ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 09

Linguagens não-regulares (cap 1.4)

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

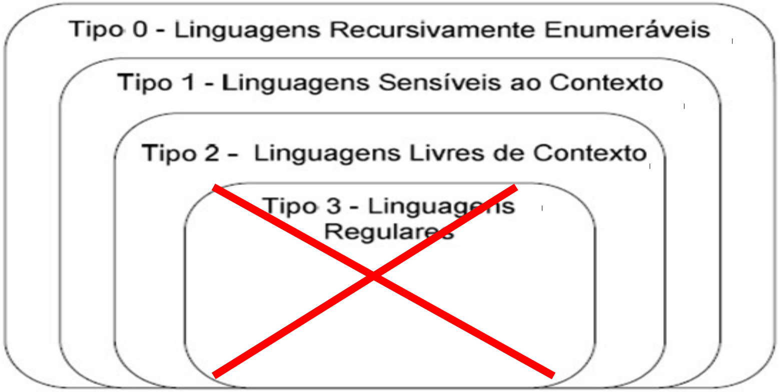
Aulas anteriores

- AFD
- AFN
- Expressões regulares
- Gramáticas regulares

⇒ **DISPOSITIVOS EQUIVALENTES**

Aula de hoje

- Como provar que uma linguagem NÃO é regular



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)

Linguagem	Autômato	Gramática	Reconhecimento
Recursivamente enumerável	Máquina de Turing com fita infinita	Irrestrita $Baa \rightarrow A$	Indecidível ?
Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita finita	Sensível ao contexto $At \rightarrow aA$	NP-Completo
Livre de contexto	Autômato de pilha	Livre de contexto $S \rightarrow gSc$	Polinomial
~~Regular~~	~~Autômato finito~~	~~Regular $A \rightarrow cA$~~	~~Linear~~

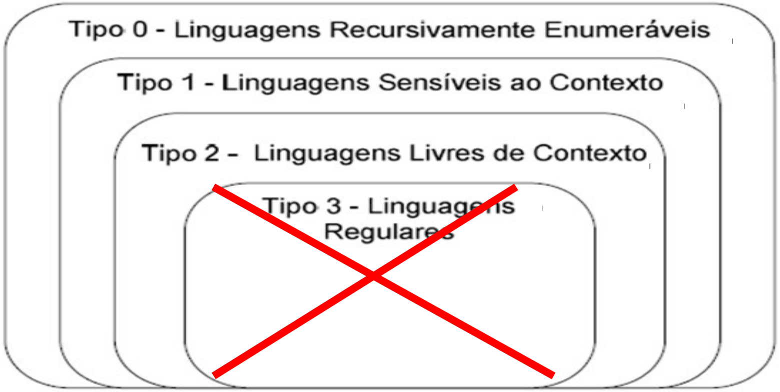
Fonte: Adaptado de Searls (2002)

Aula de hoje

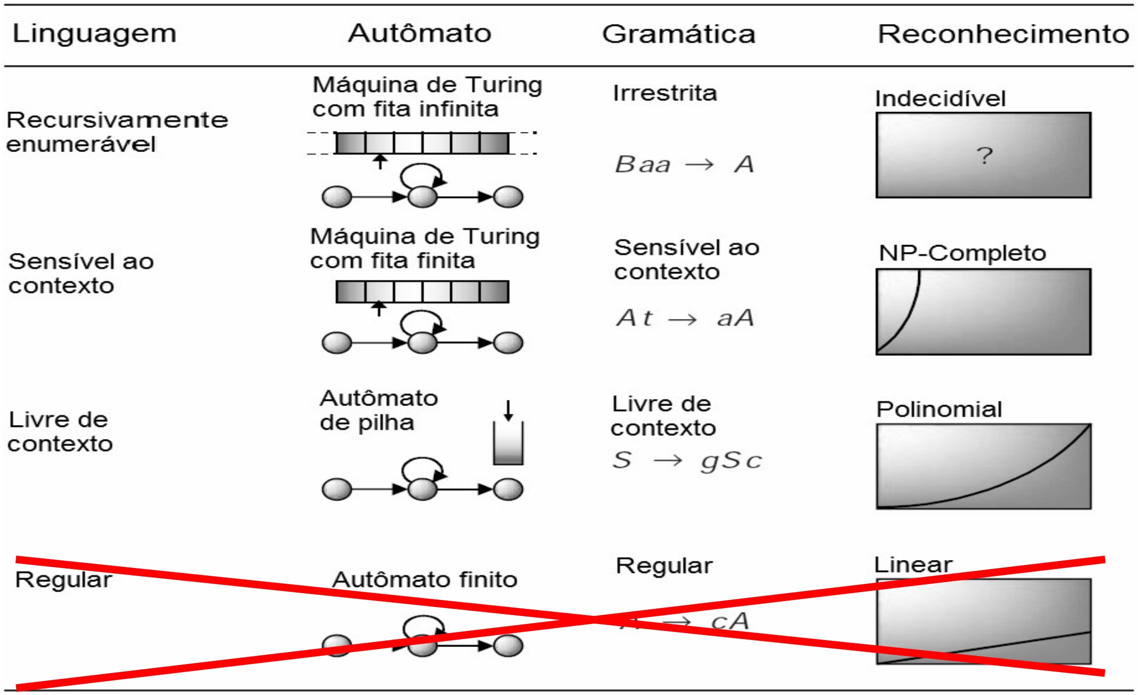
- O conteúdo da Prova P1 (dia 15) vai até o dia de hoje
- Na aula que vem:
  - Como implementar AFDs
  - Gramáticas livres de contexto (cap 2 Sipser)

Aula de hoje

- Como provar que uma linguagem NÃO é regular



Fonte: Adaptado de Matsuno (2006)



Fonte: Adaptado de Searls (2002)

Linguagens não-regulares

- A linguagem $B = \{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- É útil provar que uma linguagem não é regular?

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n 1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- É útil provar que uma linguagem não é regular?
  - Para saber que não vale a pena gastar tempo tentando projetar um AFD para ela

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n 1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- É útil provar que uma linguagem não é regular?
  - Para saber que não vale a pena gastar tempo tentando projetar um AFD para ela
- Como provar que uma linguagem não pode ser reconhecida por um autômato finito?

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- É útil provar que uma linguagem não é regular?
  - Para saber que não vale a pena gastar tempo tentando projetar um AFD para ela
- Como provar que uma linguagem não pode ser reconhecida por um autômato finito?
  - Não existe um AFD, AFN que a reconheça, ou uma ER que a descreva, ou simplesmente você não foi capaz de projetá-los?

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- É útil provar que uma linguagem não é regular?
  - Para saber que não vale a pena gastar tempo tentando projetar um AFD para ela
- Como provar que uma linguagem não pode ser reconhecida por um autômato finito?
  - Não existe um AFD, AFN que a reconheça, ou uma ER que a descreva, ou simplesmente você não foi capaz de projetá-los?
  - Ao invés disso, provamos que ela não respeita a lei de bombeamento de linguagens regulares

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, isto é, y pode ser bombeada
2. $|y| > 0$, e isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Fundamental entender quem é esse y

Então A é reconhecida por um AFD

Esse AFD, SEJA LÁ qual for ele, tem um certo número de estados, digamos **p**.

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, — isto é, y pode ser bombeada
2. $|y| > 0$, e — isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Fundamental entender quem é esse y

Ideia da prova

p = número de estados do AFD que reconhece tal linguagem

Qual o tamanho máximo de uma sequência aceita por esse AFD, partindo do estado inicial até um estado final, SEM REPETIR NENHUM estado neste caminho?

Ideia da prova

p = número de estados do AFD que reconhece tal linguagem

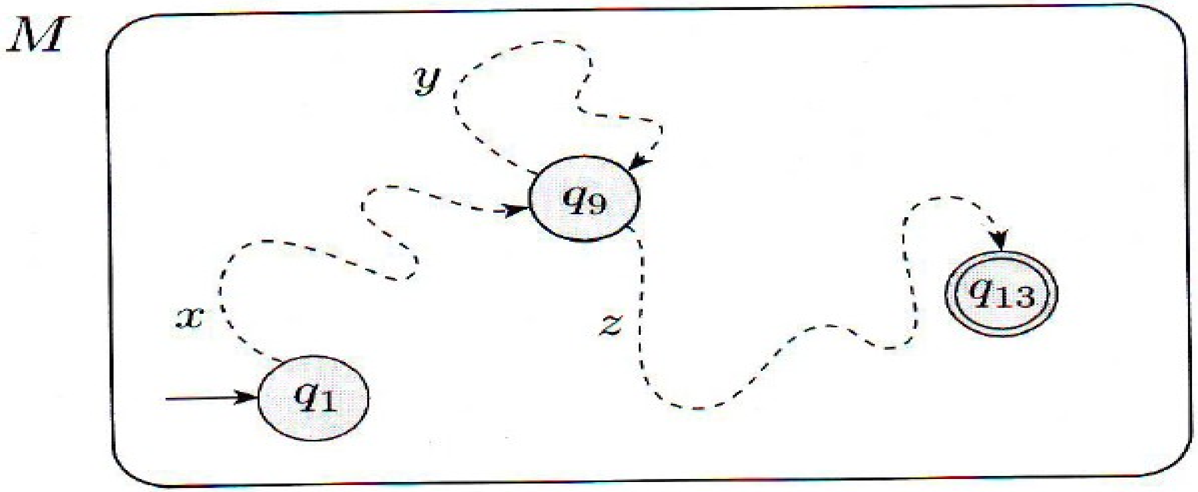
Qual o tamanho máximo de uma sequência aceita por esse AFD, partindo do estado inicial até um estado final, SEM REPETIR NENHUM estado neste caminho?

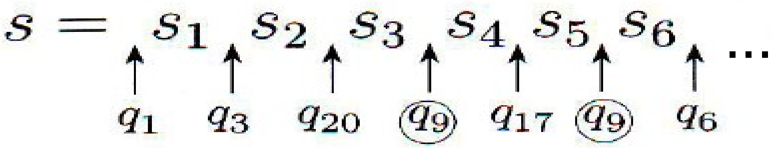
p-1

Ideia da prova

p = número de estados do AFD que reconhece tal linguagem

Se a sequência tiver tamanho >= p (e o AFD tem p estados), então (com certeza) pelo menos um estado foi visitado pelo menos duas vezes (repetido)





Prova

PROVA Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ um AFD que reconhece A e p o número de estados de M.

Seja $s = s_1 s_2 \cdots s_n$ uma cadeia em A de comprimento n, onde $n \geq p$. Seja $r_1, \ldots, r_{n+1}$ a seqüência de estados nos quais M passa enquanto processa s, de forma que $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$ para $1 \leq i \leq n$. Essa seqüência tem comprimento $n + 1$, que é pelo menos $p + 1$. Entre os primeiros $p + 1$ elementos da seqüência, dois devem ser o mesmo estado, pelo princípio da casa de pombos. Chamamos o primeiro desses de r_j e o segundo de r_l. Como r_l ocorre entre as primeiras $p + 1$ posições da seqüência começando em r_1, temos que $l \leq p + 1$. Agora, seja $x = s_1 \cdots s_{j-1}$, $y = s_j \cdots s_{l-1}$ e $z = s_l \cdots s_n$.

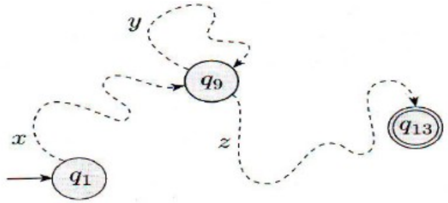
Como x leva M de r_1 para r_j, y leva M de r_j para $\overset{r_l}{\cancel{r_j}}$ e z leva M de $\overset{r_l}{\cancel{r_j}}$ para r_{n+1}, que é um estado de aceitação, M deve aceitar xy^iz para $i \geq 0$. Sabemos que $j \neq l$, e portanto $|y| > 0$; e $l \leq p + 1$, e logo $|xy| \leq p$. Dessa forma, satisfizemos todas as condições do lema do bombeamento.

Ou seja, estados $r_1, \ldots, r_j, \ldots, r_l, \ldots, r_{n+1}$.

$$s = \;\; s_1 \;\; s_2 \;\; s_3 \;\; s_4 \;\; s_5 \;\; s_6 \;\; \cdots \;\; s_n$$

$$q_1 \;\; q_3 \;\; q_{20} \;\; q_9 \;\; q_{17} \;\; q_9 \;\; q_6 \;\; \cdots \;\; q_{35} \;\; q_{13}$$

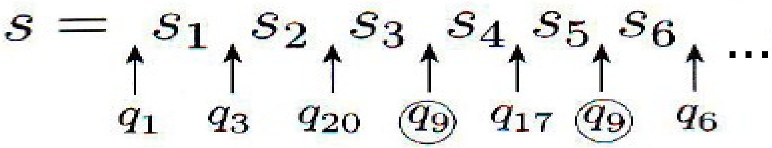
$$r_1,\; r_2,\; r_3,\; r_4,\; r_5,\; r_6,\; r_7$$

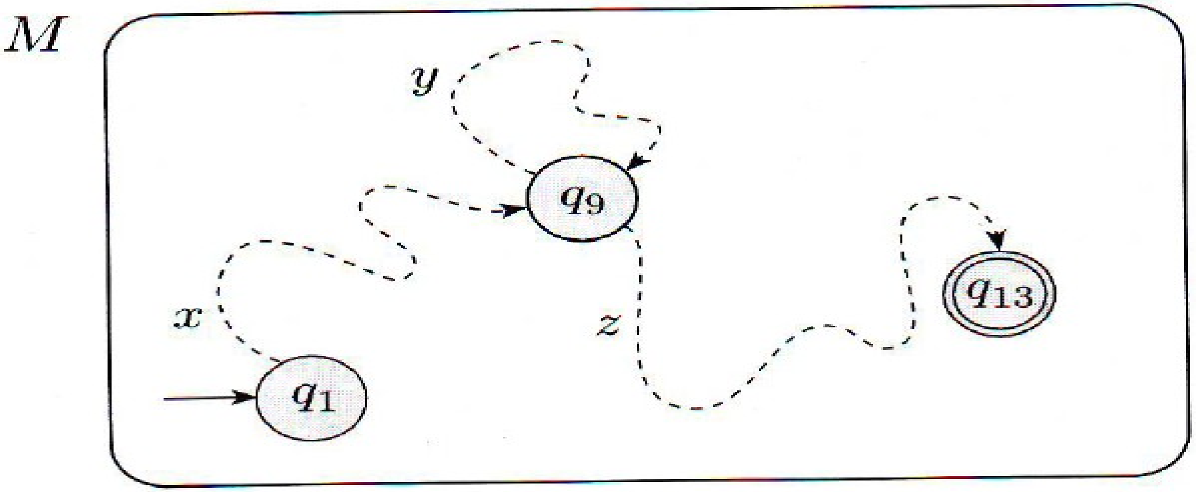


TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, isto é, y pode ser bombeada
2. $|y| > 0$, e isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.



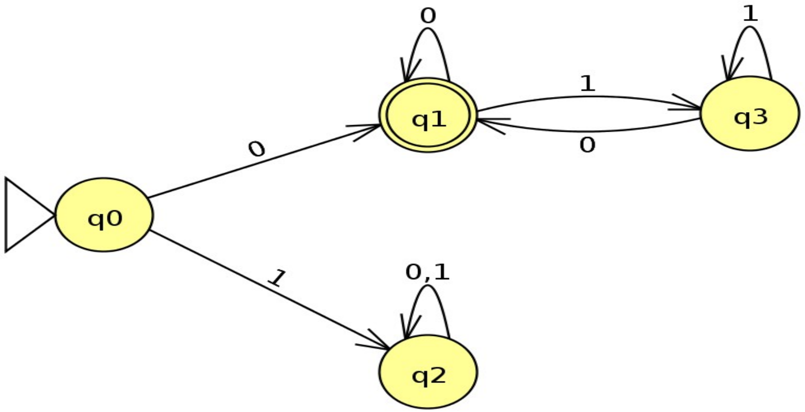


Exemplo

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, isto é, y pode ser bombeada
2. $|y| > 0$, e isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.



A = { w ϵ {0,1}* | w começa e termina com 0}
Para ESTE AFD, p = 4
QUALQUER s ϵ A tal que |s| >= 4 satisfaz o lema
Exemplos: s = xyz (primeiro estado em negrito é o rj, segundo estado em negrito é o rl)
0010 (q0,**q1,q1**,q3,q1)
0110 (q0,q1,**q3,q3**,q1)
01010 (q0,**q1**,q3,**q1**,q3,q1)

Utilidade do lema do bombeamento

- O que devemos fazer para provar que uma linguagem É regular?

Utilidade do lema do bombeamento

- O que devemos fazer para provar que uma linguagem É regular?
  - Mostrar que ela respeita a lei do bombeamento, (pode ser difícil...) ou
  - Mostrar um AFD que a reconheça ou
  - Mostrar um AFN que a reconheça ou
  - Mostrar uma ER que a descreva
  - Mostrar uma GR que a gere

Utilidade do lema do bombeamento

- O que devemos fazer para provar que uma linguagem NÃO É regular?

Utilidade do lema do bombeamento

- O que devemos fazer para provar que uma linguagem NÃO É regular?
  - Não existe um AFD, AFN que a reconheça, ou uma ER que a descreva, ou simplesmente você não foi capaz de projetá-los?

Utilidade do lema do bombeamento

- O que devemos fazer para provar que uma linguagem NÃO É regular?
  - Não existe um AFD, AFN que a reconheça, ou uma ER que a descreva, ou simplesmente você não foi capaz de projetá-los?
  - Daí a utilidade da lei do bombeamento → dá para usá-la para provar que uma linguagem NÃO é regular (e daí pagar o preço por um dispositivo menos eficiente que AFDs...)

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- Como provar que uma linguagem não pode ser reconhecida por um autômato finito?

Linguagens não-regulares

- A linguagem B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$ é regular?
- Como provar que uma linguagem não pode ser reconhecida por um autômato finito?
  - Assuma (suponha) que ela é regular, ou seja, que vale o lema do bombeamento, e ache um contra-exemplo (ou seja, uma sequência que não respeita o lema), e caia em uma contradição
  - Ou seja, é uma prova por contradição

TEOREMA 1.70

(para **TODAS** as cadeias)

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

(existe **pelo menos uma** divisão)

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, isto é, y pode ser bombeada (para **todos i** >=0)
2. $|y| > 0$, e isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Para termos uma **CONTRADIÇÃO:**

Basta pegar **UMA** sequência de tamanho pelo menos p (sequência definida em função desse p) e mostrar que não existe **NENHUMA** divisão que respeite o lema (fura para **ALGUM** i)

(lembre desses 3 negritos em verde !!!)

ou seja,

existe PELO MENOS UMA sequência s para a qual NENHUMA divisão em 3 partes dá certo para QUALQUER i >= 0

TEOREMA 1.70

(para **TODAS** as cadeias)

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

(existe **pelo menos uma** divisão)

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, — isto é, y pode ser bombeada (para **todos i** >=0)
2. $|y| > 0$, e — isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Para termos uma **CONTRADIÇÃO:**

Basta pegar **UMA** sequência de tamanho pelo menos p (sequência definida em função desse p) e mostrar que não existe **NENHUMA** divisão que respeite o lema (fura para **ALGUM** i)

Definir tal sequência é o coração da prova!
DEVE SER SEMPRE BASEADA EM P
para garantir que ela tamanho >= p !

TEOREMA 1.70

(para **TODAS** as cadeias)

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

(existe **pelo menos uma** divisão)

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$, — isto é, y pode ser bombeada (para **todos i** >=0)
2. $|y| > 0$, e — isto é, y não pode ser ε
3. $|xy| \leq p$.

Também importante notar que y pode estar em diversas posições (até p), mas sempre **CONFINADO** entre as p primeiras posições

x ≠ ε

$$S = \underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p}_{xy}\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n \qquad S = \underbrace{s_1\ s_2\ s_3}_{xy}\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$$

x = ε

$$S = \underbrace{s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_p}_{xy}\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n \qquad S = \underbrace{s_1\ s_2\ s_3}_{xy}\ \ldots\ s_p\ |\ s_{p+1}\ \ldots\ s_n$$

$|xy| = p$ $\qquad$ $|xy| < p$

EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia $0^p 1^p$.

Esta é uma cadeia (não a linguagem), pois é para um p específico

(n é uma variável, p é uma constante!)

EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia 0^p1^p.

$$\underbrace{00\ldots\ldots\ldots00}_{\text{P zeros}}\underbrace{11\ldots\ldots\ldots11}_{\text{P uns}}$$

EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia 0^p1^p.

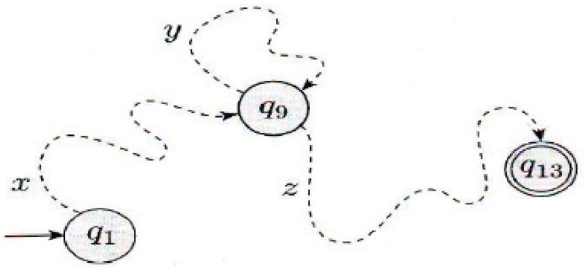
O lema diz:

$$\underbrace{00\ldots\ldots00}_{\text{P zeros}}\underbrace{11\ldots\ldots11}_{\text{P uns}}$$

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

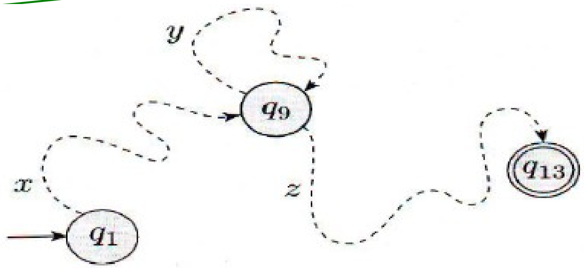


EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia $0^p 1^p$.

$$\underbrace{00\ldots\ldots0}_{\text{P zeros}}\underbrace{011\ldots\ldots11}_{\text{P uns}}$$



O lema diz:

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^i z \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Por que ESSA sequência foi sugerida?

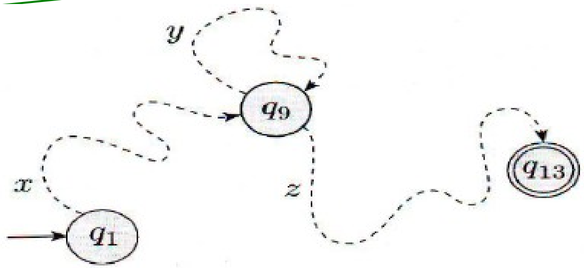
EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia 0^p1^p.

$$\underbrace{00\ldots\ldots00}_{\text{P zeros}}\underbrace{11\ldots\ldots11}_{\text{P uns}}$$

O lema diz:



TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Por que ESSA sequência foi sugerida?
Porque, pela cond 3, y contém apenas 0's
Logo...

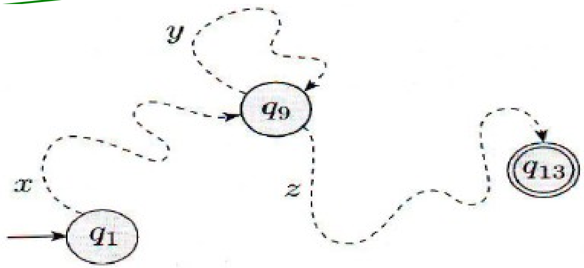
EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n 1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia $0^p 1^p$.

O lema diz:

$\underbrace{00\ldots\ldots00}_{\text{P zeros}}\underbrace{11\ldots\ldots11}_{\text{P uns}}$



TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Por que ESSA sequência foi sugerida?
Porque, pela cond 3, y contém apenas 0's
Logo… xy^iz (para $i \neq 1$) teria um nr de 0's ≠ do nr de 1's

Logo não há subdivisão possível que respeite o lema => *A* NÃO é regular!

PROVA FORMAL

EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia 0^p1^p.

$$\underbrace{00........00}_{\text{P zeros}}\underbrace{11........11}_{\text{P uns}}$$

Na verdade bastaria mostrar um valor de i

EM TODAS as subdivisões de s que respeitem as condições 2 e 3 do lema de bombeamento, **y terá pelo menos um 0, e só conterá 0's**. Logo, para **qualquer subdivisão** dessas, para qualquer **valor de i ≠ 1**, xy^iz terá um número de 0's diferente do número de 1's, e portanto xy^iz não pertencerá à linguagem B.
Logo, B NÃO é regular.

Esse retângulo vermelho é a prova

Esse exemplo do Sipser complicou a prova porque não usou a condição 3 (a prova do slide anterior é o suficiente)

EXEMPLO 1.73

Seja B a linguagem $\{0^n1^n | n \geq 0\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que B não é regular. A prova é por contradição.

Suponha, ao contrário, que B seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como a cadeia 0^p1^p. Como s é um membro de B e tem comprimento maior que p, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, onde para qualquer $i \geq 0$ a cadeia xy^iz está em B. Consideramos três casos para mostrar que esse resultado é impossível.

1. A cadeia y contém apenas 0s. Neste caso, a cadeia $xyyz$ tem mais 0s que 1s e, portanto, não é um membro de B, violando a condição 1 do lema do bombeamento. Esse caso é uma contradição.
2. A cadeia y contém somente 1s. Esse caso também dá uma contradição.
3. A cadeia y contém ambos, 0s e 1s. Nesse caso, a cadeia $xyyz$ pode ter o mesmo número de 0s e 1s, mas eles estarão fora de ordem, com alguns 1s antes de 0s. Logo, ela não é um membro de B, o que é uma contradição.

EXEMPLO 1.74

Seja $C = \{w|\ w$ tem número igual de 0s e 1s$\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que C não é regular. A prova é por contradição.

0^p1^p

Se fizermos x e z serem a cadeia vazia e y ser a cadeia 0^p1^p, então xy^iz sempre terá um número igual de 0s e 1s e, portanto, está em C.

Logo, *parece* que s pode ser bombeada.

EXEMPLO 1.74

Seja $C = \{w|\ w$ tem número igual de 0s e 1s$\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que C não é regular. A prova é por contradição.

$0^p 1^p$.

Se fizermos x e z serem a cadeia vazia e y ser a cadeia $0^p 1^p$, então xy^iz sempre terá um número igual de 0s e 1s e, portanto, está em C.

Logo, *parece* que s pode ser bombeada.

Aqui a condição 3 no lema do bombeamento é útil.

Se $|xy| \leq p$, então y deve conter somente 0s; logo, $xyyz \notin C$.

Por conseguinte, s não pode ser bombeada.

EXEMPLO 1.74

Seja $C = \{w|\, w \text{ tem número igual de 0s e 1s}\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que C não é regular. A prova é por contradição.

0^p1^p.

Se fizermos x e z serem a cadeia vazia e y ser a cadeia 0^p1^p, então xy^iz sempre terá um número igual de 0s e 1s e, portanto, está em C.

Logo, *parece* que s pode ser bombeada.

Aqui a condição 3 no lema do bombeamento é útil.

Se $|xy| \leq p$, então y deve conter somente 0s; logo, $xyyz \notin C$.

Por conseguinte, s não pode ser bombeada.

Cuidado: $s = (01)^p$ $x = \varepsilon$, $y = 01$ e $z = (01)^{p-1}$

Neste caso s poderia ser bombeada, logo s = $(01)^p$ não serve para a prova

EXEMPLO 1.74

Seja $C = \{w \mid w$ tem número igual de 0s e 1s$\}$. Usamos o lema do bombeamento para provar que C não é regular. A prova é por contradição.

$$0^p 1^p$$

Um método alternativo de provar que C é não-regular segue de nosso conhecimento que B é não-regular. Se C fosse regular, $C \cap 0^*1^*$ também seria regular. Os motivos são que a linguagem 0^*1^* é regular e que a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, resultado que provamos na nota de rodapé 3 (página 47). Mas $C \cap 0^*1^*$ é igual a B, e sabemos que B é não-regular do Exemplo 1.73.

Exercício

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Prove que a linguagem $E = \{0^i1^j \mid i > j\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento

$s = ?$

Exercício

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Prove que a linguagem $E = \{0^i1^j \mid i > j\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento

$s = 0^{p+1}1^p$

Condição 3 => y contém somente zeros

xyyz ainda está em E

Exercício

TEOREMA 1.70

Lema do bombeamento Se A é uma linguagem regular, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) tal que, se s é qualquer cadeia de A de comprimento no mínimo p, então s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as seguintes condições:

1. para cada $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, e
3. $|xy| \leq p$.

Prove que a linguagem $E = \{0^i1^j \mid i > j\}$ não é regular utilizando o lema do bombeamento

$$s = 0^{p+1}1^p$$

Condição 3 => y contém somente zeros

xyyz ainda está em E

Mas $xy^0z = xz$ não está

Não esqueça que você deveria poder bombear para baixo!

Profa. Ariane Machado Lima

Exercício – PROVA FORMAL

Prove que a linguagem $E = \{0^i 1^j \mid i > j\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento.

Assuma (por contradição) que E é regular.

Seja $s = 0^{p+1}1^p$, que logo pertencente a E.

EM TODAS as subdivisões de s que respeitem as condições 2 e 3 do lema de bombeamento, **y terá pelo menos um 0, e só conterá 0's**.
Logo, **para qualquer subdivisão** dessas, **para i = 0**,
$xy^iz = xz$ terá um número de 0's menor ou igual ao número de 1's, e portanto xy^iz não pertencerá à linguagem E.
Logo, E NÃO é regular.

Exercício - Exemplo 1.75

- Prove que a linguagem $F = \{ww|\ w \in \{0,1\}^*\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento

Tente fazer sozinho antes de olhar o próximo slide!!!

Exercício - Exemplo 1.75

- Prove que a linguagem $F = \{ww | \; w \in \{0,1\}^*\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento

$$s = 0^p 1 0^p 1$$

Exercício - Exemplo 1.75

- Prove que a linguagem $F = \{ww |\ w \in \{0,1\}^*\}$

não é regular utilizando o lema do bombeamento

Assuma (por contradição) que F é regular.

Seja s = 0^p10^p1 , que logo pertencente a F (e tem tamanho >= p).

EM TODAS as subdivisões de s que respeitem as condições 2 e 3 do lema de bombeamento, **y terá pelo menos um 0, e só conterá 0's**.
Logo, **para qualquer subdivisão** dessas, **para qualquer i diferente de 1**, a nova xy^iz terá a primeira metade diferente da segunda metade, e portanto xy^iz não pertencerá à linguagem E.
Mais especificamente, para i = 0, xz será uma cadeia cuja primeira metade conterá um certo nr de 0's, seguido de 1, seguido de um certo nr de zeros, e a segunda metade conterá um certo nr de 0's seguido de 1.
Para i > 1, a primeira metade de xy^iz conterá apenas 0's, e a segunda metade conterá um certo nr de 0's, seguido de 10^p1.
Logo, E NÃO é regular.

Exercícios do Sipser

Já podem fazer todos do cap 1!

Foco nos exercícios (1.1 a 1.30), problemas 1.53 e 1.54 também são interessantes

Lista MÍNIMA: 1.4 f,g; 1.5 c,g; 1.6 e,g,h; 1.7 e; 1.12, 1.14, 1.16, 1.21, 1.22, 1.24 d,f; 1.27; 1.29, 1.30; 1.53

ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 9

Linguagens não-regulares (cap 1.4)

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br