Prova 1 - SMA0169 - EDP - 01.04.2024

Prof. Sergio H. Monari Soares

Nome:____

Número USP:______________________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,5	
4.ª	2,5	
Total	10,0	

1. Resolva o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_x + x u_y = y & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(0,y) = \cos y & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Calcule a solução do problema quaselinear

$$\begin{cases} u u_x + y u_y = x \\ u(x,1) = 2x. \end{cases}$$

3. Calcular a solução geral da equação

$$x u_x - y u_y + u = y \quad \text{em } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

4. Dada a equação linear de segunda ordem

$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0,$$

classifique-a e calcule as características. Reduza a equação à forma canônica e determine a solução geral dessa equação.

Resolução

1. Parametrizando a curva inicial com a equação

$$x = 0, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, o sistema característico é dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds}(s,t) = 1, & x(0,t) = 0 \\ \frac{dy}{ds}(s,t) = x(s,t), & y(0,t) = t \\ \frac{dv}{ds}(s,t) = y(s,t), & v(0,t) = \cos y(0,t) = \cos t \end{cases}$$

A primeira EDO dá $x(s,t) = s + c$, da qual, aplicando a condição inicial, $x(s,t) = s$. A segunda equação dá

$$\frac{dy}{ds}(s,t) = s,$$

e portanto $y(s,t) = s^2/2 + c$, da qual, pela condição inicial, $y(s,t) = s^2/2 + t$. Enfim, a terceira EDO fica

$$\frac{dv}{ds}(s,t) = s^2/3 + t \Longrightarrow v(s,t) = s^3/6 + st + c.$$

Pela condição inicial $z(t) = s^3/6 + st + \cos t$. Resumindo,

$$x(s,t) = s, \quad y(s,t) = s^2/2 + t, \quad v(s,t) = s^3/6 + st + \cos t. \tag{1}$$

Observando que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

as equações (1) definem $t = t(x,y)$ e $s = s(x,y)$, e substituindo em v obtemos a solução

$$u(x,y) = v(t(x,y), s(x,y)).$$

Um cálculo direto mostra que

$$s = x, \quad t = y - s^2/2 = y - x^2/2,$$

obtendo

$$u(x,y) = \frac{x^3}{6} + x\left(y - \frac{x^2}{2}\right) + \cos\left(y - \frac{x^2}{2}\right) = xy - \frac{x^3}{3} + \cos\left(y - \frac{x^2}{2}\right).$$

2. Parametrizando a curva inicial com a equação

$$x = t, \quad y = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, o sistema característico é dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds}(s,t) = v(s,t), & x(0,t) = t \\ \frac{dy}{ds}(s,t) = y(s,t), & y(0,t) = 1 \\ \frac{dv}{ds}(s,t) = x(s,t), & v(0,t) = 2t \end{cases}$$

A segunda EDO dá $y(s,t) = e^s$. Derivando a primeira e usando a terceira equação, podemos escrever

$$\frac{d^2x}{ds^2}(s,t) = x(s,t), \quad x(0,t) = t, \quad \frac{dx}{ds}(0,t) = 2t.$$

A solução geral dessa equação é

$$C_1 e^s + C_2 e^{-s}.$$

Substituindo as condições iniciais, obtemos

$$x(s,t) = \frac{3}{2}te^s - \frac{1}{2}te^{-s}$$

e portanto

$$v(s,t) = \frac{3}{2}te^s + \frac{1}{2}te^{-s}.$$

Resumindo, otemos

$$\begin{aligned} x(s,t) &= \frac{3}{2}te^s - \frac{1}{2}te^{-s} \\ y(s,t) &= e^s \\ v(s,t) &= \frac{3}{2}te^s + \frac{1}{2}te^{-s}. \end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}te^s + \frac{1}{2}te^{-s} & \frac{3}{2}e^s - \frac{1}{2}e^{-s} \\ e^s & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{2s}.$$

Sobre a curva inicial,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}(0,t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \neq 0.$$

Como $e^s = y$, da primeira identidade obtemos

$$t\left(\frac{3y}{2} - \frac{1}{2y}\right) = x,$$

assim

$$t = \frac{2xy}{3y^2 - 1}, \quad s = \ln y.$$

Substituindo na terceira identidade, temos

$$u(x,y) = x\frac{3y^2+1}{3y^2-1}.$$

A solução existe somente para $y \neq 1/\sqrt{3}$. Como a curva inicial é $y = 1$, portanto a solução do problema de Cauchy existe somente para $y > 1/\sqrt{3}$.

3. Neste caso, os coeficientes

$$a(x,y) = x, \quad b(x,y) = -y, \quad c(x,y) = 1, \quad d(x,y) = y$$

são de classe C^1 no semiplano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Além diss,

$$a^2(x,y) + b^2(x,y) = x^2 + y^2 \neq 0$$

no semiplano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. As curvas características da equação satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x'(s) = x \\ y'(s) = -y. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(s) = c_1 e^s \\ y(s) = c_2 e^{-s} \end{cases}$$

Assim, $xy = c_2$. Logo, podemos escolher $t(x,y) = xy$. Como $t_x = y > 0$ no semiplano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, podemos escolher s(x, y) = y. Obtemos a mudança de variáveis

$$s(x,y) = y, \quad t(x,y) = xy,$$

cuja inversa no semiplano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ é

$$x = \frac{t}{s}, \quad y = s.$$

Defina $v(s,t) = u(x(s,t), y(s,t))$. Pela regra da cadeia

$$v_s = u_x x_s + u_y y_s = -\frac{x}{y} u_x + u_y.$$

Assim,

$$-y v_s = x u_x - y u_y$$

Usando que $x u_x - y u_y + u = y$, temos

$$-y v_s = y - u$$

ou seja, encontramos a EDO

$$-s v_s = s - v,$$

cuja solução é

$$v = -s \ln s + s f(t)$$

onde f é uma função de classe C^1 arbitrária. Portanto,

$$u(x,y) = -y \ln y + y f(xy)$$

é a solução geral da EDP dada.

4. Neste caso $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Temos

$$3^2 - 2 \cdot 4 = 1 > 0,$$

portanto a equação é hiperbólica. Assim,

$$a\mu^2 - 2b\mu + c = 0 \iff 2\mu^2 - 6\mu + 4 = 0 \iff \mu = 1 \text{ ou } \mu = 2$$

e as equações características são

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{dy}{dx} = 2,$$

que fornecem duas famílias de curvas características

$$x - y = c_1 \quad \text{e} \quad 2x - y = c_2.$$

Para escrever a equação na forma forma, façamos a mudança de variáveis

$$\begin{cases} \xi = 2x - y \\ \eta = x - y \end{cases} \quad \text{isto é} \quad \begin{cases} x = \xi - \eta \\ y = \xi - 2\eta \end{cases}$$

Definindo $v(\xi, \eta) = u(\xi - \eta, \xi - 2\eta)$, temos $u(x, y) = v(2x - y, x - y)$, e portanto

$$\begin{aligned} u_x &= 2v_\xi + v_\eta \\ u_y &= -v_\xi - v_\eta \\ u_{xx} &= 4u_{\xi\xi} + 4v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \\ u_{xy} &= -2u_{\xi\xi} - 3v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} \end{aligned}$$

A forma canônica da EDP dada é a equação

$$-2v_{\eta\xi} + v_\xi = 0,$$

que pode ser escrita como

$$(v_\xi)_\eta = \frac{1}{2} v_\xi$$

Integrando em η, encontramos

$$v_\xi(\xi, \eta) = e^{\eta/2} f(\xi)$$

com f arbitrária, e depois integrando em ξ, obtemos

$$v(\xi, \eta) = e^{\eta/2} F(\xi) + G(\eta),$$

onde F e G são funções arbitrárias de classe C^2. Retornando para as variáveis originais, a solução geral da EDP dada é

$$u(x, y) = e^{(x-y)/2} F(2x - y) + G(x - y).$$