SME0121 Processos Estocásticos: Lista 2 – Cadeias de Markov: Análise de primeiro passo e tempo de absorção

Thomas Peron

Data de publicação: 04/04/2024. Data da provinha: $\boxed{18/04/2024}$.

1. Uma cadeia de Markov de três estados, $X_n \in \{0, 1, 2\}$, possui a seguinte matriz de probabilidade de transição:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}.$$
Determine $\Pr\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2\}$, sabendo que $\Pr\{X_0 = 0\} = p_0 = 0.3$, $\Pr\{X_0 = 1\} = p_1 = 0.4$, e $\Pr\{X_0 = 2\} = p_2 = 0.3$ (Resp: 0).

2. Uma cadeia de Markov de três estados, $X_n \in \{0, 1, 2\}$, possui a seguinte matriz de probabilidade de transição:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$
Calcule:
   (a) $\Pr\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_1 = 0\}$ (Resp.: 0.12).
   (b) $\Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 0\}$ (Resp.: 0.12).

3. Uma cadeia de Markov de três estados, $X_n \in \{0, 1, 2\}$, possui a seguinte matriz de probabilidade de transição:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$
Sabendo que o processo começa em $X_0 = 1$, determine a probabilidade $\Pr\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2\}$ (Resp.:0.03).

4. Uma cadeia de Markov de três estados, $X_n \in \{0, 1, 2\}$, possui a seguinte matriz de probabilidade de transição:
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$
A distribuição inicial é dada por $p_0 = 0.5$, $p_1 = 0.5$. Calcule as probabilidades:
   (a) $\Pr\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$ (Resp.: 0.025).
   (b) $\Pr\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}$ (Resp: 0.075).

5. Resolva os problemas 1.1–1.4 do capítulo 3 do livro texto (Taylor & Karlin).

6. Uma partícula se movimenta entre os estados 0, 1 e 2 de acordo com um processo de Markov cuja matriz de probabilidade de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja X_n a posição da partícula no n-ésimo movimento. Calcule $\Pr\{X_n = 0|X_0 = 0\}$ para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4. (Resp.: 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$)

7. Três moedas são lançadas. Suponha que X_1 moedas tenham saído como *cara*. Essas moedas que saíram como cara no primeiro lançamento são então selecionadas e lançadas novamente. Seja X_2 o número de *coroas* total, incluindo as do primeiro lançamento. No terceiro lançamento, todas as coroas são selecionadas e lançadas novamente. Seja X_3 o número de caras, incluindo as que sobraram dos lançamentos anteriores. O processo continua da seguinte forma: conte as caras, lance as caras, conte as coroas, lance as coroas, conte as caras, lance as caras, e assim por diante. Escreva a matriz de transição probabilidade para o processo de Markov $\{X_n\}$ considerando que $X_0 = 3$.

$$\left(\text{Resp.: } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \right)$$

8. Uma urna contém uma bola vermelha e uma bola verde. Uma bola é removida aleatoriamente e trocada por uma bola da outra cor. Este processo é repetido de tal modo que sempre haja exatamente duas bolas na urna. Seja X_n o número de bolas vermelhas na urna na $n-$ésima retirada, com $X_0 = 1$. Determine a matriz de probabilidades de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}$.

9. Encontre o tempo médio (número médio de passos) para o processo alcançar o estado 3 dado que o processo se iniciou no estado 0 para uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Resp: $E[T|X_0 = 0] = 10$)

10. Considere uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição entre os estados 0, 1 e 2 é:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Iniciando no estado 1, determine a probabilidade da cadeia terminar no estado 0. (Resp.: 0.25)

   (b) Determine o tempo médio de absorção. (Resp.: 2.5)

11. Considere uma cadeia de Markov cuja matriz de probabilidades de transição é dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Iniciando no estado 1, determine o número médio de vezes que o processo passa pelos estados 1 e 2 antes da absorção. Verifique que a soma de ambos é igual ao número médio de passos até a absorção. (Resp.: $E[T|X_0 = 1] = 1.612 = 1.290 + 0.322$)

12. Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Escreva a matriz de probabilidades de transição desse processo e determine o número médio de lançamentos necessários. (Resp.: 6 lançamentos)

13. Qual dos seguintes padrões necessitam de menos lançamentos na média: (i) sucessivos lançamentos até que o padrão cara-cara-coroa apareça, ou (ii) sucessivos lançamentos até que cara-coroa-cara apareça? Justifique a resposta. (Resp.: caso (i): 8 lançamentos. Caso (ii): 10 lançamentos)

14. Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 verdes. As bolas são selecionadas uma por uma, de forma aleatória, da urna. Se uma bola vermelha é escolhida, ela é removida. Qualquer bola verde que for escolhida é recolocada na urna. O processo de seleção continua até que não reste nenhuma bola vermelha dentro da urna. Qual é o tempo médio de duração desse jogo? (Resp.: 11.85)