end{array} & \begin{pmatrix} 1,-1 & -1,1 \\ -1,1 & 1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercício 5.3

Digamos que Nina escreva um e-mail para Martín, perguntando se podem se encontrar às 14h da segunda-feira da semana seguinte, em frente ao restaurante central da Universidade onde estudam. Martín responde ao e-mail dizendo que pode sim. É conhecimento comum que ambos irão ao restaurante central na data e hora combinados? Explique.

Resposta: Como indicado no enunciado, não é conhecimento comum que ambos irão ao restaurante central, pois não há a confirmação de que Nina sabe que Martín confirmou o encontro de ambos, bem como não há a confirmação de que Martín sabe que Nina sabe que Martín confirmou, assim como não há a confirmação de que Nina sabe que Martín sabe que Nina sabe que Martín sabe, assim por diante *ad infinito.*