2023 Aula 7

4 Solução de equações não-lineares (zeros de funções)

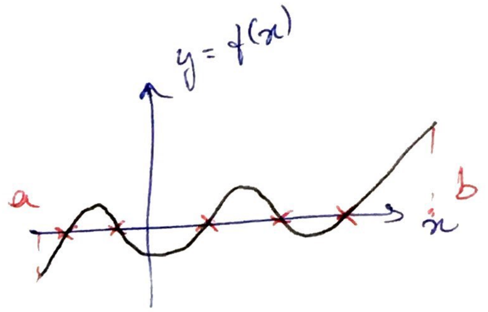
Quarteroni: Cap. 2
Franco: Cap. 3

$$f(x) = c \quad \rightarrow \quad g(x) = f(x) - c = 0$$

$f(x) \rightarrow$ função não-linear da variável x

$f(x) = 0 \rightarrow$ eq. não-linear cuja incógnita x é o zero da função $f(x)$

ex) $f(x)$ { polinômio de grau > 1; funções trigonométricas; exp. ou log.



→ Métodos iterativos:

- se f é <u>contínua</u> em $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe <u>pelo menos 1</u> zero em $[a, b]$

- métodos para "cercar" esse valor a partir de um chute inicial

* método da bissecção (divide o intervalo no meio)

$$I^{(0)} = [a^{(0)}, b^{(0)}], \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

K = 0, while

se $f(a^{(K)}_{(0)}) f(x^{(K)}_{(0)}) < 0 \rightarrow b^{(K+1)}_{(1)} = x^{(K)}_{(0)}, \quad a^{(K+1)}_{(1)} = a^{(K)}_{(0)}$

se $f(x^{(K)}_{(0)}) f(b^{(K)}_{(0)}) < 0 \rightarrow a^{(K+1)}_{(1)} = x^{(K)}_{(0)}, \quad b^{(K+1)}_{(1)} = b^{(K)}_{(0)}$

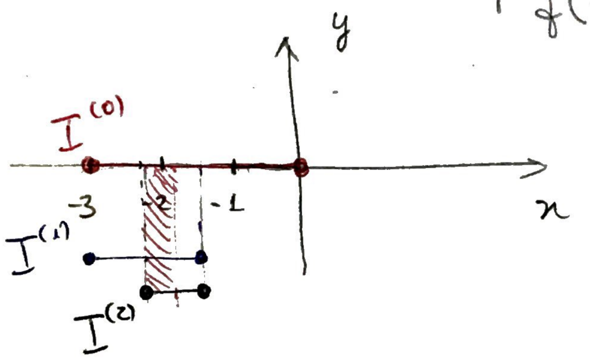
$$I^{(K+1)} = [a^{(K+1)}, b^{(K+1)}], \quad x^{(K+1)} = \frac{a^{(K+1)} + b^{(K+1)}}{2}$$

ex) $f(x) = x^3 - 2x + 5$

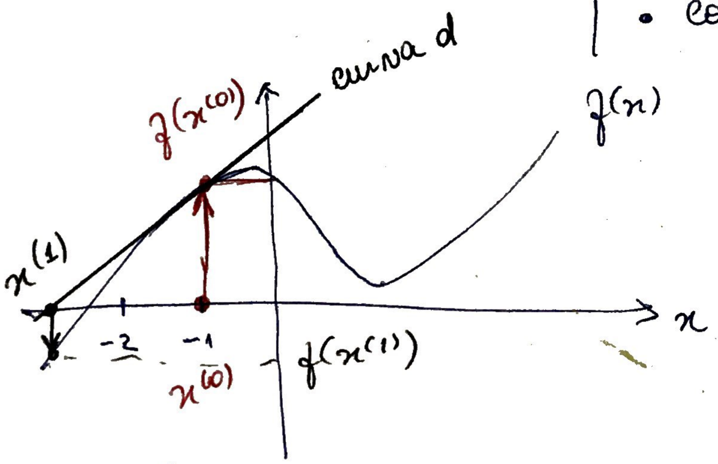
$$I^{(0)} = [-3, 0] \quad \begin{cases} f(-3) = -16 \quad \times \\ f(0) = 5 \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4{,}625 \quad \times \end{cases}$$

$$I^{(1)} = \left[-3, -\frac{3}{2}\right] \quad \begin{cases} f(-3) = -16 \\ f(-3/2) = 4{,}625 \quad \times \\ f(-9/4) = -1{,}89 \quad \times \end{cases}$$

$$I^{(2)} = \left[-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right] \quad \begin{cases} f(-9/4) = -1{,}89 \\ f(-3/2) = 4{,}625 \\ f(-15/8) = 2{,}16 \quad \times \end{cases}$$



* Método de Newton:
- sinal de $f(a)\,f(b)$
- comportamento da função (derivada



curva d: $\begin{cases} y = ax + b \\ \underline{a = f'(x^{(0)})} \end{cases}$

$$f(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})\,x^{(0)} + b$$

$$\underline{b = f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})\,x^{(0)}}$$

curva d: $\boxed{y = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})}$

novo $x^{(1)}$ → onde $y = 0$ → $f'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) = 0$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

no caso geral:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

obs.: • se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b)

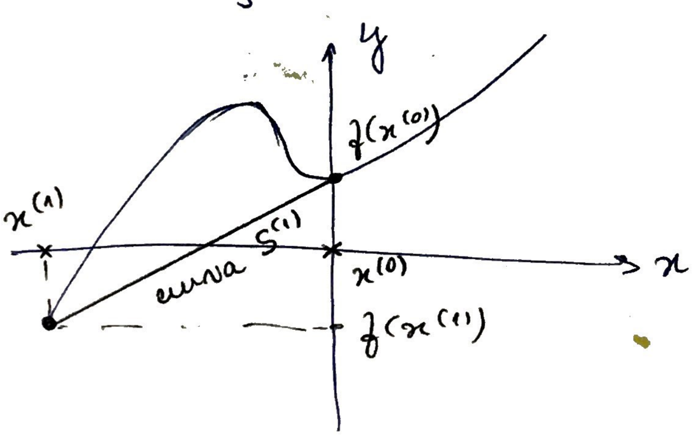
• problema perto de regiões onde $f'(x^{(k)}) \simeq 0$.

• precisa conhecer $f'(x)$.

* Método da <u>secante</u>:
↳ reta que intercepta uma curva em pelo menos 2 pontos

• se a derivada não está disponível

• começa com $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ tal que $f(x^{(0)})\, f(x^{(1)}) < 0$



curva $S^{(1)}$: $y = ax + b$

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} \\[2ex] b = f(x^{(1)}) - a\, x^{(1)} \end{cases}$$

$$y = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} (x - x^{(1)}) + f(x^{(1)}) = 0$$

$x^{(2)} \rightarrow$ onde $y = 0 \rightarrow$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\left(\dfrac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{(x^{(1)} - x^{(0)})} \right)}$$

no caso geral:

$$\boxed{x^{(K+1)} = x^{(K)} - \frac{f(x^{(K)})}{\left(\dfrac{f(x^{(K)}) - f(x^{(K-1)})}{(x^{(K)} - x^{(K-1)})} \right)}}$$

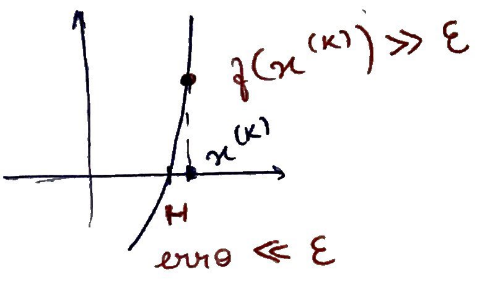
* Critério de parada:

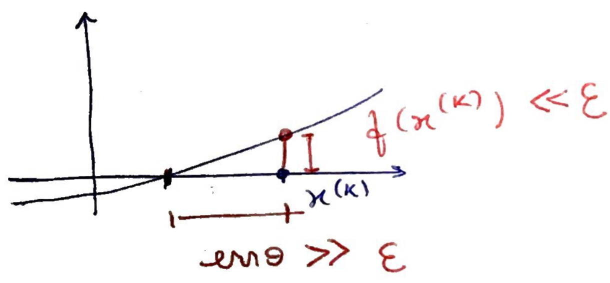
ideal • erro relativo: $\dfrac{|\overset{a}{x^{(K+1)}} - \overset{b}{x^{(K)}}|}{\underset{a}{|x^{(K+1)}|}} < \varepsilon$

ruins
- • resíduo: $|f(x^{(K)})| < \varepsilon$
- • erro absoluto: $|x^{(K+1)} - x^{(K)}| < \varepsilon$

• número máximo de iterações

resíduo:





* Comparação:

• bissecção:
- • dado $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, sempre funciona (convergente)
- • simples
- • lento

• Newton:
- requer $f'(x)$
- requer $x^{(0)}$ adequado para convergir
- mais rápido

• secante:
- não requer $f'(x)$
- requer $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ adequados para convergir
- custo intermediário

Matlab: combina bisseção, secante e interpolação.

ex) $f(x) = 10\, x \exp(-x^2) - 1$

$I^{(0)} = [-1, 3] \rightarrow$ diverge

$I^{(0)} = [-1, 1] \rightarrow$ converge